1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 18, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

К теории линейных операторов в пространствах с двумя нормами

И. Ц. Гохберг, М. К. Замбицкий

Линейный ограниченный оператор A, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, называется нормально разрешимым, если уравнение $Ax = y$ $(x, y \in \mathfrak{B})$ разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие $f(y) = 0$, где f — произвольный функционал из $\mathfrak{B}^*$, являющийся решением уравнения $A^*f = 0$. Это определение нормальной разрешимости отличается от понятия нормальной разрешимости, которое встречается в некоторых вопросах классического анализа. Например, в теории различных классов интегральных уравнений, рассматриваемых в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера (см. [1]), условие* $f(y) = 0$ заменяется более простым условием ортогональности правой части уравнения в смысле L_2 к произвольному решению однородного сопряженного интегрального уравнения из исходного пространства гельдеровых функций.

Оказывается, что основные теоремы (теоремы Фредгольма и теоремы Нетера) об интегральных уравнениях в их классических формулировках могут быть получены как следствие общих предложений абстрактной теории операторов, действующих в пространствах с двумя нормами, одна из которых порождается скалярным произведением.

По-видимому, впервые операторы в пространствах с двумя нормами (еще в 1937 г.) рассматривал М. Г. Крейн [2]. В статье [2], в частности, с общих позиций была получена вся теория Гильберта — Шмидта (включая теорему Мерсера) для интегральных уравнений. В этой же статье были получены основные результаты о самосопряженных операторах, действующих в пространствах с двумя нормами. Некоторые из этих результатов позже были заново доказаны П. Лаксом [3] и Ж. Дьедонне [4].

Отметим, что в связи с различными вопросами анализа, в последнее время выполнен ряд важных исследований по изучению операторов в пространствах с двумя гильбертовыми нормами (пространствах с негативной нормой) и в оснащенных гильбертовых пространствах (см. Ю. М. Березанский [5], И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин [6]).

В настоящей статье исследуются «правильно разрешимые» операторы в пространствах с двумя нормами (§ 2). Это понятие является абстрактным аналогом условий разрешимости классической теории линейных интегральных уравнений. Указаны некоторые приложения к системам одномерных сингулярных интегральных уравнений (§ 4). В первом параграфе некоторые из теорем М. Г. Крейна [2] обобщаются на случай несамосопряженных операторов. В § 3 приводятся примеры, иллюстрирующие некоторые на первый взгляд странные ситуации для операторов в пространствах с

* Проверка этого условия практически невозможна, так как неизвестно сопряженное пространство.

двумя нормами. Часть результатов этой статьи приведена без доказательств в сообщении [20].

§ 1. О правильных операторах в пространствах с двумя нормами. 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $\mathfrak{B}$ — плотное линейное множество $\mathfrak{H}$, образующее банахово пространство с нормой, удовлетворяющей соотношению

$$\sup_{x\in\mathfrak{B}} (|x|_{\mathfrak{H}} / |x|_{\mathfrak{B}}) < \alpha. \qquad (1)$$

Каждый элемент $\varphi \in \mathfrak{H}$ по формуле

$$f_{\varphi}(x) = (x, \varphi) \qquad (x \in \mathfrak{B})$$

определяет функционал* из пространства $\mathfrak{B}^*$, сопряженного к $\mathfrak{B}$. Если отождествить функционалы f_{φ} с соответствующими элементами φ, то получим $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{H}$, причем

$$\sup_{\varphi\in\mathfrak{H}} (|\varphi|_{\mathfrak{B}^*} / |\varphi|_{\mathfrak{H}}) < \alpha.$$

Таким образом, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}^*$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое банахово пространство. Для того чтобы пространство $\mathfrak{B}$ содержалось в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, было плотным в $\mathfrak{H}$ и выполнялось соотношение (1), необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор J, действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}^*$, такой, что

$$(Jx)(y) = \overline{(Jy)(x)} \ (x, y \in \mathfrak{B}); \ (Jx)(x) > 0 \ (x \in \mathfrak{B}, \ x \neq 0).$$

