УДК 519.21

О времени возвращения для некоторого марковского случайного блуждания

А. М. Фаль

Пусть имеется некоторое случайное блуждание по целочисленным точкам прямой, т. е. положение частицы в момент времени n определяется как

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

где ξ_i — случайные величины, определяющие скачки частицы.

Если все ξ_i — независимые и одинаково распределены, то имеем однородное случайное блуждание.

Если же распределение n-го скачка зависит от положения частицы в момент времени $n-1$, то блуждание является неоднородным по пространству, называемое также марковским.

Известно, что для изучения предельных распределений аддитивных функционалов от возвратных случайных блужданий важное значение имеет возможность нахождения распределения времени возвращения частицы в какую-нибудь точку, т. е. возможность нахождения вероятностей

$$\gamma_n = P\{S_n = x_0,\ S_i \neq x_0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 / S_0 = x\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Более точно, важно выяснить к области притяжения какого устойчивого закона будет принадлежать это распределение, т. е. найти связь между показателем устойчивого закона и параметрами блуждания.

Заметим, что для возвратных диффузионных процессов Р. З. Хасьминский [1, гл. IV] установил подобную связь между показателем устойчивого закона и коэффициентом диффузии.

Рассмотрим марковское случайное блуждание на полупрямой с единичными скачками:

$$P\{\xi_{n+1} = 1 / S_n = r\} = p_r,$$

$$P\{\xi_{n+1} = -1 / S_n = r\} = q_r \quad \text{и} \quad p_r + q_r = 1.$$

Условие $p_0 = 1$ обуславливает отражение в точке 0.

Особый интерес представляет случай

$$p_r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{r}\right),\ q_r = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{r}\right),\ r \geqslant 1,\ |c| < 1. \qquad (1)$$

Харрис [2] показал, что в случае $c < -\frac{1}{2}$ блуждание является невозвратным; в случае $c > \frac{1}{2}$ блуждание возвратно и существует конечный первый момент времени возвращения, а в случае $-\frac{1}{2} \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}$ блуждание возвратно, но математическое ожидание времени возвращения бесконечно.

Это обстоятельство побуждает нас к установлению связи между параметром c и характеристическим показателем устойчивого закона.

Рассмотрим случайное блуждание на полупрямой с вероятностями скачков вправо и влево p_r и q_r соответственно ($p_0 = 1$).

Пусть $\beta(m, n) = P\{S_n = 0 / S_0 = m\}$ означает вероятность попадания в точку 0 на n-м шаге при условии, что частица исходит из точки m.

Тогда

$$\beta(m, n) = p_m \beta(m+1, n-1) + q_m \beta(m-1, n-1), \ n \geqslant 1, \ m \geqslant 0;$$

$$\beta(m, 0) = \delta(m, 0),$$

где $\delta(x, y)$ — символ Кронекера.

Введем производящие функции

$$\varphi_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta(m, n) s^n, \quad m \geqslant 0, \quad |s| < 1,$$

которые удовлетворяют следующему конечноразностному уравнению:

$$\varphi_m(s) = s p_m \varphi_{m+1}(s) + s q_m \varphi_{m-1}(s), \quad m \geqslant 1. \tag{2}$$

Условие отражения принимает вид

$$\varphi_0(s) = 1 + s\varphi_1(s). \tag{3}$$

Из уравнения (2) можем записать

$$\frac{\varphi_{m-1}(s)}{\varphi_m(s)} = \frac{1}{sq_m} - \frac{p_m}{q_m} \frac{\varphi_{m+1}(s)}{\varphi_m(s)} = \frac{1}{sq_m}\left(1 - \frac{sp_m}{\dfrac{\varphi_m(s)}{\varphi_{m+1}(s)}}\right),$$

откуда получаем формальное разложение в непрерывную дробь

$$\frac{\varphi_{m-1}(s)}{\varphi_m(s)} = \frac{1}{sq_m}\left(1 - \cfrac{s^2 p_m q_{m+1}}{1 - \cfrac{s^2 p_{m+1} q_{m+2}}{1 - \ldots}}\right).$$

Используя условие отражения (3), получаем

$$\varphi_0(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2 q_1}{1 - \cfrac{s^2 p_1 q_2}{1 - \ldots}}}.$$

Так как p_i и q_i — вероятности, то имеет место сходимость непрерывной дроби при $|s| < 1$.

Доказательство можно найти в [3, гл. III]. В [3] показано также, что

$$\varphi_0(1) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{q_1}{1 - \cfrac{p_1 q_2}{1 - \ldots}}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 q_2 \ldots q_k}{p_1 p_2 \ldots p_k},$$

откуда следует полученное ранее Харрисом и другими условие возвратности случайного блуждания:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 q_2 \ldots q_k}{p_1 p_2 \ldots p_k} = \infty.$$

Непрерывные дроби для получения производящих функций использовал также Гуд [4].

