УДК 512.25/.26+519.3:330.115

Об одном методе отсечения для дискретных задач

Ю. Ю. Червак

В работе предлагается один подход к решению частично дискретной задачи линейного программирования: максимизировать

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x_j \in D_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jq_j}\}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_1 \quad (n_1 \leqslant n). \tag{4}$$

Здесь $x_{j1} < x_{j2} < \ldots < x_{jq_j}$, причем для всех j, $j \in \{1, \ldots, n_1\}$, $x_{j_1} \equiv 0$.

Предлагаемый здесь алгоритм отличается от алгоритма Дальтона и Ллевелина [1] способом построения правильных отсечений* и состоит в следующем.

Пусть на r-м $(r = 0, 1, \ldots)$ шаге решения задачи (1)—(4) целевая функция x_0 и переменные $x_1, \ldots, x_n$ выражаются через небазисные переменные x_j ($j \in N_r = \{j \mid x_j$ — небазисная переменная для текущего оптимального расширенного решения $\widetilde{X}_r\}$) следующим образом:

$$x_i = a_{i0}^r + \sum_{j \in N_r} a_{ij}^r (-x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $a_{i0}^r \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{0j}^r \geqslant 0$, $j \in N_r$, $a_{t0}^r \notin D_t$, $t = \min\{i \mid i \in \{0, 1, \ldots, n_1\};$ $a_{i0}^r \notin D_i\}$.

Если $a_{t0}^r > x_{tq_t}$, то, как и в [1], правильным отсечением является ограничение

$$x_{n+r+1} = x_{tq_t} - a_{t0}^r + \sum_{j \in N_r} (-a_{tj}^r)(-x_j), \qquad x_{n+r+1} \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть $a_{t0}^r < x_{tq_t}$. Тогда решаем две вспомогательные задачи:

первая, состоящая в максимизации x_0 при условиях (5) и (7):

$$z = [a_{t0}^r] - a_{t0}^r + \sum_{j \in N_r} (-a_{tj}^r)(-x_j)^{**}, \qquad z \geqslant 0; \tag{7}$$

вторая, состоящая в максимизации x_0 при условиях (5) и (8):

$$z = a_{t0}^r - \langle a_{t0}^r \rangle + \sum_{j \in N_r} a_{tj}^r (-x_j)^{***}, \quad z \geqslant 0. \tag{8}$$

Кроме того, в процессе решения этих двух вспомогательных задач выражаем функцию x_{-1}:

$$x_{-1} = a_{-1,0}^r + \sum_{j \in N_r} a_{-1,j}^r (-x_j), \qquad a_{-1,j}^r = |a_{tj}^r|, \qquad j \in \{0 \cup N_r\}, \tag{9}$$

через текущие множества небазисных переменных. При этом переменную x_l, вводимую в базис, выбираем по правилу

$$\frac{a_{-1,l}}{|a_{kl}|} = \min\left\{\frac{a_{-1,q}}{|a_{kq}|} \,\middle|\, q \in Q\right\},$$

где Q — множество индексов q, удовлетворяющих условию

$$\frac{a_{0q}}{|a_{kq}|} = \min\left\{\frac{a_{0j}}{|a_{kj}|} \,\middle|\, a_{kj} < 0; \;\; j \in N\right\},$$

k — индекс ведущей строки, N — текущее множество небазисных переменных.

---

* Термин «правильное отсечение» заимствован из монографии А. А. Корбута и Ю. Ю. Финкельштейна [2].

** $[a_{t0}^r] = \max\{x_{ts} \mid s \in \{1, \ldots, q_t\}; \quad x_{ts} < a_{t0}^r\}$.

*** $\langle a_{t0}^r \rangle = \min\{x_{ts} \mid s \in \{1, \ldots, q_t\}; \quad x_{ts} > a_{t0}^r\}$.

Если обе вспомогательные задачи неразрешимы, то и задача (1) — (4) также неразрешима. Если же только одна из этих задач неразрешима, то другая соответствует одному шагу алгоритма.

Пусть

$$x_i = \overline{a}^r_{i0} + \sum_{j \in \widehat{N}_r} \widehat{a}^r_{ij}(-x_j), \qquad i = -1, 0, 1, \ldots, n,$$

и

$$x_i = \widehat{a}^r_{i0} + \sum_{j \in \widehat{N}_r} \widehat{a}^r_{ij}(-x_j), \qquad i = -1, 0, 1, \ldots, n,$$

где $\overline{N}_r = \{j \mid x_j$ — небазисная переменная для оптимального решения первой вспомогательной задачи$\}$, $\widehat{N}_r = \{j \mid x_j$ — небазисная переменная для оптимального решения второй вспомогательной задачи$\}$. Тогда без особого труда устанавливается справедливость следующих двух теорем.