При выполнении этого условия пространство $\mathfrak{H}$ строится как замыкание $\mathfrak{B}$ по метрике

$$|x|_{\mathfrak{H}}^2 = (Jx)(x),$$

а скалярное произведение определяется в $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}$ равенством

$$(x, y) = (Jy)(x)$$

и распространяется по непрерывности на все $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$. Оператор $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ назовем правильным оператором, если $A^*\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$. Для правильного оператора $A\,(\in \mathfrak{R}(\mathfrak{B}))$ через A^+ обозначим сужение оператора A^* на пространство $\mathfrak{B}$.

1°. *Пусть $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2$ — два банаховых пространства, у которых нормы связаны соотношением*

$$\sup_{x\in\mathfrak{B}_2} (|x|_{\mathfrak{B}_1} / |x|_{\mathfrak{B}_2}) < \infty.$$

Если оператор $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{B}_1)$ и $A\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{B}_2$, то сужение оператора A на $\mathfrak{B}_2$ принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_2)$.

В самом деле, легко проверяется, что сужение оператора A на $\mathfrak{B}_2$ замкнуто, а следовательно, в силу теоремы Банаха это сужение ограничено в $\mathfrak{B}_2$.

Из предложения 1° легко выводится, что *если A — правильный оператор, то оператор A^+ принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$, а следовательно, также является правильным оператором, причем $(A^+)^+ = A$.*

Отметим, что *всякий правильный оператор A допускает непрерывное расширение на все $\mathfrak{B}^*$.* Этим расширением является оператор $(A^+)^*$. Для

* В дальнейшем предполагается, что умножение функционала $f \in \mathfrak{B}^*$ на число λ производится по правилу $(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x)$ $(x \in \mathfrak{B})$.

обозначения расширения A на все пространство $\mathfrak{B}^*$ будем пользоваться той же буквой A.

Через $\mathfrak{P}$ $(=\mathfrak{P}(\mathfrak{B}))$ обозначим множество всех правильных операторов. Так как для любых комплексных чисел α, β и операторов A и $B \in \mathfrak{P}$

$$(\alpha A + \beta B)^+ = \bar{\alpha} A^+ + \bar{\beta} B^+, \ (AB)^+ = B^+ A^+,$$

то $\mathfrak{P}$ является кольцом, однако незамкнутым в обычной норме операторов. Оно становится полным нормированным кольцом, если определить в нем новую норму равенством

$$|A|_{\mathfrak{P}} = |A|_{\mathfrak{B}} + |A^+|_{\mathfrak{B}}.$$

Оператор $A \in \mathfrak{P}$ назовем симметричным, если $A = A^+$. Оператор $A \in \mathfrak{P}$ назовем положительным, если $(Ax, x) \geqslant 0$ $(x \in \mathfrak{B})$.

Отметим, что из обратимости оператора $A \in \mathfrak{P}$, вообще говоря, не вытекает обратимость оператора A^+. Соответствующий пример будет приведен в § 3 (см. (д)).

Легко устанавливается следующее общее предложение.

2°. *Пусть $A (\in \mathfrak{P})$ является обратимым оператором. Для того чтобы оператор $A^{-1} \in \mathfrak{P}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A^+ был обратимым. Если $A^{-1} \in \mathfrak{P}$, то $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$.*

2. В дальнейшем, будем говорить, что оператор A из $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$, если A допускает расширение по непрерывности до линейного ограниченного оператора, действующего в пространстве $\mathfrak{H}$, т. е. если выполняется условие $\sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{B}} (|A\varphi|_{\mathfrak{H}} / |\varphi|_{\mathfrak{H}}) < \infty$.

Отметим, что если оператор $A \in \mathfrak{P}$ принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$, то оператор A^+ является сужением на $\mathfrak{B}$ оператора, сопряженного к A в $\mathfrak{H}$.

