УДК 517.946.4

О применении модификации метода Ньютона для решения одного квазилинейного уравнения

В. Е. Шаманский, Г. В. Гринькова

Пусть дана некоторая двумерная область Ω с границей Γ. Рассмотрим смешанную краевую задачу для дифференциального уравнения

$$Pu = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(T^2(u)\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(T^2(u)\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + f(x, y, u) = 0 \qquad (1)$$

с однородными краевыми условиями

$$\begin{gathered} u = 0, \text{ если } (x, y) \in \Gamma', \\ \mu\left(T^2(u)\right)\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha u = 0, \text{ если } (x, y) \in \Gamma'', \end{gathered} \qquad (2)$$

где $T^2(u) = \|\operatorname{grad} u\|^2$, $\Gamma' + \Gamma'' = \Gamma$, $\alpha \geqslant 0$. Предположим, что $\mu(T^2(u))$ и $f(x, y, u)$ определены, непрерывны и достаточно гладкие функции в области $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$. Кроме того, для всех $(x, y) \in \overline{\Omega}$ и любых u и $p_j = \partial u/\partial x_j$ $(j = 1, 2,$ $x_1 = x,$ $x_2 = y)$ выполняются неравенства:

$$\mu\left(T^2(u)\right) \geqslant C_1, \qquad (3)$$

$$C_2 \leqslant \mu(T^2) + 2\mu'(T^2)\,T^2 \leqslant C_3, \qquad (4)$$

$$0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial u} \leqslant C_4, \qquad (5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — положительные постоянные.

Для решения краевой задачи (1), (2) применим метод сеток. Систему конечноразностных уравнений получим вариационным методом. Покажем, что матрица Якоби разностной системы уравнений будет при этом симметричной и положительно определенной.

Покроем область Ω квадратной сеткой с шагом h, образованной из прямых, параллельных осям координат. Точки пересечения этих прямых назовем узлами сетки. Из сторон и диагоналей квадратов составим замкнутую ломаную линию, приближащую в некотором смысле границу Γ области Ω. Совокупность узлов сетки, которые лажат внутри области, ограниченной ломаной линией, назовем сеточной областью Ω_h. Границей Γ_h области Ω_h назовем совокупность узлов сетки, лежащих на ломаной линии. Занумеруем узлы области $\overline{\Omega}_h = \Omega_h + \Gamma_h$ обычным образом и обозначим через (x_i, y_j) или (i, j) узел, принадлежащий i-му столбцу и j-й строке. Из точек $(i, j) \in \Gamma_h$ образуем четыре класса точек [1]:

$$\begin{aligned} &(i, j) \in \Gamma_h^1, \text{ если } (i-1, j) \in \Omega_h, \qquad &(i, j) \in \Gamma_h^2, \text{ если } (i, j-1) \in \Omega_h, \\ &(i, j) \in \Gamma_h^3, \text{ если } (i+1, j) \in \Omega_h, \qquad &(i, j) \in \Gamma_h^4, \text{ если } (i, j+1) \in \Omega_h. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \Omega_h^+ = \Omega_h + \Gamma_h^1 + \Gamma_h^2, \quad \Omega_h^- = \Omega_h + \Gamma_h^3 + \Gamma_h^4, \quad \Omega_h^k = \Omega_h + \Gamma_h^k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \\ (u_h, v_h) = h^2 \sum_{(i, j) \in \overline{\Omega}_h} u_{hi,j}\, v_{hi,j}, \quad \|u_h\|_1 = (u_h, u_h)^{1/2}, \end{gathered} \qquad (6)$$

где u_h, v_h — сеточные функции, заданные на $\overline{\Omega}_h$.

Запишем неравенство Фридрихса в разностном виде

$$h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} [(\nabla_x u_{hi,j})^2 + (\nabla_y u_{hi,j})^2] \geqslant \frac{h^2}{a^2} \sum_{(i,j)\in\overline{\Omega}_h} u_{hi,j}^2, \tag{7}$$

где $\nabla_x u_{hi,j} = \dfrac{u_{hi+1j} - u_{hi,j}}{h}$, $\nabla_y u_{hi,j} = \dfrac{u_{hij+1} - u_{hi,j}}{h}$, a — длина стороны квадрата, содержащего в себе область $\overline{\Omega}_h$, а u_h удовлетворяет граничным условиям в разностном виде. Форму разностных граничных условий получим из условия минимума (9).

