УДК 519.42:519.46

Сопряженные функции относительно постоянного $\bar{\varepsilon}$ и спиноры

М. С. Шнеерсон, Т. М. Лопатина

Объектом рассмотрения в данной статье является множество N решений вида

$$p + a\tilde{\varepsilon}\,(\tilde{a} = \tilde{i}a_x + \tilde{j}a_y + \tilde{k}a_z;\quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \neq 0)$$

уравнения Мойсила — Фютера [1, 2]

$$D(p + \tilde{i}a_x + \tilde{j}a_y + \tilde{k}a_z) = 0, \tag{1}$$

где $D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{i}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{j}\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{k}\frac{\partial}{\partial z}$, $\tilde{i}$, $\tilde{j}$, $\tilde{k}$ — кватернионные единицы; p,

a_x, a_y, a_z — достаточно гладкие комплекснозначные функции от x, y, z, t; $\tilde{\varepsilon} = \tilde{i}\varepsilon_x + \tilde{j}\varepsilon_y + \tilde{k}\varepsilon_z$, $\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 = 1$; ε_x, ε_y, ε_z — комплексные постоянные, которые могут быть различными для различных элементов множества N.

Общий вид любого элемента множества N был найден М.С. Шнеерсоном в работе [3]. На множестве N рассматриваются операторы $\lambda_{\vec{u}_\beta}$, любой из которых преобразует множество N в себя и которые задают представление группы U комплексных унимодулярных матриц второго порядка в том смысле, что:

1) каждому элементу u_β группы U соответствует оператор $\lambda_{\vec{u}_\beta}$;

2) произведению $u_\gamma u_\beta = u_{\gamma\beta}$ соответствует произведение $\lambda_{\vec{u}_\gamma}\lambda_{\vec{u}_\beta} = \lambda_{\vec{u}_{\gamma\beta}}$;

3) единице E группы U соответствует тождественное преобразование $\lambda_{\vec{E}}$.

Определим операторы T_{u_β}, $T_{u'_\beta}$ следующими равенствами:

$$T_{u_\beta} f_1(x_1 + ix_2, x_4 + ix_3) = f_1(y_1 + iy_2, y_4 + iy_3),$$
$$T_{u'_\beta} f_2(x_1 - ix_2, x_4 - ix_3) = f_2(y_1 - iy_2, y_4 - iy_3),$$

где x_i — действительные независимые переменные, $x_1 = t$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$; y_i (y_i могут быть комплексными) определяются через x_i равенствами вида

$$\begin{pmatrix} y_1 + iy_2 \\ y_3 + iy_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 - i\beta_1 & \beta_2 - i\beta_3 \\ -\beta_2 - i\beta_3 & \beta_0 + i\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 - iy_2 \\ y_3 - iy_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + i\beta_1 & \beta_2 + i\beta_3 \\ -\beta_2 + i\beta_3 & \beta_0 - i\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 \\ x_3 - ix_4 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

β_i, $i = 0, 1, 2, 3$, — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{i=0}^{3} \beta_i^2 = 1$ (здесь и во всем дальнейшем f_1, f_2 — произвольные комплексные аналитические функции своих аргументов).

Очевидно, что матрицы унимодулярных преобразований (2), (3), которые обозначим соответственно через u_β и u'_β, связаны зависимостью $u'_\beta = (\overset{*}{u}_\beta)^{-1}$, где $*$ — знак транспонирования.

Пусть $N_{\tilde{\varepsilon}}$ — подмножество множества N при заданном $\tilde{\varepsilon}$. Из работы [3] легко видеть, что любая упорядоченная пара (p, a), входящая в выражение $p + a\tilde{\varepsilon} \in N_{\tilde{\varepsilon}}$, может быть записана в следующем бикомплексном виде*:

$$p + aj = T_{\vec{u}_\beta} f(x_1 + jx_2, x_4 + jx_3) \equiv T_{u_\beta} f_1(x_1 + ix_2, x_4 + ix_3)\frac{1 - ij}{2} + \\ + T_{u'_\beta} f_2(x_1 - ix_2, x_4 - ix_3)\frac{1 + ij}{2}, \tag{4}$$