3°. *Если оператор $A \in \mathfrak{P}$, то $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{H})$ и $|A|_{\mathfrak{H}} \leqslant \min\{|A^+A|_{\mathfrak{B}}^{1/2}, |AA^+|_{\mathfrak{B}}^{1/2}\}$* $(\leqslant \max\{|A|_{\mathfrak{B}}, |A^+|_{\mathfrak{B}}\})$. Это предложение является простым следствием теоремы М. Г. Крейна [2] (ср. [3]) о том, что всякий симметричный оператор $A \in \mathfrak{P}$ принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$ и $|A|_{\mathfrak{H}} \leqslant |A|_{\mathfrak{B}}$. Оно получается применением этой теоремы к операторам AA^+ и A^+A.

4°. *Если операторы $A \in \mathfrak{P}$ и A^+ обратимы, то оператор A как оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, также обратим.*

Это предложение вытекает из соответствующей теоремы М. Г. Крейна [2] для симметричного оператора. Впрочем, его можно также получить как следствие предложений 2° и 3°.

Обозначим через $\sigma(A \mid \mathfrak{B})$ спектр оператора A в пространстве $\mathfrak{B}$. Из предложения 4° вытекает, что *для всякого оператора $A \in \mathfrak{P}$*

$$\sigma(A \mid \mathfrak{H}) \subseteq \sigma(A \mid \mathfrak{B}) \cup \overline{\sigma(A^+ \mid \mathfrak{B})}, \tag{2}$$

где $\overline{\sigma(A^+ \mid \mathfrak{B})}$ обозначает комплексно сопряженное множество к $\sigma(A^+ \mid \mathfrak{B})$.

Отметим, что даже в случае, когда оператор $A (\in \mathfrak{P})$ в $\mathfrak{H}$ неотрицателен, спектр $\sigma(A \mid \mathfrak{B})$ может быть шире спектра $\sigma(A \mid \mathfrak{H})$ и содержать невещественные точки. Соответствующий пример впервые указан Ж. Дьедонне [4]. Несколько более полный пример приводится ниже в § 3 (см. (а)).

5°. *Если точка λ_0 является изолированным собственным числом оператора $A (\in \mathfrak{P})$ в пространстве $\mathfrak{B}$, которому отвечает нормально отщепляющееся конечномерное корневое подпространство $\mathfrak{N}$ (определение см. в [7] § 4), а λ_0 является изолированной точкой спектра оператора A^+ в пространстве $\mathfrak{B}$, то точка λ_0 также является изолированным собственным числом оператора A в $\mathfrak{H}$, которому отвечает конечномерное нормально отщепляющееся корневое подпространство, совпадающее с $\mathfrak{N}$.*

В самом деле, рассмотрим в пространстве $\mathfrak{B}$ конечномерный проектор

P_{λ_0}, определенный равенством

$$P_{\lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda, \tag{3}$$

где $\varepsilon\,(>0)$ — достаточно малое число. Как известно, $P_{\lambda_0}\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$. Из соотношения (2) вытекает, что λ_0 является изолированной точкой спектра оператора A в $\mathfrak{H}$, и, следовательно, формулой (3) определяется также проектор в $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{B}$ плотно в $\mathfrak{H}$, а подпространство $P_{\lambda_0}\mathfrak{B}$ конечномерно, то подпространство $P_{\lambda_0}\mathfrak{H}$ конечномерно и $P_{\lambda_0}\mathfrak{H} = P_{\lambda_0}\mathfrak{B}$. Последнее в силу [7] (§ 4) означает, что λ_0 отвечает нормально отщепляющееся корневое подпространство оператора A в $\mathfrak{H}$, совпадающее с $\mathfrak{N}$.

Из предложения 5° вытекает следующее предложение.

