1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 18, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Канонические системы дифференциальных уравнений с быстро меняющимися периодическими коэффициентами

К. А. Бреус

Многие задачи физики и техники приводят к исследованию решений канонической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r}, \quad r = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где $\mathcal{H}$ — квадратичная форма переменных q_r и p_r вида

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\omega t)\, q_i q_j + 2b_{ij}(\omega t)\, q_i p_j + c_{ij}(\omega t)\, p_i p_j,$$

коэффициенты которой являются периодическими функциями t, периода $\frac{2\pi}{\omega}$, а ω — большой параметр.

Вводя вектор x с компонентами $q_1, q_2, \ldots, q_m; p_1, p_2, \ldots, p_m$, систему (1) запищем следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = JH(\omega t)\, x, \tag{2}$$

где $H(\omega t)$ — вещественная симметрическая матрица-функция, элемёнтами которой являются коэффициенты квадратичной формы, а матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

(0 и I_m — соответственно нулевая и единичная матрицы порядка m).

Заметим, что $J^* = -J$, $J^{-1} = -J$.

Систему уравнений (2) также называют *канонической*. Канонические системы с периодическими коэффициентами были предметом многих исследований (см., например, [1]; там же приведена библиография по этому вопросу).

Здесь ставится следующая задача: найти преобразование переменной x, приводящее исходную каноническую систему (2) с переменными коэффициентами к новой также канонической системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и установить структуру решений этих систем.

1. Сделав в уравнении (2) замену независимой переменной, полагая

$\tau = \omega t$, придем к уравнению

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon J H(\tau) x, \quad \varepsilon = \omega^{-1}. \tag{3}$$

Уравнение (3) при помощи замены неизвестной функции можно преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами и представить его решение в виде разложения по степеням параметра ε.

Теорема. *Существует такая матрица-функция $U(\tau, \varepsilon)$ аналитическая относительно достаточно малого ε (равномерно по отношению τ), периодическая по τ периода 2π и удовлетворяющая условию $U(0, \varepsilon) = U(2\pi, \varepsilon) = I$ (I — единичная матрица), что с помощью подстановки*

$$x = U(\tau, \varepsilon) y \tag{4}$$

уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon J \bar{H} y, \tag{5}$$

в котором $\bar{H} = \bar{H}(\varepsilon)$ — симметрическая матрица с постоянными элементами, аналитическая относительно параметра ε.

Докажем сначала, что какова бы ни была заданная аналитическая функция $\bar{H}(\varepsilon)$, можно всегда построить аналитическую относительно параметра ε функцию $U(\tau, \varepsilon)$, удовлетворяющую условию $U(0, \varepsilon) = I$ и осуществляющую в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ преобразование исходного уравнения (3) в уравнение (5).

Для того чтобы подстановка $x = U(\tau, \varepsilon) y$ приводила уравнение (3) к виду (5), функция преобразования $U(\tau, \varepsilon)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dU}{d\tau} = \varepsilon (J H(\tau) U - U J \bar{H}). \tag{6}$$

Последнее уравнение эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$U(\tau, \varepsilon) = I + \varepsilon \int_0^\tau [J H(s) U - U J \bar{H}] \, ds. \tag{7}$$

Будем решать уравнение (7) методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение $U_0 = U(0, \varepsilon) = I$, тогда первое приближение получим в виде

$$U_1 = I + \varepsilon \int_0^\tau [J H U_0 - U_0 J \bar{H}] \, ds = I + \varepsilon V_1, \quad V_1 = \int_0^\tau (J H U_0 - U_0 J \bar{H}) \, ds.$$

Второе приближение будем искать в виде

$$U_2 = I + \varepsilon \int_0^\tau (J H U_1 - U_1 J \bar{H}) \, ds = I + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2, \quad V_2 = \int_0^\tau (J H V_1 - V_1 J \bar{H}) \, ds.$$