Теорема 1. *Пусть по крайней мере одно из чисел* $\overline{a}^r_{00}$ *и* $\widehat{a}^r_{00}$ *меньше от* a^r_{00}. *Если прямая (в плоскости* $x_t o x_0$)

$$ax_t + bx_0 + c = 0$$

проходит через точки $A([a^r_{t0}], \overline{a}^r_{00})$ *и* $B(\langle a^r_{t0}\rangle, \widehat{a}^r_{00})$ *и выполняется неравенство*

$$aa^r_{t0} + ba^r_{00} + c < 0,$$

то ограничение

$$x_{n+r+1} = (aa^r_{t0} + ba^r_{00} + c) + \sum_{j \in N_r} (aa^r_{tj} + ba^r_{0j})(-x_j), \tag{10}$$

$$x_{n+r+1} \geqslant 0,$$

является правильным отсечением.

Теорема 2. *Пусть* $\overline{a}^r_{00} = \widehat{a}^r_{00} = a^r_{00}$. *Если прямая (в плоскости* $x_t\, o\, x_{-1}$)

$$a'x_t + b'x_{-1} + c' < 0,$$

проходящая через точки $A'([a^r_{t0}], \overline{a}^r_{-1,0})$ *и* $B'(\langle a^r_{t0}\rangle, \widehat{\alpha}^r_{-1,0})$, *такая, что выполняется неравенство*

$$a'a^r_{t0} + b'a^r_{-1,0} + c' < 0,$$

то ограничение

$$x_{n+r+1} = (a'a^r_{t0} + b'a^r_{-1,0} + c') + \sum_{j \in N_r} (a'a^r_{tj} + b'a^r_{-1,j} + \lambda a^r_{0j})(-x_j), \tag{11}$$

$$x_{n+r+1} \geqslant 0$$

является правильным отсечением при любом значении параметра λ, *удовлетворяющем системе неравенств*

$$a'\overline{a}^r_{tj} + b'a^r_{-1,j} + \lambda\overline{a}^r_{0j} \leqslant 0, \qquad j \in \overline{N}_r,$$

$$a'\widehat{a}^r_{tj} + b'\widehat{a}^r_{-1,j} + \lambda\widehat{a}^r_{0j} \leqslant 0, \qquad j \in \widehat{N}_r.$$

Кроме того, используя очевидные соотношения

$$\overline{a}^r_{-1,0} \leqslant [a^r_{t0}] \text{ и } \langle a^r_{t0}\rangle - a^r_{t0} \leqslant a^r_{t0} - \widehat{a}^r_{-1,0},$$

легко доказывается такая теорема.

Теорема 3. *Пусть симплексная таблица T_r (соответствующая (5)) в результате выполнения одной итерации двойственного симплекс-алгоритма с ведущим элементом из присоединенной строки x_{n+r+1} (11) преобразована в таблицу T_r'. Тогда*

$$(a_{t0}^r)' \leqslant [a_{t0}^r], \text{ если } a_{tl}^r > 0; \qquad (a_{t0}^r)' \geqslant \langle a_{t0}^r \rangle, \text{ если } a_{tl}^r < 0.$$

Теорема 4. *Пусть выполнено по крайней мере одно из двух условий:*

1) *целевая функция x_0 ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи* (1) — (3);

2) *задача* (1) — (4) *имеет по крайней мере одно решение. Тогда описанный алгоритм, используя лексикографический симплекс-метод, заканчивается на конечном числе шагов.*

Доказательство основывается на лексикографическом убывании векторов $\widetilde{X}_r$.

Пусть убывающая последовательность векторов

$$\widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r, \ldots.$$

бесконечна. Тогда найдется такое число i_0 $(0 \leqslant i_0 \leqslant n_1)$, что, начиная с некоторого номера $r_0 (r_0 \geqslant 0)$, значения первых i_0 компонент векторов бесконечной последовательности

$$\widetilde{X}_{r_0}, \widetilde{X}_{r_0+1}, \ldots$$

не изменяются и дискретно определены, а значения их i_0-й компоненты (этих значений бесконечно много) принадлежат интервалу $([a_{i_\bullet,0}^{r_0}], \langle a_{i_\bullet,0}^{r_0} \rangle)$ (или больше $x_{i_\bullet, q_{i_0}}$).