6°. *Для радиуса Фредгольма* $r(A\,|\,\mathfrak{H})$ (*см.* [8]) *оператора* $A\,(\in\mathfrak{P})$ *в пространстве* $\mathfrak{H}$ *имеет место соотношение*

$$r(A\,|\,\mathfrak{H}) \leqslant \max\{r(A\,|\,\mathfrak{B}),\ r(A^+\,|\,\mathfrak{B})\}$$

или, что одно и то же (*см.* [8]),

$$\lim_{n\to\infty}(\|A^n\|_{\mathfrak{H}})^{1/n} \leqslant \max\{\lim_{n\to\infty}(\|A^n\|_{\mathfrak{B}})^{1/n},\ \lim_{n\to\infty}(\|(A^+)^n\|_{\mathfrak{B}})^{1/n}\}, \tag{4}$$

где

$$\|A\|_{\mathfrak{H}} = \min_{T\in\mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}}|A+T|_{\mathfrak{H}},\ \|A\|_{\mathfrak{B}} = \inf_{T\in\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}|A+T|_{\mathfrak{B}},$$

а $\mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}\,(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}})$ — *двусторонний идеал всех вполне непрерывных операторов из* $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})\,(\mathfrak{R}(\mathfrak{B}))$.

Применяя соотношение (4) к операторам A^+A, AA^+ и учитывая, что $r(A^+A\,|\,\mathfrak{H}) = \|A^+A\|_{\mathfrak{H}} = \|A\|^2_{\mathfrak{H}}$, приходим к следующему соотношению:

$$\|A\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \min\{\|A^+A\|^{1/2}_{\mathfrak{B}},\ \|AA^+\|^{1/2}_{\mathfrak{B}}\}\ (\leqslant \max\{\|A\|_{\mathfrak{B}},\ \|A^+\|_{\mathfrak{B}}\}) \tag{5}$$

для любого оператора $A\in\mathfrak{P}$. В частности, для симметричного оператора $A\,(\in\mathfrak{P})$ имеем $\|A\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{B}}$.

7°. *Если оператор* $A\,(\in\mathfrak{P})$ *вполне непрерывен в пространстве* $\mathfrak{B}$, *то он вполне непрерывен и в пространстве* $\mathfrak{H}$, $\sigma(A\,|\,\mathfrak{B}) = \sigma(A\,|\,\mathfrak{H})$ *и корневые подпространства оператора* A, *отвечающие одним и тем же собственным числам* ($\neq 0$) *в пространствах* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{H}$, *совпадают.*

Это предложение для случая симметричного оператора доказано в [2].

Полная непрерывность оператора A в $\mathfrak{H}$ вытекает из формулы (5).

Совпадение спектров $\sigma(A\,|\,\mathfrak{H})$ и $\sigma(A\,|\,\mathfrak{B})$ и соответствующих корневых подпространств непосредственно вытекает из следующего более общего предложения.

8°. *Пусть* $\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2$ — *два банаховых пространства и* $\mathfrak{B}_1$ *плотно в* $\mathfrak{B}_2$. *Если оператор* A *действует в каждом из* $\mathfrak{B}_j\ (j=1,\ 2)$ *и вполне непрерывен в каждом из них, то* $\sigma(A\,|\,\mathfrak{B}_1) = \sigma(A\,|\,\mathfrak{B}_2)$ *и корневые подпространства оператора* A, *отвечающие одним и тем же ненулевым собственным числам в* $\mathfrak{B}_1$ *и* $\mathfrak{B}_2$, *совпадают* (ср. [3]).

В самом деле, пусть $\lambda_0\,(\neq 0)$ принадлежит объединению $\sum = \sigma(A\,|\,\mathfrak{B}_1)\cup\cup\,\sigma(A\,|\,\mathfrak{B}_2)$. В каждом из пространств $\mathfrak{B}_j\ (j=1,\ 2)$ рассмотрим проектор P_{λ_0}, определенный равенством (3), где ε настолько мало, что круг $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$ пересекается с $\sum$ только в точке λ_0. Так как $\mathfrak{B}_1$ плотно в $\mathfrak{B}_2$ и проектор P_{λ_0} конечномерен, то $P_{\lambda_0}\mathfrak{B}_1 = P_{\lambda_0}\mathfrak{B}_2$. Из этого равенства и вытекает требуемое предложение.