Продолжая этот процесс, n-е приближение получим в виде

$$U_n = I + \int_0^\tau (J H U_{n-1} - U_{n-1} J \bar{H}) \, ds = I + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \ldots + \varepsilon^n V_n,$$

$$V_n = \int_0^\tau (J H V_{n-1} - V_{n-1} J \bar{H}) \, ds.$$

Докажем, что полученная последовательность матриц-функций

$$U_0,\ U_1,\ U_2, \ldots,\ U_n \tag{8}$$

сходится равномерно относительно τ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Для этого рассмотрим ряд

$$U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \ldots + (U_n - U_{n-1}) + \ldots \tag{9}$$

Оценим члены ряда (9); имеем:

$$U_{n+1} = I + \varepsilon \int_0^\tau (JHU_n - U_n J\bar{H})\, ds,$$

$$U_n = I + \varepsilon \int_0^\tau (JHU_{n-1} - U_{n-1} J\bar{H})\, ds.$$

Отсюда

$$U_{n+1} - U_n = \varepsilon \int_0^\tau [JH(U_n - U_{n-1}) - (U_n - U_{n-1}) J\bar{H}]\, ds.$$

Оценив эту разность, получим

$$\| U_{n+1} - U_n \| \leqslant \varepsilon \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \| U_n - U_{n-1} \| \left\{ \int_0^{2\pi} \| H \|\, ds + \bar{H} 2\pi \right\}.$$

Полагая $\lambda(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \| H \|\, ds + 2\pi \bar{H}$, будем иметь

$$\| U_{n+1} - U_n \| \leqslant \varepsilon\lambda(\varepsilon) \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \| U_n - U_{n-1} \|.$$

При $n = 0$ будем иметь

$$\| U_1 - U_0 \| \leqslant \varepsilon\lambda.$$

При $n = 1$, соответственно, имеем

$$\| U_2 - U_1 \| \leqslant \varepsilon\lambda \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \| U_1 - U_0 \| \leqslant (\varepsilon\lambda)^2;$$

для любого n по индукции найдем:

$$\| U_{n+1} - U_n \| \leqslant (\varepsilon\lambda)^{n+1}.$$

Исходя из этой оценки, замечаем, что ряд (9) мажорируется геометрической прогрессией

$$1 + \varepsilon\lambda + (\varepsilon\lambda)^2 + \ldots + (\varepsilon\lambda)^n + \ldots,$$

сходящейся, если $\varepsilon\lambda(\varepsilon) < 1$ Разрешимость последнего неравенства относительно ε вытекает из того, что при $\varepsilon \to 0$ $\lambda(\varepsilon)$ стремится к конечному пределу

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda(\varepsilon) = \lambda(0) = \int_0^{2\pi} \| H \|\, ds + 2\pi H(0),$$

а потому существует такой интервал $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, в котором неравенство $\varepsilon < \frac{1}{\lambda(\varepsilon)}$ будет выполняться. Поэтому последовательность (8), члены которой являются частичными суммами (9), равномерно сходится к функции U, представимой разложением вида

$$U(\tau,\ \varepsilon) = I + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \ldots + \varepsilon^n U_n + \ldots \tag{10}$$

Для доказательства периодичности матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ относительно периода 2π покажем, что условию периодичности матрицы U можно удовлетворить надлежащим выбором матрицы $\overline{H}(\varepsilon)$, которая, в свою очередь, будет аналитической функцией параметра ε. С этой целью заметим, что равенство (10) можно записать в виде

$$U(\tau, \varepsilon) = I + \varepsilon J \int_0^\tau (H - \overline{H})\, ds + \varepsilon^2 F(\tau, \varepsilon, \overline{H}), \tag{11}$$

где $F(\tau, \varepsilon, \overline{H})$ — аналитическая функция относительно ε и $\overline{H}$. Воспользовавшись условием периодичности для $U(\tau, \varepsilon)$: $U(0, \varepsilon) = U(2\pi, \varepsilon) = I$, получим

$$J \left| \int_0^{2\pi} H(\tau)\, d\tau - \overline{H}\, 2\pi \right| + \varepsilon F(2\pi, \varepsilon, \overline{H}) = 0,$$

