УДК 519.1

# Некоторые комбинаторные тождества для сумм композиционных коэффициентов

*Н. П. Хоменко, В. В. Строк*

**1**. Подсчет количества определенным образом заданных классов эквивалентности некоторых объектов является основной задачей современного комбинаторного анализа. Значительная часть посвященных этому вопросу работ базируется на фундаментальной теореме Ридфельда — Пойя. Как известно, при этом приходится оперировать цикловым индексом определяющей эквивалентность на заданных объектах группы перестановок. Такой подход к вопросу перечисления существенным образом включает в себя операции с разбиениями. Оказывается, что наряду с разбиениями важную роль в вопросах перечисления играют композиции и, следовательно, свойства множеств, индуцированных совокупностями различных классов композиций. Предлагаемый здесь достаточно общий подход к этому вопросу основан на расширении понятия композиции посредством задания ее частей на множестве целых неотрицательных чисел и эффективном использовании метода производящих функций. Это позволило получить, в частности, ряд новых комбинаторных тождеств для сумм композиционных коэффициентов и обобщить результаты Као и Зеттерберга [1].

**2.** Определения и обозначения. Пусть $M \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$, а $I^{(s)} = [1, s]$ — интервал на $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Композицией назовем отображение $\varkappa^M : \lambda_i \to \{n_{i_j}\}$, где $n_{i_j} \in I^{(s)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \alpha_i;\ i = 1, 2, \ldots, r)$, $\lambda_i \in M$, $n_{i_j} \neq n_{ml}$ при $i \neq m \vee j \neq l$, а $\{\{n_{i_j}\}\} = I^{(s)}$. Тогда разбиением будет отображение $\mathfrak{A}^M : \lambda_i \to \alpha_i$, где $\alpha_i = |\{n_{i_j}\}|$. Число $d(\varkappa^M) = \Sigma_i \alpha_i$ будем называть размерностью композиции $\varkappa^M$ или, соответственно, размерностью $d(\mathfrak{A}^M)$ разбиения $\mathfrak{A}^M$, *а* число $w(\varkappa^M) = \Sigma_i \lambda_i \alpha_i$ — весом композиции $\varkappa^M$ или, соответственно, весом $w(\mathfrak{A}^M)$ разбиения $\mathfrak{A}^M$ в зависимости от того, какое из определенных отображений будет рассматриваться. Композицию, для которой $w(\varkappa^M) = n$, $d(\varkappa^M) = s$, обозначим через $\varkappa^M_{n,s}$. Композиции с одинаковым набором $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r)$ принадлежат одному классу $(\alpha)$, т. е. имеют один и тот же тип $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r) \equiv \mathfrak{A}^M_{n,s}$.

**3.** Комбинаторные тождества для сумм композиционных коэффициентов. Композиции $\varkappa^M_{n,s}$ некоторого класса $(\alpha)$ поставим в соответствие выражение $n!\,[\Pi_i (\lambda_i!)^{\alpha_i}]^{-1}$, которое назовем композиционным коэффициентом и обозначим через $P(\varkappa^M_{n,s})$. Коэффициент $P(\varkappa^M_{n,s})$, интерпретируемый как число размещений $n$ различных элементов со спецификацией занятости $(\alpha)$, либо как полиномиальный коэффициент, либо как число $s$-перестановок из элементов общей спецификации $(\alpha)$ и т. п., весьма часто встречается в комбинаторике. Вводимое здесь определение композиционного коэффициента содержит в себе достаточно общий подход к исследованию сумм $\mathfrak{P}(\varkappa_{n,s}^M) = \Sigma_{\{\varkappa_{n,s}^M\}} P(\varkappa_{n,s}^M)$ этих коэффициентов для произвольных допустимых $M$ и позволяет при этом сравнительно просто получить ряд комбинаторных тождеств для сумм $\mathfrak{P}(\varkappa_n^M)$.