В дальнейшем вместо $\varphi_0(s)$ будем писать просто $\varphi(s)$. Известно, что условием принадлежности некоторого распределения положительной случайной величины ζ к области притяжения устойчивого закона с параметром α является соотношение

$$P\{\zeta > n\} \sim n^{-\alpha} h(n) \tag{4}$$

при $n \to \infty$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция.

Тауберова теорема позволяет нам перейти к производящим функциям, где соотношение (4) заменяется следующим:

$$\psi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\zeta = n\} s^n \sim 1 - (1-s)^\alpha h\left(\frac{1}{1-s}\right) \tag{5}$$

при $s \to 1$.

Пусть $\tau(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\tau = n\} s^n$ обозначает производящую функцию для вероятностей возвращения; $\tau(s)$ и $\varphi(s)$ связаны следующим соотношением:

$$\tau(s) = 1 - \frac{1}{\varphi(s)}, \quad \text{а} \quad 1 - \frac{1}{\varphi(s)} = s^2 q_1 \omega(s),$$

где

$$\omega(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2 p_1 q_2}{1 - \cfrac{s^2 p_2 q_3}{1 - \dots}}}\,. \tag{6}$$

Если p_r и q_r имеют вид (1), то

$$\omega(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 s^2}{1 - \cfrac{a_2 s^2}{1 - \dots}}}\,,$$

где

$$a_{2k+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}c + 1 + k\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\right) + k\right)}{(1+2k)(2+2k)},$$

$$a_{2k+2} = \frac{\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2} + k + 1\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}c + 1\right) + k\right)}{(2+2k)(3+2k)}.$$

В этом случае $\omega(s)$ представляет собой разложение отношения двух гипергеометрических функций в непрерывную дробь (см., например, [3, гл. XV])

$$\omega(s) = \frac{F\left(\frac{1}{2}c + 1, \frac{1}{2}c + \frac{3}{2}, 2; s^2\right)}{F\left(\frac{1}{2}c + 1, \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}, 1; s^2\right)},$$

$$\tau(s) = \frac{s^2}{2}(1+c)\,\omega(s) = 1 - \frac{F\left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}, 1; s^2\right)}{F\left(\frac{1}{2}c + 1, \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}, 1; s^2\right)}$$

(ср. [4, 5]).

Мы использовали соотношение между гипергеометрическими функциями [6]:

$$\gamma F(\alpha, \beta, \gamma; z) - \gamma F(\alpha+1, \beta, \gamma; z) + \beta z F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z) = 0.$$

Если $\gamma - \alpha - \beta > 0$, то гипергеометрический ряд сходится при $z = 1$. В любом случае

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; z)$$

(см. [6]). Учитывая это, видим, что

$$\tau(s) = 1 - (1-s^2)^{c+\frac{1}{2}} \frac{F\left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}, 1; s^2\right)}{F\left(-\frac{1}{2}c, -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}, 1; s^2\right)}$$

и в случае $|c| < \frac{1}{2}$

$$\tau(s) \sim 1 - L_c (1-s^2)^{c+\frac{1}{2}}.$$

Пусть $c = \pm \frac{1}{2}$. Можно показать [6, стр. 349], что в этом случае

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; s^2\right) \sim \sqrt{2\pi} \ln \frac{1}{1-s^2} \text{ при } s \to 1$$

и

$$F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; s^2\right) \sim \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

При $c > \frac{1}{2}$ $\tau(s) \sim 1 - M_c(1-s^2)$ для $s \to 1$.

Заметим, что в последнем случае существует математическое ожидание времени возвращения, причем

$$M\tau = M_c = \frac{F\left(1 - \frac{1}{2}c, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c, 1; 1\right)}{F\left(-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c, 1; 1\right)} = \frac{\Gamma\left(c - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}c\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}c\right)\Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right)} = \frac{c}{2c-1}.$$

Теперь можем объединить наши рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть имеется возвратное марковское случайное блуждание с вероятностями положительных и отрицательных единичных скачков вида* (1), $c \geqslant -\frac{1}{2}$. *Пусть также* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ — *последовательность независимых и одинаково распределенных положительных случайных величин, распределение которых совпадает с распределением времени возвращения в указанном блуждании.*

Тогда в зависимости от с имеют место следующие предельные соотношения:

1) $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n}{(L_c n)^{\frac{2}{1+2c}}} < x\right\} = G_{c+\frac{1}{2}}(x), \tag{7}$$

где $L_c = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-c\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}c\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}c\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c\right)}$, $\Gamma(x)$ — *функция Эйлера*, $G_{c+\frac{1}{2}}(x)$ — *функция распределения устойчивого закона с показателем* $c+\frac{1}{2}$;

2) $c=\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n}{n} - 4\ln n < x\right\} = G_1(x), \tag{8}$$

где $G_1(x)$ — *функция распределения устойчивого в широком смысле закона с показателем* 1;

3) $c > \frac{1}{2}$

$$\frac{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \frac{c}{2c-1}. \tag{9}$$

Как уже отмечалось выше, доказанная теорема позволяет находить предельные распределения для функционалов от случайных блужданий.