где j ($j^2 = -1$) — новая мнимая единица, отличная от i,

$$f(x_1 + jx_2, x_4 + jx_3) \equiv f_1(x_1 + ix_2, x_4 + ix_3)\frac{1 - ij}{2} + f_2(x_1 - \\ - ix_2, x_4 - ix_3)\frac{1 + ij}{2},$$

* Такая упорядоченная пара (p, a) называется парой сопряженных функций относительно вектора $\bar{\varepsilon} = \bar{i}\varepsilon_1 + \bar{j}\varepsilon_2 + \bar{k}\varepsilon_3$, соответствующего кватерниону $\tilde{\varepsilon} = \tilde{i}\varepsilon_1 + \tilde{j}\varepsilon_2 + \tilde{k}\varepsilon_3$ [4].

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\beta}\tilde{i}\tilde{\beta}^{-1}, \tag{5}$$

$(\tilde{\varepsilon} = \tilde{i}\varepsilon_1 + \tilde{j}\varepsilon_2 + \tilde{k}\varepsilon_3$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_x,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_y,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_z)$,

$$\tilde{\beta} = \beta_0 + \tilde{i}\beta_1 + \tilde{j}\beta_2 + \tilde{k}\beta_3. \tag{6}^*$$

Нетрудно видеть, что

$$T_{u_\alpha} T_{u_\gamma} = T_{u_{\alpha\gamma}}, \qquad T_{\vec{u}_\alpha} T_{\vec{u}_\gamma} = T_{\vec{u}_{\alpha\gamma}};$$

для любых кватернионов

$$\tilde{\alpha} = \alpha_0 + \tilde{i}\alpha_1 + \tilde{j}\alpha_2 + \tilde{k}\alpha_3, \qquad \tilde{\gamma} = \gamma_0 + \tilde{i}\gamma_1 + \tilde{j}\gamma_2 + \tilde{k}\gamma_3,$$

где $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=0}^{3} \gamma_i^2 = 1.$

Для всякого кватерниона вида $\tilde{\delta} = \tilde{i}\delta_1 + \tilde{j}\delta_2 + \tilde{k}\delta_3$, где $\tilde{\delta}^2 = -1$, рассмотрим оператор

$$\lambda_{\vec{u}_\beta} f(x_1 + \tilde{\delta}x_2, x_4 + \tilde{\delta}x_3) \equiv T_{u_\beta} f_1(x_1 + ix_2, x_4 + ix_3)\,\frac{1 - i\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\beta}^{-1}}{2} +$$

$$+ T_{u'_\beta} f_2(x_1 - ix_2, x_4 - ix_3)\,\frac{1 + i\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\beta}^{-1}}{2}. \tag{7}$$

Отсюда в силу (4), (5) получим

$$\lambda_{\vec{u}_\beta} f(x_1 + \tilde{i}x_2, x_4 + \tilde{i}x_3) = T_{u_\beta} f_1(x_1 + ix_2, x_4 + ix_3)\,\frac{1 - i\tilde{\varepsilon}}{2} +$$

$$+ T_{u'_\beta} f_2(x_1 - ix_2, x_4 - ix_3)\,\frac{1 + i\tilde{\varepsilon}}{2} = p + a\tilde{\varepsilon}.$$

Очевидно, что $\lambda_{\vec{u}_\alpha}\lambda_{\vec{u}_\gamma} = \lambda_{\vec{u}_{\alpha\gamma}}$ для любых двух кватернионов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\gamma}$, где

$$\tilde{\alpha} = \alpha_0 + \tilde{i}\alpha_1 + \tilde{j}\alpha_2 + \tilde{k}\alpha_3, \qquad \tilde{\gamma} = \gamma_0 + \tilde{i}\gamma_1 + \tilde{j}\gamma_2 + \tilde{k}\gamma_3,$$

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=0}^{3} \gamma_i^2 = 1.$$

Пусть $p + a\tilde{\varepsilon} \in N$. Тогда очевидно, что $D\lambda_{\vec{u}_\gamma}(p + a\tilde{\varepsilon}) = 0$, т. е. оператор $\lambda_{\vec{u}_\gamma}$ преобразует множество N в себя.