Композиции $\varkappa_{n,s}^M$ при $M = \{k, k+1, k+2, \ldots, n\}$, $k \in N$, назовем $k$-композициями и обозначим через $\varkappa_{n,s}^{(k)}$.

Лемма 1. *Производящей функцией для сумм* $\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k)})$, $k \in N$, *является*

$$\sum_s \mathfrak{P}(t; k, s) = \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots \right)^s = \\ = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k)}). \quad (1)$$

Доказательство. Как известно [2], производящей перечисляющей функцией для композиций $\varkappa_{n,s}^{(1)}$ является

$$K(t; s) = (t + t^2 + t^3 + \ldots)^s = \Sigma_{n=s}^{\infty} K_{n,s} t^n, \quad (2)$$

где $K_{n,s} = |\{\varkappa_{n,s}^{(1)}\}|$, а перечисляющей производящей функцией для композиций $\varkappa_n^{(1)}$ является

$$K(t; \Sigma_s) = \Sigma_{s=1}^{\infty} K(t; s) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \Sigma_{s=1}^{n} K_{n,s} t^n. \quad (3)$$

Аналогично (2) и (3) производящими функциями для $k$-композиций $\varkappa_{n,s}^{(k)}$ и $\varkappa_n^{(k)}$ будут

$$K(t; k, s) = (t^k + t^{k+1} + t^{k+2} + \ldots)^s \quad (4)$$

и, соответственно,

$$K(t; k, \Sigma_s) = \Sigma_{s=1}^{\infty} K(t; k, s). \quad (5)$$

Разделив в (4) $t^{k+i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ на $(k+i)!$, мы тем самым каждой части $\lambda = k + i$ некоторой из композиций множества $\{\varkappa^{(k)}\}$ поставим во взаимно однозначное соответствие число $1/(k+i)!$, и тогда, согласно (5), в разложении

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \frac{t^{k+i}}{(k+i)!} + \ldots \right)^s$$

по степеням $t$ коэффициент при $t^n/n!$ (аналогично правой части (3)) будет не чем иным как суммой композиционных коэффициентов $\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k)}) = \Sigma_{\{\varkappa_n^{(k)}\}} P(\varkappa_{n,s}^{(k)})$, представленной в правой части (1).

На основании леммы 1 методом производящих функций можно получить ряд комбинаторных тождеств для сумм композиционных коэффициентов в терминах чисел Стирлинга второго рода. Так, например, определенная в [1, 2] сумма $\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(1)})$ композиционных коэффициентов в наших обозначениях запишется так:

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(1)}) = \Sigma_{s=1}^{n} s!\, S(n, s), \quad (6)$$

где $S(n, s)$ — число Стирлинга второго рода.

Определение суммы $\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(2)})$ композиционных коэффициентов производится следующим образом. Пусть $\mathfrak{P}(t; 1, s)$ — производящая функция для сумм $\mathfrak{P}(\varkappa_{n,s}^{(1)})$ композиционных коэффициентов. Тогда

$$\sum_s \mathfrak{P}(t; 2, s) = \sum_{s=1}^{\infty} [\mathfrak{P}(t; 1, 1) - t]^s =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^j t^j \mathfrak{P}(t; 1, s-j) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{s=1}^{[n/2]} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^j (s-j)!\, S(n, s-j)\, t^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{s=1}^{n} s! \sum_{j=0}^{s} \binom{n}{j} (-1)^j S(n-j, s-j)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(2)}) = \sum_{s=1}^{[n/2]} s! \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} (-1)^i S(n-i, s-i). \tag{7}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(3)}) = \sum_{s=1}^{[n/3]} s! \sum_{i_2=0}^{s} \sum_{i_1=0}^{s-i_2} (-1)^{i_1+i_2} \times$$

$$\times \frac{(n)_{i_1+2i_2}}{(1!)^{i_1} i_1!\, (2!)^{i_2} i_2!} S(n-i_1-2i_2, s-i_1-i_2), \tag{8}$$