Решение задачи (1), (2) эквивалентно задаче нахождения минимума функционала

$$F(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \int\limits_0^{T^2(u)} \mu(\xi)\, d\xi \right] dxdy + \iint\limits_{\Omega} \left[\int\limits_0^u f(x, y, \xi)\, d\xi \right] dxdy + \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \alpha(s)\, u^2 ds \tag{8}$$

при дополнительном условии $u\,|\,\Gamma' = 0$. Решение задачи Дирихле для уравнения (1) равносильно отысканию минимума (8) при $\alpha = 0$ [2, 3]. Точную вариационную задачу для (8) заменим задачей на отыскание минимума функционала $F_h(u_h)$ в конечномерном пространстве

$$F_h(u_h) = \frac{h^2}{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} \varphi(T^2(u_{hi,j})) + h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h} \eta_{ij} + \frac{h}{2} \sum_{(i,j)\in\Gamma_h} \alpha_{i,j} u_{hi,j}^2, \tag{9}$$

где

$$\varphi(T^2(u_{hi,j})) = \int\limits_0^{T^2(u_{hi,j})} \mu(\xi)\, d\xi, \qquad \eta_{i,j} = \int\limits_0^{u_{hi,j}} f(x, y, \xi)\, d\xi,$$

$$T^2(u_{hi,j}) = (\nabla_x u_{hi,j})^2 + (\nabla_y u_{hi,j})^2, \qquad u_{hi,j} = u_h(x_i, y_j), \qquad \alpha_{ij} \geqslant 0,$$

при дополнительном условии $u_{hi,j}\,|\,\Gamma_h' = 0$. Систему конечноразностных уравнений получим, реализовав условие минимума функционала (9):

$$\begin{gathered} \Lambda u_{hi,j} = -\mu_{i-1,j} u_{hi-1,j} + (\mu_{i,j-1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j})\, u_{hi,j} - \\ -\mu_{i,j} u_{hi+1,j} - \mu_{i,j-1} u_{hi,j-1} - \mu_{ij}\, u_{hi,j+1} + f_{i,j} h^2 = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \dots, N_j - 1,\ j = 1, 2, 3, \dots, m - 1), \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\mu_{i,j} = \mu((\nabla_x u_{hi,j})^2 + (\nabla_y u_{hi,j})^2), \qquad f_{i,j} = f(x_i, y_j, u_{hi,j}).$$

Дифференцируя (9) по $u_{hi,j}$, $(i,j) \in \Gamma_h''$. получим граничные условия в зависимости от участка границы. Например, если $(i, j) \in \Gamma_h^3$, то

$$\mu(T^2(u_{hi,j}))\, u_{hi+1,j} - (\mu(T^2(u_{hi,j})) + \alpha_{i,j} h)\, u_{hi,j} = 0. \tag{11}$$

Пусть решение задачи (1), (2) имеет ограниченные производные до третьего порядка включительно. Тогда из разложения функций μ и u в узлах сетки по формуле Тейлора получим следующую погрешность аппроксимации при замене дифференциального оператора разностным:

$$|(Pu_h)_{i,j} - \Lambda u_{hi,j}| \leqslant M_1 h,$$

где M_1 — константа, независящая от h. Очевидно, что погрешность аппроксимации граничных условий также порядка $0\,(h)$.

Запишем систему (10), (11) в виде

$$g(u_h) = d, \tag{12}$$

где $g(u_h)$ — вектор-функция размерности $N = \sum_{j=0}^{m} (N_j + 1)$, d — известный вектор. Докажем, что для любых двух сеточных функций u_h и v_h, заданных на Ω_h, $g(u_h)$ удовлетворяет неравенствам

$$\| g(u_h) - g(v_h) \| \leqslant K \| u_h - v_h \|_1, \tag{13}$$

$$(g(u_h) - g(v_h),\ (u_h - v_h)) \geqslant C \| u_h - v_h \|_1^2, \tag{14}$$

где норма эвклидова, а K и C — положительные константы. При выполнении неравенств (13), (14) решение (12) существует и единственно. При сделанных ограничениях на функции u, μ и f матрица Якоби $\Gamma_g(u_h)$ вектор-функции $g(u_h)$, как квадратная матрица порядка $N = \sum_{j=0}^{m} (N_j + 1)$, для любого $h > 0$ ограничена по норме, откуда и следует (13).