Принятое допущение приводит к противоречию, так как, пользуясь описанным алгоритмом, переменной x_{i_0} можно придать значение $[a_{i_0,0}^{r_0}]$ в текущем решении не более чем за два шага. Если используется правильное отсечение (10) и в итоге одного шага x_{i_0} не приняла значение $[a_{i_0,0}^{r_0}]$*, то, выбрав эту же переменную для построения правильного отсечения и на (r_0+2)-м шаге, используем правильное отсечение (11). Следовательно, на основании теоремы 3 в промежуточном решении $\widetilde{X}_{r_0+2}$ значение переменной $x_{i_\bullet}$ равно $[a_{i_\bullet,0}^{r_0}]$. Во всех остальных ситуациях $x_{i_\bullet}$ принимает значение $[a_{i_0,0}^{r_0}]$ в итоге одного шага алгоритма. Теорема доказана.

Уравнение прямой $ax_t + bx_0 + c = 0$ (теорема 1) имеет вид

$$\mu x_t - x_0 + (\overline{a}_{00}^r - \mu [a_{t0}^r]) = 0,$$

если $\overline{a}_{00}^r \geqslant \hat{a}_{00}^r$, и —

$$\mu x_t - x_0 + (\hat{a}_{00}^r - \mu \langle a_{t0}^r \rangle) = 0,$$

если $\overline{a}_{00}^r \leqslant \hat{a}_{00}^r$. Здесь

$$\mu = \frac{\hat{a}_{00}^r - \overline{a}_{00}^r}{\langle a_{t0}^r \rangle - [a_{t0}^r]}.$$

---

*Это может произойти, если $\overline{a}_{00}^{r_0} = \hat{a}_{00}^{r_0} \neq a_{00}^{r_0}$.

Уравнение прямой $a'x_t + b'x_{-1} + c' = 0$ (теорема 2) имеет вид

$$\mu' x_t - x_{-1} + (\overleftarrow{a}^r_{-1,0} - \mu' \cdot [a^r_{t0}]) = 0,$$

если $\overleftarrow{a}^r_{-1,0} \geqslant \hat{a}^r_{-1,0}$, и —

$$\mu' x_t - x_{-1} + (\hat{a}^r_{-1,0} - \mu' \langle a^r_{t0} \rangle) = 0,$$

если $\overleftarrow{a}^r_{-1,0} \leqslant \hat{a}^r_{-1,0}$. Здесь $a^r_{-1,0} > \overleftarrow{a}^r_{-1,0}$, $a^r_{-1,0} > \hat{a}^r_{-1,0}$;

$$\mu' = \frac{\hat{a}^r_{-1,0} - \overleftarrow{a}^r_{-1,0}}{\langle a^r_{t0} \rangle - [a^r_{t0}]}.$$

При этом следует отметить, что если $a^r_{tj} \geqslant 0$ для всех j $(j \in N_r)$, то вторая вспомогательная задача неразрешима, и, наоборот, если $a^r_{tj} \leqslant 0$ для всех j $(j \in N_r)$, то первая вспомогательная задача неразрешима. Таким образом, в этих случаях правильными отсечениями будут отсечения (7) и (8) соответственно.

Известно, что если для построения правильного отсечения выбрана строка симплексной таблицы, соответствующая базисной переменной x_t, то отсечение Дальтона и Ллевелина отсекает от множества допустимых решений соответствующей задачи линейного программирования такую часть, которая не содержит решения, удовлетворяющего условию дискретности по переменной x_t. В этом смысле предлагаемый способ дает наилучшее правильное отсечение (в общем более сильное, чем отсечение Дальтона и Ллевелина).

В предлагаемом алгоритме правильное отсечение в большинстве случаев строится из решения двух задач линейного программирования, что требует более значительных затрат на построение, чем при других известных способах. Однако в ряде случаев решения дискретных задач по этому алгоритму число шагов настолько сокращается, что общее количество выполненных симплексных итераций значительно меньше общего количества симплексных итераций, выполненных по алгоритму Дальтона и Ллевелина. Последнее явление в основном наблюдалось при увеличении числа m ограничений (2) и заполненности матрицы $\| a_{ij} \|$. Улучшение эффективности этого алгоритма наблюдалось также в некоторых случаях при увеличении расстояний между соседними элементами множества D_j. (Эксперименты проводились на ЭВМ «Минск-14».)

С помощью этого алгоритма можно решать также и целочисленные задачи линейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Dalton, R. W. Llewellyn, An extension of the Gomory mixed-integer algorithm to mixed-discrete variables, Manag. Sci., **12**, N 7, 1966.
2. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, «Наука», М., 1969.

Поступила 28.IX 1970 г.,
после переработки — 12.II 1971 г.
Ужгородский государственный университет