где $(n)_{i_1+2i_2}$ — число перестановок из $n$ элементов по $i_1+2i_2$, а

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(4)}) = \sum_{s=1}^{[n/4]} s! \sum_{i_3=0}^{s} \sum_{i_2=0}^{s-i_3} \sum_{i_1=0}^{s-i_3-i_2} (-1)^{i_1+i_2+i_3} \times$$

$$\times (n)_{i_1+2i_2+3i_3} [(1!)^{i_1} i_1!\, (2!)^{i_2} i_2!\, (3!)^{i_3} i_3!]^{-1} S(n-i_1-2i_2-3i_3, s-i_1-i_2-i_3). \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $P(\varkappa_{n,s}^{(k)})$ — композиционный коэффициент, у которого $\lambda_i \geqslant k$ $(i = 1, 2, \ldots, r; r \leqslant s; k = 1, 2, \ldots)$. Тогда*

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k)}) = \sum_{\{\varkappa_n^{(k)}\}} P(\varkappa_{n,s}^{(k)}) = \sum_{s=1}^{[n/k]} s! \sum_{i_{k-1}=0}^{s} \sum_{i_{k-2}=0}^{s-i_{k-1}} \cdots$$

$$\cdots \sum_{i_1=0}^{s-\sum_{q=2}^{k-1} i_q} (-1)^{\sum_{q=1}^{k-1} i_q} \times$$

$$\times (n)_{\sum_{q=1}^{k-1} q i_q} \left[\prod_{q=1}^{k-1} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} S\left(n - \sum_{q=1}^{k-1} q i_q, s - \sum_{q=1}^{k-1} i_q\right), \tag{10}$$

*где $(n)_{\sum_{q=1}^{k-1} q i_q}$ — число перестановок из $n$ элементов по $\sum_{q=1}^{k-1} q i_q$, а $S\left(n - \sum_{q=1}^{k-1} q i_q, s - \sum_{q=1}^{k-1} i_q\right)$ — число Стирлинга второго рода.*

Доказательство. Пусть $\Sigma_s \mathfrak{P}(t; k, s)$ — производящая функция для сумм $\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k)})$ композиционных коэффициентов. Предположим, что для $k = k'$ теорема имеет место:

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k')}) = \sum_{s=1}^{[n/k']} s! \sum_{i_{k'-1}=0}^{s} \sum_{i_{k'-2}=0}^{s-i_{k'-1}} \cdots$$

$$\cdots \sum_{i_1=0}^{s-\sum_{q=2}^{k'-1} i_q} (-1)^{\sum_{q=1}^{k'-1} i_q} (n)_{\sum_{q=1}^{k'-1} q i_q} \left[\prod_{q=1}^{k'-1} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} \times$$

$$\times S\left(n - \sum_{q=1}^{k'-1} q i_q, s - \sum_{q=1}^{k'-1} i_q\right).$$

Тогда для $k = k' + 1$

$$\mathfrak{P}(t; k'+1, s) = \left\{\mathfrak{P}(t; k', 1) - \frac{t^{k'}}{k'!}\right\}^s = \sum_{j=0} (-1)^j \binom{s}{j} \frac{t^{k'j}}{(k'!)^j} \times$$

$$\times \mathfrak{P}(t; k', s-j) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \frac{t^{k'j}}{(k'!)^j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \times$$

$$\times (s-j)! \sum_{i_{k'-1}=0}^{s-j} \sum_{i_{k'-2}=0}^{s-i_{k'-1}-j} \ldots \sum_{i_1=0}^{s-j-\sum_{q=2}^{k'-1} i_q} \times$$

$$\times (-1)^{\sum_{q=1}^{k'-1} i_q} (n)_{\sum_{q=1}^{k'-1} qi_q} \left[\prod_{q=1}^{k'-1} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} \times$$