Для доказательства неравенства (14) достаточно показать, что $\Gamma_g(u_h)$ положительно определена. Докажем выполнение неравенства $(\Gamma_g(u_h) z, z) \geqslant$ $\geqslant C \| z \|_1^2$ для любого вектора $z = \{z_{i,j}\}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, N_j \quad j = 0, 1, 2, \dots, m)$, удовлетворяющего рассматриваемым разностным граничным условиям. Вычисляя скалярное произведение $(\Gamma_g(u_h) z, z)$, получим

$$(\Gamma_g(u_h) z, z) = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} \{\mu_{i,j} ((\nabla_x z_{i,j})^2 + (\nabla_y z_{i,j})^2) +$$

$$+ 2\mu'_{i,j} (\nabla_x u_{hi,j} \nabla_x z_{i,j} + \nabla_y u_{hi,j} \nabla_y z_{i,j})^2\} + h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h} f'_{ij} z_{ij}^2 + h \sum_{(i,j)\in\Gamma_h} \alpha_{i,j} z_{i,j}^2. \tag{15}$$

Функцию $\mu'(T^2(u_{hi,j}))$ представим в виде разности положительной и отрицательной частей

$$\mu'(T^2(u_{hi,j})) = \mu'_1(T^2(u_{hi,j})) - \mu'_2(T^2(u_{hi,j})),$$

$$\mu'_2(T^2(u_{hi,j})) = \begin{cases} \mu'_{i,j}, & \text{если } \mu'_{i,j} \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \mu'_{i,j} < 0, \end{cases} \qquad \mu'_2(T^2(u_{hi,j})) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu'_{i,j} \geqslant 0, \\ -\mu'_{i,j}, & \text{если } \mu'_{i,j} < 0. \end{cases}$$

Далее, по неравенству Коши — Буняковского

$$(\nabla_x u_{hi,j} \nabla_x z_{i,j} + \nabla_y u_{hi,j} \nabla_y z_{hi,j})^2 \leqslant ((\nabla_x u_{hi,j})^2 + (\nabla_y u_{hi,j})^2)((\nabla_x z_{i,j})^2 + (\nabla_y z_{ij})^2),$$

и из (15) имеем

$$(\Gamma_g(u_h) z, z) \geqslant h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} [\mu(T^2(u_{hi,j})) - 2\mu'_2(T^2(u_{hi,j}))\, T^2(u_{hi,j})]\, T^2(z_{i,j}) +$$

$$+ h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h} f'_{i,j} z_{i,j}^2 + h \sum_{(i,j)\in\Gamma_h} \alpha_{i,j} z_{i,j}^2, \qquad \alpha_{i,j} \geqslant 0, \tag{16}$$

где $T^2(z_{i,j}) = (\nabla_x z_{i,j})^2 + (\nabla_y z_{i,j})^2$.

Если $\mu'(T^2(u_{hi,j})) \geqslant 0$, то $\mu'_2(T^2(u_{hi,j})) = 0$ и

$$\mu(T^2(u_{hi,j})) - 2\mu'_2(T^2(u_{hi,j}))\, T^2(u_{hi,j})) = \mu(T^2(u_{hi,j})) \geqslant C_1 > 0,$$

если же $\mu'(T^2(u_{hi,j})) < 0$, то $\mu_2'(T^2(u_{hi,j})) = -\mu'(T^2(u_{hi,j}))$ и

$$\mu(T^2(u_{hi,j})) - 2\mu_2'(T^2(u_{hi,j}))T^2(u_{hi,j}) =$$
$$= \mu(T^2(u_{hi,j})) + 2\mu'(T^2(u_{hi,j}))T^2(u_{hi,j}) \geqslant C_2 > 0.$$

В обоих случаях

$$\mu(T^2(u_{hi,j})) - 2\mu_2'(T^2(u_{hi,j}))T^2(u_{hi,j}) \geqslant \varkappa = \min(C_1, C_2),$$

и формула (16) дает:

$$(\Gamma_g z, z) \geqslant \varkappa h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^{--}} [(\nabla_x z_{ij})^2 + (\nabla_y z_{i,j})^2] +$$
$$+ h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h} f'_{i,j} z^2_{i,j} + h \sum_{(i,j)\in\Gamma_h} \alpha_{i,j} z^2_{i,j}, \qquad \alpha_{ij} \geqslant 0. \tag{17}$$