Отметим, что предложение 5° также может быть сформулировано для случая двух банаховых пространств.

3. Для оператора $A \in \mathfrak{P}$, через $\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B})$ ($\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{H})$) будем обозначать подпространство всех решений уравнения $Ax = 0$ в пространстве $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{H}$).

Если $A (\in \mathfrak{P})$ является ϕ-оператором (определение см. в [7]) в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$, то через $\varkappa(A|\mathfrak{H})$, $\varkappa(A|\mathfrak{B})$ обозначаются индексы (см. [7]) этого оператора в соответствующих пространствах.

Теорема 1. *Если операторы $A (\in \mathfrak{P})$ и A^+ являются ϕ-операторами в пространстве $\mathfrak{B}$ и $\varkappa(A|\mathfrak{B}) = -\varkappa(A^+|\mathfrak{B})$, то A является ϕ-оператором в $\mathfrak{H}$, причем $\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A|\mathfrak{H})$, $\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{H})$ (и стало быть, $\varkappa(A|\mathfrak{B}) = \varkappa(A|\mathfrak{H})$).*

Доказательство. Образуем симметричный оператор $C = A^+A$. Так как C является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}$, то

$$\mathfrak{H} = \overline{C\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{Z}(C|\mathfrak{H}).$$

Следовательно, $C\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}(C|\mathfrak{B}) = \{0\}$. Учитывая еще, что оператор C нормально разрешим в $\mathfrak{B}$ и $\varkappa(C|\mathfrak{B}) = \varkappa(A|\mathfrak{B}) + \varkappa(A^+|\mathfrak{B}) = 0$, заключаем, что

$$\mathfrak{B} = C\mathfrak{B} \dotplus \mathfrak{Z}(C|\mathfrak{B}). \tag{6}$$

Из (6) вытекает, что оператор C обратим на инвариантном подпространстве $C\mathfrak{B}$. Следовательно, при достаточно малых $\lambda (\neq 0)$ обратим в $\mathfrak{B}$ оператор $C - \lambda I$. Таким образом, точка $\lambda = 0$ является изолированным собственным числом оператора C, которому соответствует конечномерное нормально отщепляющееся корневое подпространство. Но тогда в силу предложения 5° оператор C нормально разрешим в $\mathfrak{H}$ и

$$\mathfrak{Z}(C|\mathfrak{H}) = \mathfrak{Z}(C|\mathfrak{B}). \tag{7}$$

Из равенства $(A^+Ax, x) = (Ax, Ax)$ непосредственно вытекает, что

$$\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{H}) = \mathfrak{Z}(C|\mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(C|\mathfrak{B}).$$

Эти равенства вместе с (7) дают $\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A|\mathfrak{H})$.

Проводя аналогичные рассмотрения для оператора $C' = AA^+$, заключаем, что

$$\mathfrak{Z}(C'|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(C'|\mathfrak{H}) \tag{8}$$

и

$$\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{H}) = \mathfrak{Z}(C'|\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(C'|\mathfrak{B}).$$

Откуда следует, что

$$\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{H}).$$

Наконец, из равенства $A\mathfrak{H} = AA^*\mathfrak{H}$ заключаем (см. [9]), что оператор A нормально разрешим в пространстве $\mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Отметим, что если для оператора $A (\in \mathfrak{P})$ не выполняется хотя бы одно из условий теоремы, то оператор A может не быть ϕ-оператором в пространстве $\mathfrak{H}$. Соответствующие примеры приведены в § 3.

§ 2. О правильно разрешимых операторах. 1. Понятию «нормальной разрешимости» оператора, которое встречается, например, в теории различных классов интегральных уравнений в пространстве гельдеровых функций (см. [1]), отвечает следующее абстрактное определение: оператор $A \in \mathfrak{P}$ назовем правильно разрешимым, если уравнение $Ax = y$ ($x, y \in \mathfrak{B}$) разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие $(y, \psi) = 0$, где $\psi (\in \mathfrak{B})$ — произвольное решение уравнения $A^+\psi = 0$.