откуда

$$\overline{H} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} H(\tau)\, d\tau - \varepsilon J F(2\pi, \varepsilon, \overline{H}) \right|. \tag{12}$$

Запишем последнее соотношение в виде

$$\overline{H} = \Phi(\varepsilon, \overline{H}),$$

в котором $\Phi(\varepsilon, \overline{H})$ — аналитическая функция относительно ε и $\overline{H}$, представимая в виде следующего ряда:

$$\overline{H} = \Phi(\varepsilon, \overline{H}) = a_{00} + a_{10}\varepsilon + a_{20}\varepsilon^2 + a_{11}\varepsilon\overline{H} + a_{02}\overline{H}^2 + \ldots, \tag{13}$$

причем степень последующих членов будет выше второй. Покажем, что $\overline{H}$ будет аналитической функцией параметра ε. Для этого попытаемся формально удовлетворить соотношению (13), заменяя в нем $\overline{H}$ рядом

$$\overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{H}_1\varepsilon + \overline{H}_2\varepsilon^2 + \ldots + \overline{H}_n\varepsilon^n + \ldots, \tag{14}$$

рассматривая его как сходящийся ряд. Сделав подстановку (14) в (13) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях полученного равенства, будем иметь

$$\overline{H}_0 = a_{00},\ \overline{H}_1 = a_{10},\ \overline{H}_2 = a_{20} + a_{11}\overline{H}_1 + a_{02}\overline{H}_1^2, \ldots$$

Вообще, $\overline{H}_n$ выразится через коэффициенты a_{ik} только при помощи сложений и умножений, причем $i + k \leq n$, а также через предыдущие коэффициенты $\overline{H}_0, \overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_{n-1}$.

Чтобы все предыдущие операции были оправданы, необходимо показать, что ряд (14) будет сходящимся при достаточно малых ε.

Чтобы это доказать, мы воспользуемся одним весьма общим методом, основанным на применении мажорантных функций [2]. В данном случае за мажорантную функцию $\varphi(\varepsilon, H)$ можно взять выражение вида

$$\varphi(\varepsilon, \overline{H}) = \frac{M}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(1 - \frac{\overline{H}}{\varrho}\right)} - M - M\frac{\overline{H}}{\varrho}, \tag{15}$$

где ε_0, ϱ, M — некоторые положительные числа.

Уравнение (15) после освобождения от знаменателя примет вид

$$\overline{H}^2 - \frac{\varrho^2\overline{H}}{\varrho + M} + \frac{M\varrho^2}{\varrho + M}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon} = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет один корень, равный нулю при $\varepsilon = 0$, а именно:

$$\overline{H} = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)} - \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)}\sqrt{1 - \frac{4M(\varrho + M)}{\varrho^2}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon}}.$$

Полагая $\alpha = \varepsilon_0\left(\frac{\varrho}{\varrho + 2M}\right)^2$, подкоренное выражение можно представить в виде $\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}$; тогда получим:

$$\overline{H} = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{16}$$

Следовательно, ряд (14) во всяком случае сходится в интервале $(-\alpha, \alpha)$, так как в этом интервале сходится ряд, представляющий неявную функцию, определяемую уравнением $\overline{H} = \varphi(\varepsilon, \overline{H})$. Таким образом, можно построить матрицу $\overline{H} = \overline{H}(\varepsilon)$, являющуюся аналитической функцией параметра ε, удовлетворяющую условию периодичности матрицы $U(\tau, \varepsilon)$.

2. Покажем теперь, что матрица $\overline{H}$ в уравнении (5) будет также *симметрической*. С этой целью заметим, что при $\tau = 0$ имеем очевидное равенство

$$U^*JU - J = 0, \tag{17}$$

где U^* — матрица, транспонированная по отношению матрицы U. Покажем, что производная левой части последнего равенства по τ при любом τ равна нулю, следовательно, она тождественный нуль, и одновременно с этим докажем симметричность матрицы $\overline{H}$.