$$\times S\left(n - \sum_{q=1}^{k'-1} qi_q, s - j - \sum_{q=1}^{k'-1} i_q\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} s! \sum_{j=0}^{s} \sum_{i_{k'-1}=0}^{s-j} \ldots \sum_{i_1=0}^{s-j-\sum_{q=2}^{k'-1} i_q} (-1)^{\sum_{q=1}^{k'-1} i_q + j} \times$$

$$\times (n)_{\sum_{q=1}^{k'-1} qi_q + jk'} \left[\prod_{q=1}^{k'-1} (q!)^{i_q} i_q! (k'!)^j j!\right]^{-1} \times$$

$$\times S\left(n - \sum_{q=1}^{k'-1} qi_q - k'j, s - j - \sum_{q=1}^{k'-1} i_q\right)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{P}(\varkappa_n^{(k'+1)}) = \sum_{s=1}^{[n/(k'+1)]} s! \sum_{i_{k'}=0}^{s} \sum_{i_{k'-1}=0}^{s-i_{k'}} \ldots \sum_{i_1=0}^{s-\sum_{q=2}^{k'} i_q} \times$$

$$\times (-1)^{\sum_{q=1}^{k'} i_q} (n)_{\sum_{q=1}^{k'} qi_q} \left[\prod_{q=1}^{k'} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} \times$$

$$\times S\left(n - \sum_{q=1}^{k'} qi_q, s - \sum_{q=1}^{k'} i_q\right).$$

Таким образом, принимая во внимание приведенные выше примеры, доказано, что тождество (10) имеет место при любом целом $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Лемма 2 [2]. *Пусть* $\varkappa_{n,s}^{(k)}$ — *композиция, у которой* $\lambda_i \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}$, $k \in N$. *Тогда*

$$|\{\varkappa_n^{(k)}\}| = \sum_{s=1}^{[n/k]} \binom{n - s(k-1) - 1}{s-1}. \tag{11}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varkappa_{n,s}^{M}$ — *композиция, для которой* $M = \{0, k, k+1, k+2, \ldots\}$, $k \in N$.
*Тогда*

$$|\{\varkappa_{n,s}^{M}\}| = \sum_{i=1}^{[n/k]} \binom{s}{i} \binom{n - i(k-1) - 1}{i-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Для образования композиции $\varkappa_{n,s}^{M}$ из $\varkappa_{n,i}^{(k)}$ ($M = \{0, k, k+1, k+2, \ldots\}$, $i \leqslant [n/k]$) к последней следует добавить $s - i$ частей, равных нулю. Полученную таким образом композицию, содержащую $i$ отличных от нуля частей, обозначим через $\varkappa_{n,s,i}^{M}$. Легко видеть, что такое образование композиции $\varkappa_{n,s,i}^{M}$ из $\varkappa_{n,i}^{(k)}$ может быть произведено $\binom{s}{i}$ различными способами. А так как на основании леммы 2 $|\{\varkappa_{n,s}^{(k)}\}| = \binom{n - s(k-1) - 1}{s-1}$, то, умножая последнее выражение на $\binom{s}{i}$ и суммируя по $i$, получаем (12). В случае $s=n$ получаем композиции, которые естественно называть полными $k$-композициями $\varkappa_{n,n}^M$. На основании лемм 2 и 3 можно получить следующую формулу для числа полных композиций $\varkappa_{n,n}^M$:

$$|\{\varkappa_{n,n}^M\}| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}^2 = \binom{2n-1}{n}. \quad (13)$$

Правая часть полученного выражения очевидным образом следует из формулы для выражения вероятностей в гипергеометрическом распределении.