Очевидно, оператор $A (\in \mathfrak{P})$ является правильно разрешимым тогда и только тогда, когда он является нормально разрещимым в $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B})$ плотно в $\mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*)$. В случае конечномерного $\mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*)$ последнее условие эквивалентно равенству $\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*)$.

Оператор $A(\in \mathfrak{P})$ назовем правильным ϕ-оператором, если он является ϕ-оператором и $\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*)$, т.е. если он нормально разрещим, оба числа $\alpha(A|\mathfrak{B}) = \dim \mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B})$, $\alpha(A^+|\mathfrak{B}) = \dim \mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B})$ конечны и $\alpha(A^*|\mathfrak{B}^*) = \alpha(A^+|\mathfrak{B})$.

Если $A \in \mathfrak{P}$ является правильным ϕ-оператором, то A^+, вообще говоря, может таким не быть (см. § 3).

Лемма. 1. *Если операторы $T(\in \mathfrak{P})$ и T^+ вполне непрерывны в пространстве $\mathfrak{B}$, то оператор $A = I + T$ правильно разрешим.*

Доказательство. Согласно предложению 7° оператор T вполне непрерывен в пространстве $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A|\mathfrak{H})$; учитывая еще, что $\varkappa(A|\mathfrak{H}) = 0$ и $\varkappa(A|\mathfrak{B}) = 0$, получим $\mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*) = \mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{H})$. В силу того же предложения $\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{H})$, а следовательно, $\mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*)$.

Лемма доказана.

2. Будем говорить, что оператор $A(\in \mathfrak{P})$ допускает левую (правую) правильную регуляризацию, если существует оператор $M(\in \mathfrak{P})$ такой, что операторы $MA - I$ и $(MA - I)^+$ $AM - I$ и $(AM - I)^+$ вполне непрерывны в пространстве $\mathfrak{B}$.

Теорема 2. *Для любого оператора $A \in \mathfrak{P}$ следующие предложения эквивалентны:*

а) *операторы A и A^+ являются правильными ϕ-операторами;*

б) *операторы A и A^+ являются ϕ-операторами в пространстве $\mathfrak{B}$ и $\varkappa(A|\mathfrak{B}) = -\varkappa(A^+|\mathfrak{B})$;*

в) *оператор $A(A^+)$ допускает левую и правую правильные регуляризации;*

г) *существует оператор $M \in \mathfrak{P}$ такой, что все операторы $MA - I$, $(MA - I)^+$, $AM - I$, $(AM - I)^+$ вполне непрерывны в пространстве $\mathfrak{B}$;*

д) *существует оператор $M \in \mathfrak{P}$, такой, что операторы $MA - I$ и $AM - I$ конечномерны;*

е) *оператор A представим в виде $A = D + K$, где $K(\in \mathfrak{P})$ — конечномерный оператор, а оператор $D(\in \mathfrak{P})$ либо имеет обратный слева $D^{(-1)} \in \mathfrak{P}$ и $DD^{(-1)} - I$ конечномерен, либо D имеет обратный справа $D^{(-1)} \in \mathfrak{P}$ и оператор $D^{(-1)}D - I$ конечномерен*.*

Доказательство. Легко видеть, что из предложения е) следует предложение д); чтобы убедиться в этом, достаточно положить $D^{(-1)} = M$. Очевидно, что из д) следует г), а г) влечет за собой в).

Покажем, что из предложения в) вытекает б). Пусть операторы $M_1, M_2 \in \mathfrak{P}$ таковы, что операторы $M_1A - I$, $(M_1A - I)^+$, $AM_2 - I$, $(AM_2 - I)^+$ вполне непрерывны в $\mathfrak{B}$. Тогда, в силу известных теорем о регуляризации в одном пространстве (см. [10]), оба оператора A и A^+ являются ϕ-операторами в пространстве $\mathfrak{B}$.