Действительно

$$\frac{d}{d\tau}(U^*JU - J) = \left(\frac{d}{d\tau}U^*\right)JU + U^*J\left(\frac{d}{d\tau}U\right).$$

Внося сюда выражения для производных матриц U и U^*, из тождеств

$$\frac{dU}{d\tau} = \varepsilon(JH(\tau)U - UJ\overline{H}), \quad \frac{dU^*}{d\tau} = \varepsilon(-U^*H(\tau)J + \overline{H}^*JU^*),$$

получим

$$\frac{d}{d\tau}(U^*JU - J) = \varepsilon(\overline{H}^*JU^*JU - U^*JUJ\overline{H}).$$

После несложных преобразований последнее выражение можно записать в виде:

$$\frac{d}{d\tau}(U^*JU - J) = \varepsilon[(\overline{H} - \overline{H}^*) + \overline{H}^*J(U^*JU - J) - (U^*JU - J)J\overline{H}]. \tag{18}$$

В силу периодичности функции U из последнего равенства имеем

$$\overline{H} - \overline{H}^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(U^*JU - J)J\overline{H} - \overline{H}^*J(U^*JU - J)]\,d\tau. \tag{19}$$

Продифференцировав далее равенство (18) по переменной ε, получим

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(U^*JU - J)\right\} + \varepsilon\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(U^*JU - J)\right]J\overline{H} - \overline{H}^*J\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(U^*JU - J)\right]\right\} =$$

$$= \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\overline{H} - \overline{H}^*) - (U^*JU - J) J \frac{\partial \overline{H}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \overline{H}^*}{\partial \varepsilon} J (U^*JU - J) \right\} +$$

$$+ \{(H - \overline{H}^*) - (U^*JU - J) J\overline{H} + \overline{H}^* J (U^*JU - J)\}. \qquad (20)$$

Чтобы оценить решение дифференциального уравнения (20), докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dz}{dt} = L(z) + f(t), \ z(0) = 0, \qquad (21)$$

в котором функция $L(z)$ во всяком конечном интервале $a \leqslant t \leqslant b$ удовлетворяет условию $|L(z)| \leqslant \lambda |z|$ $\lambda = \text{const}$. *Тогда существует такая постоянная M, что $|z| \leqslant M \|f\|$, где*

$$\|f\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|.$$

Для доказательства заменим дифференциальное уравнение (21) эквивалентным ему интегральным уравнением:

$$z = \int_0^t L(z)\, dt + \int_0^t f(t)\, dt, \qquad (22)$$

откуда

$$|z| \leqslant \lambda \int_0^t |z|\, dt + t\|f\|. \qquad (23)$$

Положим $y = \lambda \int\limits_0^t |z|\, dt$, $\frac{dy}{dt} = \lambda |z|$. Умножая неравенство (23) на λ, получим $\frac{dy}{dt} - \lambda y \leqslant \lambda \|f\| t$. Отсюда $\frac{d}{dt}(ye^{-\lambda t}) \leqslant \lambda \|f\| te^{-\lambda t}$. Интегрируя последнее неравенство в пределах $(0, t)$, получим

$$ye^{-\lambda t} \leqslant \|f\| \left[-te^{-\lambda t} + \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]$$

или

$$y \leqslant \|f\| \left[-t + \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right].$$

Замечая, что $|z| \leqslant y + t\|f\|$, имеем окончательно:

$$|z| \leqslant \|f\| \left\{ \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right\}, \ |z| \leqslant M\|f\|,$$

где

$$M = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left\{ \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right\}.$$

Переходя к оценке решений уравнения (20), заметим, что при $\varepsilon = 0$ из равенства (6) следует $U = I$, следовательно, при $\varepsilon = 0$ имеем $U^*JU - J = 0$; с другой стороны, при $\tau = 0$ $U^*JU - J = 0$. Таким образом, к уравнению (20) применима доказанная лемма об оценках решений дифференциальной системы (21), а потому имеем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (U^*JU - J) \right\| \leqslant \varepsilon M_1 \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\overline{H} - \overline{H}^*) \right\| + M_2 \|U^*JU - J\| + M_3 \|\overline{H} - \overline{H}^*\|,$$

где M_1, M_2, M_3 — некоторые постоянные.