Из результатов Феллера [7] и Шарагиной [8] следует справедливость такой теоремы.

Теорема 2. *Пусть дано марковское случайное блуждание вида (1). Пусть также N_n означает число попаданий в точку 0 за время n.*

Тогда: 1) *если* $c=-\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_n}{4\ln n} < x\right\} = 1-e^{-x},\ x>0;$$

2) *если* $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_n}{n^{\frac{1+2c}{2}}} \geqslant \frac{x}{L_c}\right\} = G_{c+\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{2}{1+2c}}\right);$$

3) *если* $c>\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{N_n \geqslant \frac{2c-1}{c}n - \left(\frac{2c-1}{c}\right)^{\frac{2}{1+2c}} b_n x\right\} = G_{c+\frac{1}{2}}(x),$$

где b_n такое, что $P\{\tau \geqslant b_n\} \sim \frac{1}{n}$ *при* $n\to\infty$. *В случае* $c=\frac{1}{2}$ *нормировки имеют довольно громоздкий вид.*

Рассмотрим блуждание на отрицательной полуоси с такими же вероятностями перехода вида (1) с отражением в нуле.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{p_1\ldots p_k}{q_1\ldots q_k}$ расходится при $c\leqslant\frac{1}{2}$, то при $-1<c\leqslant\frac{1}{2}$ блуждание будет возвратным.

Можно показать, что

$$(1-\tau^*(z))(1-\tau(z)) = 1-z, \tag{10}$$

где $\tau^*(z)$ — производящая функция времени возвращения в блуждании, совершаемом на левой полуоси, $z = s^2$.

Из (10) следует, что при $z \to 1$:

1) в случае $c = \frac{1}{2}$ $\quad 1-\tau^*(z) \sim \dfrac{1}{4\ln\dfrac{1}{1-z}}$;

2) в случае $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$ $\quad 1-\tau^*(z) \sim \dfrac{1}{L_c}(1-z)^{\frac{1}{2}-c}$;

3) в случае $c = -\frac{1}{2}$ $\quad 1-\tau^*(z) \sim 4\ln\dfrac{1}{1-z}(1-z)$.

Заметим, что при $|c| \leqslant \frac{1}{2}$, если положить $p_0 = q_0 = \frac{1}{2}$, блуждание на всей прямой вида (1) является возвратным. Для блуждания на левой полуоси можно получить теорему, аналогичную теореме 1.

После этого легко сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть имеется возвратное случайное блуждание на всей прямой вида* (1) *с* $p_0 = q_0 = \frac{1}{2}$, $|c| \leqslant \frac{1}{2}$.

Обозначим через N_n *число попаданий в точку* 0 *за время* n.

Тогда: 1) *если* $c = \pm\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{N_n}{2\ln n} < x\right\} = 1 - e^{-x}, \quad x > 0;$$

2) *если* $|c| < \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{2N_n}{n^{\frac{1-2|c|}{2}}} \geqslant \frac{x}{L_{|c|}}\right\} = G_{\frac{1}{2}-|c|}\left(x^{-\frac{2}{1-2|c|}}\right),$$

где

$$L_{|c|} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+|c|\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}|c|\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|c|\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-|c|\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}|c|\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|c|\right)}.$$

Автор выражает благодарность А. В. Скороходу, под руководством которого проделана эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, «Наука», М., 1969.
2. T. E. Harris, First passage and recurrence distributions, Trans. Amer. Math. Soc., 73, 3, 1952, 471—486.
3. H. S. Wall, Analytic theory of continued fractions, New-York, 1948.
4. I. J. Good, Random motion and analytic continued fractions, Proc. Cambr. Phil. Soc., **54**, p. 1, 1958, 43—47.

5. J. G i l l i s, Centrally biased discrete random walk, Quart. J. Math., **2**, 7, 1956, 144—152.
6. Н. Н. Л е б е д е в, Специальные функции и их приложения, ГИТТЛ, М., 1953.
7. W. F e l l e r, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 1949, 98—119.
8. З. И. Ш а р а г и н а, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, ДАН СССР, т. **110**, 1956.

Поступила 13.V 1971 г.
Институт математики АН УССР