Применяя к правой части (17) неравенство (7), получим

$$(\Gamma_g(u_h)z, z) \geqslant \frac{\varkappa}{a^2} h^2 \sum_{(i,j)\in\overline{\Omega}_h} z^2_{i,j} + h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h} f'_{ij} z^2_{i,j} + h \sum_{(i,j)\in\Gamma''_h} \alpha_{i,j} z^2_{ij}.$$

Таким образом,

$$(\Gamma_g(u_h)z, z) \geqslant C\|z\|_1^2, \qquad C = \frac{\varkappa}{a^2}, \tag{18}$$

и неравенство (14) выполняется. Действительно,

$$(g(u_h) - g(v_h),\ u_h - v_h) = \left(\int_0^1 \Gamma_g(v_h + \tau(u_h - v_h))\,d\tau\,(u_h - v_h),\ (u_h - v_h)\right) =$$
$$= \int_0^1 (\Gamma_g(v_h + \tau(u_h - v_h))(u_h - v_h),\ (u_h - v_h))\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant C\int_0^1 \|u_h - v_h\|_1^2\,d\tau = C\|u_h - v_h\|_1^2.$$

К системе (12) применим следующую модификацию метода Ньютона:

$$\begin{aligned} &\text{I)}\quad \Gamma_g(u_h^{(k)})z_k = g(u_h^{(k)}) - d,\\ &\text{II)}\quad u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} - \alpha_k z_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{19}$$

где α_k выбирается так:

а) если $\|g(u_h^{(k)} - z_k) - d\| < \|g(u_h^{(k)}) - d\|$, то $\alpha_k = 1$;

б) если $\|g(u_h^{(k)} - z_k) - d\| \geqslant \|g(u_h^{(k)}) - d\|$, то α_k выбирается из условия $\|g(u_h^{(k)} - \alpha_k z_k) - d\| = \min\limits_{\alpha_k}$, $\alpha_k \in [0, 1]$.

Докажем теорему о сходимости итерационного процесса (19).

Теорема. *Если выполнены условия* (3) — (5) *для уравнения* (1), *то для любого $h > 0$ и любого начального приближения $u_h^{(0)}$, удовлетворяющего рассматриваемым разностным граничным условиям,*

$$\|u_h^{(k)} - u_h^*\| \to 0 \ \text{при}\ k \to \infty,$$

где u_h^* — единственное решение системы (12).

Доказательство. Так как матрица $\Gamma_g(u_h^{(k)})$ удовлетворяет условию (18), то обратная матрица существует и ограничена, следовательно, линейная система (19), I) имеет единственное решение z_k при любом фиксированном $u_h^{(k)}$. Тогда процесс (19) при условиях а) и б) представляет собой спуск с минимизацией нормы невязки. Действительно,

$$\operatorname{grad}(r_k, r_k) = 2\Gamma_g^*(u_h^{(k)})\, r_k = 2\Gamma_g(u_h^{(k)})\, r_k \text{ и}$$

$$(z_k, \Gamma_g^*(u_h^{(k)})\, r_k) = (\Gamma_g(u_h^{(k)})\, z_k, r_k) = (r_k, r_k) \geqslant 0,$$

причем равенство нулю будет только в том случае, когда $r_k = 0$. Из $\| r_k \| \geqslant \| r_{k+1} \|$ следует, что $\| r_k \| \to 0$ при $k \to \infty$. Учитывая, что

$$\| g(u_h^{(k)}) - d \| = \| g(u_h^{(k)}) - g(u_h^{(*)}) \| =$$

$$= \left\| \int_0^1 \Gamma_g(u_h^* + \tau(u_h^{(k)} - u_h^*))\, d\tau\, (u_h^k - u_h^*) \right\| \geqslant$$

$$\geqslant C \int_0^1 \| u_h^{(k)} - u_h^* \|\, d\tau = C \| u_h^{(k)} - u_h^* \|$$

имеем $\| u_h^{(k)} - u_h^* \| \to 0$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Сапаговас, Метод конечных разностей для решения квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 5, № 4, 1965.
2. А. И. Лагенбах, О некоторых нелинейных операторах теории упругости в гильбертовом пространстве, Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., вып. 1, 1961.
3. С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, «Наука», М., 1966.
4. O. F. Moncino, Resolution ty Iteration on Some nonlinear System, J. Assos. Comp. Mach., **14**, № 2, 1967.
5. В. К. Исаев, В. В. Сонин, Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 3, № 6, 1963.
6. Е. А. Матвеев, Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 4, № 6, 1964.

Поступила 30.VI 1969 г.

Институт математики АН УССР