Подставляя в последнее неравенство выражение для $\overline{H} - \overline{H}^*$ из (19), а также для $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\overline{H} - \overline{H}^*)$, после дифференцирования равенства (19) по параметру ε, получим

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(U^*JU - J) \right\| \leqslant \varepsilon N_1 \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(U^*JU - J) \right\| + N_2 \| U^*JU - J \|, \tag{24}$$

где N_1 и N_2 — новые постоянные. Неравенство (24) можно переписать в виде:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(U^*JU - J) \right\| \leqslant N_3 \| UJU - J \|,$$

где

$$N_3 = \frac{N_2}{1 - \varepsilon N_1}, \quad \varepsilon N_1 < 1.$$

Но, так как при $\varepsilon = 0$ $U^*JU - J = 0$, то из последнего неравенства вытекает, что

$$U^*JU - J = 0.$$

Воспользовавшись далее равенством (19), замечаем, что $\overline{H} = \overline{H}^*$, т. е. постоянная матрица $\overline{H}$ является симметрической. Тем самым завершено доказательство существования функции $U(\tau, \varepsilon)$ периодической по τ, аналитической относительно параметра ε (равномерно по отношению τ), осуществляющей приведение исходной канонической системы (3) с переменными коэффициентами к канонической системе вида (5) с постоянными коэффициентами.

3. Как было показано выше, матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ и $\overline{H}(\varepsilon)$ являются аналитическими функциями параметра ε, представимые степенными рядами вида

$$U(\tau, \varepsilon) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(\tau) \tag{25}$$

$$\overline{H}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overline{H}_n. \tag{26}$$

Поскольку сходимость этих разложений для достаточно малых значений параметра ε установлена, нам остается лишь указать способ определения коэффициентов $U_n(\tau)$ и $\overline{H}_n$. С этой целью подставим разложения (25) и (26) в уравнение (6) и сравним в нем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Так, сравнивая коэффициенты при первой степени ε, имеем

$$\frac{dU_1}{d\tau} = J(H(\tau) - \overline{H}_0),$$

откуда

$$U_1(\tau) = J \int_0^{\tau} (H(\tau) - \overline{H}_0)\, d\tau. \tag{27}$$

Из последнего соотношения, используя условие периодичности $U_1(2\pi) = U_1(0) = 0$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} (H(\tau) - \overline{H}_0)\, d\tau = 0 \text{ или } \overline{H}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\tau)\, d\tau.$$

Сравнивая далее коэффициенты при ε^2, найдем:

$$\frac{dU_2}{d\tau} = J\,[H(\tau)\,U_1 + JU_1J\overline{H}_0 - \overline{H}_1].$$

Откуда

$$U_2 = J\int_0^\tau [H(\tau)\,U_1 + JU_1JH_0 - \overline{H}_1]\,d\tau.$$

Воспользовавщись снова условием периодичности, имеем

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [H(\tau)\,U_1 + JU_1J\overline{H}_0]\,d\tau.$$

Продолжая этот процесс и используя на каждом этапе условие периодичности для $U_n(\tau)$, определим коэффициенты $U_n(\tau)$ и $\overline{H}_n$.

Итак, решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon JH(\tau)\,x$$

имеет вид

$$x = \left[I + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(\tau)\right] y,$$

где y, в свою очередь, есть решение уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon J\overline{H}(\varepsilon)\,y$$

с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, В. А. Якубович, Тр. Межд. симпоз. по нелин. колеб., т. I, Изд-во АН УССР, К., 1963.
2. Н. П. Еругин, Неявные функции, Изд-во ЛГУ, Л., 1956.

Поступила 9.IX 1965 г.
Киев