УДК 517.948.32:517.544

Краевая задача Сохоцкого на замкнутой римановой поверхности в пространствах обобщенных функций и дифференциалов

С. А. Яценко

Пусть $\mathfrak{R}$— замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $h \geqslant 0$ [1].

Рассмотрим на поверхности $\mathfrak{R}$ контур Γ, состоящий из одной произвольной (разбивающей или не разбивающей) бесконечно гладкой при переходе к локальным координатам замкнутой кривой. Контуру приписываем произвольную ориентацию. В случае разбивающей кривой будем обозначать через D^+ и D^- соответственно те связные компоненты, которые остаются слева и справа от кривой.

Введем в рассмотрение на контуре два основных пространства. С этой целью проведем на поверхности $\mathfrak{R}$ достаточно узкую полосу, содержащую внутри себя контур $\mathbf{\Gamma}$. Тогда по теореме Римана [2] существует функция, которая взаимно однозначно и конформно отображает эту полосу на двусвязную плоскую область.

Пусть $\widetilde{\Gamma}$ — образ контура Γ при этом отображении. Обозначим через $S_{(g)} = \{g(t)\}$ и $S_{(dh)} = \{dh(t)\}$, $t \in \Gamma$, соответственно пространства бесконечно дифференцируемых [1] функций и дифференциалов (основные пространства).

В пространствах $S_{(g)}$ и $S_{(dh)}$ введем топологию с помощью счетного числа норм

$$\|g\| = \max_{z \in \widetilde{\Gamma}} |g^{(p)}(z)| \ (p = 0, 1, 2, \ldots), \ \|dh\| = \max_{z \in \widetilde{\Gamma}} |h^{(p)}(z)| \ (p = 1, 2, \ldots).$$

Определение 1. Каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основных пространствах $S_{(dh)}$ и $S_{(g)}$, отождествим соответственно с обобщенной функцией f и обобщенным дифференциалом $d\varphi$

$$f : dh(t) \Rightarrow (f, dh(t)), \quad d\varphi : g(t) \Rightarrow (d\varphi, g(t)).$$

Пусть $S'_{(dh)}$ и $S'_{(g)}$ соответственно пространства обобщенных функций, дифференциалов. Согласно общей схемы [3] решения задач в сопряженных пространствах решим задачу Сохоцкого в основных пространствах.

Постановка задачи: найти все аналитические вне контура Γ функции $f(p)$ и дифференциалы $d\varphi(p)$ по соответствующим условиям

$$\begin{aligned} f^+(t) - f^-(t) &= g(t), \\ d\varphi^+(t) - d\varphi^-(t) &= dh(t), \end{aligned} \qquad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где $g(t)$ и $dh(t)$ — произвольные элементы из основных пространств $S_{(g)}$ и $S_{(dh)}$.

Общие решения [4] задач (1) имеют вид

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\tau) A(\tau, q)\, d\tau + C,$$

$$d\varphi(p) = -\frac{dp}{2\pi i} \int_{\Gamma} A(p, \tau)\, dh(\tau) + \sum_{k=1}^{n} C_k dW_k(p). \tag{2}$$

При этом должны быть соответственно выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma g(t)\,dW_k(t) = 0, \quad k=\overline{1, h}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t\in\Gamma, \\ &\int_\Gamma dh(t) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где C, C_k — произвольные постоянные, $dW_k(p)$ — базис абелевых дифференциалов первого рода, $A(p, q)\,dp$ — мероморфный аналог ядра Коши (функция Вейерштрасса) [4].

Условия (3) позволяют выделить подпространства $\widetilde{S}_{(g)}$ и $\widetilde{S}_{(dh)}$ соответствующих основных пространств, в которых задачи (1) разрешимы.

Согласно формулам Сохоцкого из (2) имеем

$$\begin{aligned} f^{\pm}(t) &= \pm\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}Sg(t) + C, \\ d\varphi^{\pm}(t) &= \pm\frac{1}{2}dh(t) + \frac{1}{2}Sdh(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k dW_k(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где $Sg(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma g(\tau)A(\tau, t)\,d\tau, \quad Sdh\ (t) = -\frac{dt}{\pi i}\int_\Gamma A(t, \tau)\,dh(\tau).$

Из равенств (4) легко видеть, что $f^{\pm}(t)\in S_{(g)}$, $d\varphi^{\pm}(t)\in S_{(dh)}$.