Теорема 2. *Пусть $P(\varkappa_{n,s}^M)$ — композиционный коэффициент, для которого $M=\{0, k, k+1, k+2, \ldots\}$, $k\in N$. Тогда*

$$\mathfrak{P}(\varkappa_{n,s}^M) = \sum_{\{\varkappa_{n,s}^M\}} P(\varkappa_{n,s}^M) = \sum_{j=1}^{[n/k]} \binom{s}{j} j! \sum_{i_{k-1}=0}^{j} \sum_{i_{k-2}=0}^{j-i_{k-1}} \cdots$$

$$\ldots \sum_{i_1=0}^{j-\sum_{q=2}^{k-1} i_q} (-1)^{\sum_{q=1}^{k-1} i_q} (n)_{\sum_{q=1}^{k-1} q i_q} \left[\prod_{q=1}^{k-1} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} \times$$

$$\times S\left(n - \sum_{q=1}^{k-1} q i_q,\ j - \sum_{q=1}^{k-1} i_q\right). \quad (14)$$

Доказательство. На основании леммы 3 можно показать, что

$$\mathfrak{P}(\varkappa_{n,s}^M) = \sum_{\{\varkappa_{n,s}^M\}} P(\varkappa_{n,s}^M) = \sum_{i=1}^{[n/k]} \binom{s}{i} \mathfrak{P}(\varkappa_{n,i}^{(k)}). \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражение для суммы $\mathfrak{P}(\varkappa_{n,i}^{(k)})$ из (10), получаем (14).

Воспользовавшись результатами (10) и (14), получаем следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть $\varkappa_{n,s}^M$ — композиция, для которой $M=\{0, 1, 2, \ldots \ldots, k\}$, $k\in N$, $k\leqslant n$, а $P(\varkappa_{n,s}^M)$ — соответствующий ей композиционный коэффициент. Тогда*

$$\mathfrak{P}(\varkappa_{n,s}^M) = \sum_{\{\varkappa_{n,s}^M\}} P(\varkappa_{n,s}^M) = s! \sum_{r=0}^{n} \sum_{j=0}^{s} \frac{(s-j)^r}{(s-j)!} \sum_{i_k=0}^{j} \sum_{i_{k-1}=0}^{j-i_k} \cdots$$

$$\ldots \sum_{i_1=0}^{j-\sum_{q=2}^{k} i_q} (-1)^{j+\sum_{q=1}^{k} i_q} (n-\ )_{\sum_{q=1}^{k} q i_q} \left[\prod_{q=1}^{k} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} \times$$

$$\times \binom{n}{r} S\left(n - r - \sum_{q=1}^{k} q i_q,\ j - \sum_{q=1}^{k} i_q\right). \quad (16)$$

Теорема 4. *Пусть $\varkappa_{n,s}^M$ — композиция, для которой $M=\{1, 2, 3, \ldots \ldots k\}$, $k\leqslant n$, а $P(\varkappa_{n,s}^M)$ — соответствующий ей композиционный коэффициент. Тогда*

$$\mathfrak{P}(\varkappa_{n,s}^M) = \sum_{\{\varkappa_{n,s}^M\}} P(\varkappa_{n,s}^M) = s! \sum_{r=0}^{n} \sum_{j=0}^{s} \sum_{i_k=0}^{j} \sum_{i_{k-1}=0}^{j-i_k} \cdots \sum_{i_1=0}^{j-\sum_{q=2}^{k} i_q} \times$$

$$\times (-1)^{j+\sum_{q=1}^{k} i_q} (n-r)_{\sum_{q=1}^{k} q i_q} \left[\prod_{q=1}^{k} (q!)^{i_q} i_q!\right]^{-1} \binom{n}{r} S(r, s-j) \times$$

$$\times S\left(n - r - \sum_{q=1}^{k} q i_q,\ j - \sum_{q=1}^{k} i_q\right). \quad (17)$$

**4.** Симметрические композиции и подсчет диаметрально-критических графов.

1. Рассмотрим множество композиций $\varkappa^M_{n,s}$, все наборы $\{n_{i_j}\} \in I^{(s)}$ каждой из которых удовлетворяют следующему условию:

$$\{n_{i_j}\} \ni q \Leftrightarrow s - q + 1 \in \{n_{i_j}\}. \tag{18}$$

Композиции, удовлетворяющие условию (18), назовем симметрическими композициями и обозначим через ${}^*\varkappa^M_{n,s}$.