Можно показать, что условие $\gamma_i = k\varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$, где k — комплексная постоянная, есть необходимое и достаточное условие того, что

$$\lambda_{\vec{u}_\gamma}(p + a\tilde{\varepsilon}) = p_1 + a_1\tilde{\varepsilon}, \tag{8}$$

т. е. $\tilde{\varepsilon}$ сохраняется, а меняются, вообще говоря, p и a.

Нетрудно видеть, что множество операторов $\lambda_{\vec{u}_\gamma}$, удовлетворяющих условиям (8), также образует группу.

---

* В работе [3] равенства (5), (6) рассматривались в матричной записи.

Если обозначить $x_1 = it$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$, то множество N образует подкласс решений уравнения Вейля [5 — 7] $D'\widetilde{\psi} = 0$, где $D' \equiv \frac{\partial}{\partial(it)} + \widetilde{i}\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{j}\frac{\partial}{\partial y} + \widetilde{k}\frac{\partial}{\partial z}$, $\widetilde{\psi} = \psi_1 + \widetilde{i}\psi_2 + \widetilde{j}\psi_3 + \widetilde{k}\psi_4$, ψ_i, $i = 1,2,3,4$, —комплекснозначные функции от x, y, z, t.

Этот подкласс инвариантен относительно оператора $\lambda_{\vec{u}_\gamma}$. Ввиду того, что $\widetilde{\varepsilon}$ — постоянный кватернион, уравнение $D'(p + a\widetilde{\varepsilon}) = 0$ эквивалентно системе

$$D'\left[(p + ai)\frac{1 - i\widetilde{\varepsilon}}{2}\right] = 0, \qquad D'\left[(p - ai)\frac{1 + i\widetilde{\varepsilon}}{2}\right] = 0, \tag{9}$$

где $(p + ai)\frac{1 - i\widetilde{\varepsilon}}{2} = \widetilde{\psi}_1$, $\quad (p - ai)\frac{1 + i\varepsilon}{2} = \widetilde{\psi}_2$.

Как известно [8], уравнением нейтрино называется уравнение

$$D'\widetilde{\psi} = 0$$

где $\widetilde{\psi}$ — спинор по отношению к некоторому идемпотенту.

Таким образом, $\widetilde{\psi}_1(\widetilde{\psi}_2)$ можно трактовать как спинор по отношению к идемпотенту $\frac{1 - i\widetilde{\varepsilon}}{2}\left(\frac{1 + i\widetilde{\varepsilon}}{2}\right)$, причем этот спинор является решением уравнения нейтрино.

Итак, основной результат: найдена такая группа преобразований $\{\lambda_{\vec{u}_\beta}\}$, каждый элемент которой переводит любую пару сопряженных функций относительно постоянного $\bar{\varepsilon}$ в другую пару, сопряженную относительно этого же или другого постоянного $\bar{\varepsilon}$.

Найдена также подгруппа этих преобразований, которая преобразует множество всех сопряженных пар относительно данного постоянного $\bar{\varepsilon}$ в себя.

Вместе с тем, при этих преобразованиях спинор относительно одного идемпотента переходит в спинор относительно этого же или другого идемпотента.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. C. Moisil, Sur les quaternions monogènes, Bull. Sc. math., **55**, 1931.
2. R. Fueter, Theorie der regularen Function einer Quaternionen Variablen C. R. Congr int. math., Oslo, **1**, 1937, s. 75—91.
3. М. С. Шнеерсон, Об одном классе решений системы дифференциальных уравнений Мойсила и Дирака, Матем. сб., т. 55 (97): 4, 1961.
4. М. С. Шнеерсон, О моногенных функциях Мойсила, Матем, сб. т. 44, 1958.
5. H. Weyl, Dutton and company, inc. New York, 1931, p. 213.
6. C. Lanczos, Z. für physik, **57**, 447, 1929.
7. Д. Иваненко. К. Никольский, Uber der zusammenhang zvischen der Conchy Riemanschen und Dirakschen differentialgleichungen, zeitschr. für Physsik, **63**, 1930, 129.
8. P. Rastall, Rev of mod. Phys., v. 36, N 3, 1964, p. 830.

Поступила 9.VI 1969 г.

Ивановский энергетический институт