Определение 2. Отождествим два линейных непрерывных функционала, принадлежащих пространству $S'_{(dh)}$ с обобщенными функциями типа «$\pm$» — $f^{\pm}$, если для любого аналитического вне контура Γ дифференциала $d\varphi(p)$, предельные значения которого $d\varphi^{\pm}(t)\in S_{(dh)}$, выполняются равенства:

1) $(f^{\pm}, d\varphi^{\pm}(t)) = 0$ в случае контура Γ, разбивающего $\mathfrak{R}$:

2) $(f^{+}, d\varphi^{+}(t)) - (f^{-}, d\varphi^{-}(t)) = 0$ в случае контура Γ, не разбивающего $\mathfrak{R}$. Аналогично определяются обобщенные дифференциалы типа «$\pm$» — $d\varphi^{\pm}$.

Сформулируем задачу Сохоцкого в пространствах $S'_{(dh)}$ и $S'_{(g)}$. Найти все $f^{\pm}\in S'_{(dh)}$ и $d\varphi^{\pm}\in S'_{(g)}$ в смысле определения 2 по соответствующим условиям

$$f^{+} - f^{-} = f, \quad d\varphi^{+} - d\varphi^{-} = d\varphi, \tag{5}$$

где $f\in S'_{(dh)}$, $d\varphi\in S'_{(g)}$.

План решений задач (5) будет состоять в их отыскании на подпространствах $\widetilde{S}_{(dh)}$, $\widetilde{S}_{(g)}$ и продолжении на соответствующие основные пространства.

Теорема. *Для разрешимости задач* (5) *на подпространствах* $\widetilde{S}_{(dh)}$ *и* $\widetilde{S}_{(g)}$ *необходимо и достаточно выполнения соответствующих условий*

$$(f, dW_k(t)) = 0 \quad (k=\overline{1, h}), \quad (d\varphi, 1) = 0. \tag{6}$$

Если эти условия выполнены, то решения вычисляются по формулам

$$(f^{\pm}, dh(t)) = -(f, d\varphi^{\mp}(t)), \quad (d\varphi^{\pm}, g(t)) = -(d\varphi, f^{\mp}(t)), \tag{7}$$

где $g(t)\in\widetilde{S}_{(g)}$, $dh(t)\in\widetilde{S}_{(dh)}$, *а* $f^{\pm}(t)$, $d\varphi^{\pm}(t)$ *берутся из формул* (4).

В связи с аналогичными выкладками доказательство теоремы приводится только для обобщенных функций.

Необходимость. Пусть задача Сохоцкого разрешима. Тогда

$$(f, dW_k(t)) = (f^+ - f^-, dW_k(t)) = (f^+, dW_k^+(t)) - (f^-, dW_k^-(t)) = 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия $(f, dW_k(t)) = 0$. Докажем, что формулы (7) дают решения задачи на подпространстве $\widetilde{S}_{(dh)}$. С этой целью нужно показать, что формулы (7) определяют линейные непрерывные функционалы и обобщенные функции типа «$\pm$» на подпространстве $\widetilde{S}_{(dh)}$.

Линейность функционалов $f^\pm$ на подпространстве $\widetilde{S}_{(dh)}$ следует из линейности функционала f на всем пространстве $S_{(dh)}$. Для доказательства их непрерывности на $\widetilde{S}_{(dh)}$ заменим в формулах (7) предельные значения $d\varphi^\pm(t)$ на их выражения из формул (4)

$$(f^\pm, dh(t)) = -\left(f, \left(\mp\frac{1}{2}dh(t) + \frac{1}{2}Sdh(t)\right)\right) - \left(f, \sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t)\right). \quad (8)$$

В силу линейности и непрерывности функционала f на пространстве $S_{(dh)}$, непрерывности сингулярного оператора $Sdh(t)$ в счетно-нормированном пространстве основных дифференциалов и условий (6) правые части формул (8) стремятся к нулю при условии, что $dh(t) \Rightarrow 0$ в топологии $S_{(dh)}$. Покажем, что формулы (7) определяют обобщенные функции типа «$\pm$».