Лемма 4. *Пусть* ${}^*\varkappa^{(k)}_{n,s}$ — *симметрическая k-композиция, т. е. композиция* ${}^*\varkappa^M_{n,s}$ *при* $M = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$, $k \in N$. *Тогда*

а) $|\{{}^*\varkappa^{(k)}_n\}| = \sum_{s=1}^{n} \binom{[n/2] - [s/2](k-1) - \delta_n}{[s/2] - \delta_n\delta_s}$, *где* $\delta_i = 1$ *при четном* $i$ *и* $\delta_i = 0$ *при нечетном* $i$;

б) $|\{{}^*\varkappa^{(1)}_n\}| = 2^{[n/2]}$.

Для построения доказательства а) представим композицию ${}^*\varkappa^{(k)}_{n,s}$ в следующем виде:

$${}^*\varkappa^{(k)}_{n,s} = (\langle m_1, \ldots, m_q, \ldots, m_r, \lambda, m'_1, \ldots, m'_q, \ldots, m'_r\rangle:$$

$$m_q \in \varkappa^{(k)}_{\frac{n-\lambda}{2}, r};\ m'_q \in (\varkappa^{(k)}_{\frac{n-\lambda}{2}}, r)'),$$

где $m_q = \lambda_i$, $q = n_{i_j}$, а $(\varkappa^{(k)}_{\frac{n-\lambda}{2}, r})'$ — композиция, обратная к $\varkappa^{(k)}_{\frac{n-\lambda}{2}, r}$, причем часть $\lambda$ композиции ${}^*\varkappa^{(k)}_{n,s}$ при $s = 2r$ отсутствует.

В случае $n = 2a$ $(a = 1, 2, \ldots)$, $s = 2r$ $(r = 1, 2, \ldots, a)$ на основании леммы 2 получаем

$$|\{{}^*\varkappa^{(k)}_{2a,2r}\}| = |\{\varkappa^{(k)}_{a,r}\}| = \binom{n/2 - (s/2)(k-1) - 1}{s/2 - 1}. \tag{19}$$

В случае $n = 2a$, $s = 2r + 1$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, a-1)$ из (18) следует, что $\lambda = 2l$ $(l = 1, 2, \ldots, a)$. Тогда

$$|\{{}^*\varkappa^{(k)}_{2a,2r+1}\}| = \left|\bigcup_{l=1}^{a} \{\varkappa^{(k)}_{a-l,r}\}\right| = \sum_{l=1}^{n/2-k[s/2]} \binom{n/2 - l - [s/2](k-1) - 1}{[s/2] - 1} =$$

$$= \binom{n/2 - [s/2](k-1) - 1}{[s/2]}. \tag{20}$$

Если же $n = 2a + 1$, то на основании (18) необходимо, чтобы $s = 2r + 1$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, a)$, $\lambda = 2l + 1$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, a)$, и тогда

$$|\{{}^*\varkappa^{(k)}_{2a+1,2r+1}\}| = \left|\bigcup_{l=0}^{a} \{\varkappa^{(k)}_{a-l,r}\}\right| = \sum_{l=0}^{n/2-k[s/2]} \binom{[n/2] - l - [s/2](k-1) - 1}{[s/2] - 1} =$$

$$= \binom{[n/2] - [s/2](k-1)}{[s/2]}. \tag{21}$$

Для доказательства б) в случае $n = 2a$ получаем

$$|\{{}^*\varkappa^{(1)}_{2a}\}| = \left|\left(\bigcup_{r=1}^{a} \{{}^*\varkappa^{(1)}_{2a,2r}\}\right) \cup \left(\bigcup_{r=0}^{a-1} \{{}^*\varkappa^{(1)}_{2a,2r+1}\}\right)\right| =$$

$$= \sum_{r=1}^{a} \binom{a-1}{r-1} + \sum_{r=0}^{a-1} \binom{a-1}{r} = 2^a,$$

где $a = n/2$.