Чтобы в этом убедиться, вычислим значения функционалов $f^\pm$ на всех тех предельных значениях $d\varphi^\pm(t)$, аналитических вне контура Γ дифференциалов $d\varphi(p)$, которые принадлежат подпространству $\widetilde{S}_{(dh)}$. В случае разбивающего контура, упомянутая принадлежность в силу теоремы Коши выполняется автоматически: $\int\limits_\Gamma d\varphi^\pm(t) = 0$.

Из формул (7) имеем

$$(f^+, d\varphi^+(t)) = -(f, (d\varphi^+(t))^-),$$

$$(f^-, d\varphi^-(t)) = -(f, (d\varphi^-(t))^+), \quad (9)$$

где $(d\varphi^+(t))^-$ и $(d\varphi^-(t))^+$ являются соответственно правым и левым предельными значениями аналитических вне контура Γ дифференциалов $d\psi(p)$, удовлетворяющих на контуре Γ условиям

$$d\psi^+(t) - d\psi^-(t) = d\varphi^\pm(t).$$

Считая, что точки характеристического дивизора $\Delta = q_0^{-1}p_1 \ldots p_h$ используемого нами ядра Коши находятся вне контура Γ, вычислим предельные значения $(d\varphi^+(t))^-$, $(d\varphi^-(t))^+$:

$$(d\varphi^+(t))^- = \frac{1}{2}S\left(\sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t),$$

$$(d\varphi^-(t))^+ = \frac{1}{2}S\left(\sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t)\right) + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t). \quad (10)$$

При выводе соотношений (10) существенно использовался факт обращения сингулярного интеграла типа Коши $Sdh(t)$ для произвольного замкнутого контура $S^2dh(t) = dh(t)$.

В случае разбивающегося контура всегда можно считать [1], что точки характеристического дивизора Δ находятся вне D^+. Тогда на основании формулы Коши [4] соотношения (10) примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
(d\varphi^+(t))^- &= \sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t),\\
(d\varphi^-(t))^+ &= 2\sum_{k=1}^{h} C_k dW_k(t).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Подставляя поочередно в равенства (9) полученные выражения для $(d\varphi^+(t))^-$, $(d\varphi^-(t))^+$ из соотношений (10) и (11), убеждаемся в силу условий (6) в том, что формулы (7) определяют обобщенные функции типа «$\pm$» в смысле определения 2.

Теорема доказана. Функционалы (7), дающие решения задачи Сохоцкого соответственно на подпространствах $\widetilde{S}_{(dh)}$ и $\widetilde{S}_{(g)}$, продолжим на основные пространства по формулам

$$
\begin{aligned}
(f^{\pm}, dh(t)) &= -(f, d\varphi^{\mp}(t)) + C\int_{\Gamma} dh(t),\\
(d\varphi^{\pm}, g(t)) &= -(d\varphi, f^{\mp}(t)) + \sum_{k=1}^{h} C_k \int_{\Gamma} g(t)\, dW_k(t),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $dh(t) \in S_{(dh)}$, $g(t) \in S_{(g)}$; C, C_k — произвольные постоянные; $d\varphi^{\pm}(t)$, $f^{\pm}(t)$ берутся из формул (4) и удовлетворяют условиям (3).

Справедливость формул (12) устанавливается непосредственной проверкой.

Автор признателен Г. С. Литвинчуку и Э. И. Зверовичу за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, М., 1960.
2. W. Koppelman, Singular integral equations boundary value problem and the Rieman — Roch theorem, J. of Math. and Mech., 10, N 2, 1961, 247—277.
3. В. С. Рогожин, Краевые задачи в пространстве обобщенных функций, Сиб. матем. ж., т. 11, № 5, 1961.
4. Э. И. Зверович, Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях, УМН, т. XXVI, № 1(157), 1971.
5. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 2.III 1971 г.
Одесский государственный университет