В случае $n = 2a + 1$ на основании (21) получаем

$$|\{^*\varkappa_{2a+1}^{(1)}\}| = \left|\bigcup_{r=0}^{a} \{^*\varkappa_{2a+1,2r+1}^{(1)}\}\right| = \sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} = 2^a,$$

где $a = [n/2]$.

Очевидным следствием лемм 3 и 4 является такое утверждение.

Следствие. *Число симметрических композиций* $^*\varkappa_{n,s}^M$ *для* $M = \{0, k, k+1, k+2, \ldots\}$, $k \in N$, *равно*

$$|\{^*\varkappa_{n,s}^M\}| = \sum_{i=1}^{[s/2]} \binom{[s/2]}{i} \binom{[n/2] - ik - \delta_n\delta_s}{i - \delta_n\delta_s},$$

*где* $\delta_i = 1$ *при четном* $i$ *и* $\delta_i = 0$ *при нечетном* $i$.

2. Между $k$-композициями $\varkappa_{n-2,d-1}^{(k)}$, $k \in N$, и диаметрально-критическими графами порядка $n$ и диаметра $d$ существует взаимно однозначное соответствие [3]. Это дает возможность подсчет количества различных типов диаметрально-критических графов свести к подсчету числа соответствующих им $k$-композиций. Примером может служить такая теорема.

Теорема 5. *Количество неизоморфных диаметрально-критических графов порядка* $n$, *диаметра* $d$ *и связности* $\omega(G) \geqslant k$ *равно*

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n-3-(d-1)(k-1)}{d-2} + \binom{\frac{n-4-(d-1)(k-1)}{2}}{(d-3)/2}\right], \quad \text{если } n - \text{четное, } d - \text{нечетное;}$$

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n-3-(d-1)(k-1)}{d-2} + \binom{\frac{n-4}{2} - \left[\frac{d-1}{2}\right](k-1)}{[(d-1)/2]}\right], \quad \text{если } n \text{ и } d - \text{четные;}$$

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n-3-(d-1)(k-1)}{d-2} + \binom{\frac{n-3}{2} - \left[\frac{d-1}{2}\right](k-1)}{[(d-1)/2]}\right], \quad \text{если } n - \text{нечетное, } d - \text{четное.}$$

Доказательство. Легко видеть, что каждому диаметрально-критическому графу $G$ связности $\omega(G) \geqslant k_0 \geqslant 1$ отвечает композиция $\varkappa_{n-2,d-1}^{(k)}$, $k \in N$. Учитывая то, что паре взаимно обратных композиций множества $\{\varkappa_{n-2,d-1}^{(k)}\}$ отвечают изоморфные графы, число всех неизоморфных графов $G$, для которых $\omega(G) \geqslant k_0$, равно

$$\frac{1}{2}\left(|\{\varkappa_{n-2,d-1}^{(k)}\}| + |\{^*\varkappa_{n-2,d-1}^{(k)}\}|\right),$$

где $^*\varkappa_{n-2,d-1}^{(k)}$ — симметрическая композиция. Используя затем результаты лемм 2 и 4 получаем доказательство теоремы 5.

Примечание. Перед поступлением этой работы в печать, авторы познакомились с работой Р. Ситгревса [4], содержащей доказательство двух теорем, которые являются частными случаями теоремы 1 данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Kao, L. H. Zetterberg, An identity for the sum of multinominal coefficients, The Amer. Math. Monthly, v. 64, № 2, 1957, 96—100.
2. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
3. Н. П. Хоменко, Н. А. Островерхий, Диаметрально-критические графы, УМЖ, т. 22, № 5, 1970.
4. R. Sitgreaves, Some properties of Stirling numbers of the second kind, The Fibonacci Quarterly, v. 8, № 2, 1970, 172—181.

Поступила 13.II 1969 г.,
после переработки — 27.VII 1970 г.
Институт математики АН УССР