В силу леммы 1 $\mathfrak{Z}(M_2^*A^*|\mathfrak{B}^*) = \mathfrak{Z}(M_2^+A^+|\mathfrak{B})$, и следовательно, $\mathfrak{Z}(A^*|\mathfrak{B}^*) = \mathfrak{Z}(A^+|\mathfrak{B})$. Таким же образом выводим, что $\mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B}^*) = \mathfrak{Z}(A|\mathfrak{B})$. Стало быть, оба оператора A и A^+ являются правильно разрещимыми. Отсюда уже непосредственно следует, что $\varkappa(A|\mathfrak{B}) = -\varkappa(A^+|\mathfrak{B})$.

Из предложения б) следует предложение а). В самом деле, согласно условию предложения б)

$$\alpha(A|\mathfrak{B}) - \alpha(A|\mathfrak{B}^*) = \alpha(A^*|\mathfrak{B}^*) - \alpha(A^+|\mathfrak{B}).$$

* К этим предложениям можно добавить еще одно, получающееся из е) заменой условия конечномерности К условием полной непрерывности в $\mathfrak{B}$ операторов К и К+.

Отсюда в силу очевидных соотношений

$$\alpha(A \mid \mathfrak{B}) \leqslant \alpha(A \mid \mathfrak{B}^*) \text{ и } \alpha(A^+ \mid \mathfrak{B}) \leqslant \alpha(A^* \mid \mathfrak{B}^*)$$

вытекают равенства

$$\mathfrak{Z}(A \mid \mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A \mid \mathfrak{B}^*) \text{ и } \mathfrak{Z}(A^+ \mid \mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^* \mid \mathfrak{B}^*).$$

Таким образом, оба оператора A и A^+ правильно разрешимы.

Наконец, покажем, что из предложения а) вытекает предложение е).

Рассмотрим сперва случай $\varkappa(A \mid \mathfrak{B}) \leqslant 0$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — базис подпространства $\mathfrak{Z}(A \mid \mathfrak{B})$, а $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ — система линейно независимых векторов из $\mathfrak{Z}(A^+ \mid \mathfrak{B})$. Образуем конечномерный оператор $K \in \mathfrak{P}$, определенный равенством

$$Kx = \sum_{j=1}^{n} (x, \varphi_j)\, \psi_j,$$

и оператор $D = A - K\ (\in \mathfrak{P})$. Без труда показывается, что оператор D^+D обратим в $\mathfrak{B}$. Так как оператор D^+D симметричен, то оператор $(D^+D)^{-1} \in \mathfrak{P}$ Следовательно, оператор D обратим слева и $D^{(-1)} = (D^+D)^{-1}D^+ \in \mathfrak{P}$. Принимая во внимание, что $\alpha(D^{(-1)} \mid \mathfrak{B}) = \alpha(D^+ \mid \mathfrak{B})$ и что $D^{(-1)}(DD^{(-1)} - I) = 0$, заключаем, что оператор $DD^{(-1)} - I$ конечномерен. Этим и завершается доказательство в случае $\varkappa(A \mid \mathfrak{B}) \leqslant 0$. Одновременно доказано, что оператор A^+ представим в виде $A^+ = D^+ + K^+$, где $D^+(D^{(-1)})^+ = I$, а оператор $(D^{(-1)})^+D^+$ конечномерен. Отсюда следует, что утверждение доказано и в случае $\varkappa(A \mid \mathfrak{B}) \geqslant 0$.

Теорема доказана.

4. Как уже отмечалось, $\mathfrak{P}$ является нормированным кольцом с нормой, определенной равенством

$$|X|_{\mathfrak{P}} = |X|_{\mathfrak{B}} + |X^+|_{\mathfrak{B}} \qquad (X \in \mathfrak{P}).$$

Множество $\widehat{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{B}}$ всех вполне непрерывных операторов $T \in \mathfrak{P}$, для которых операторы T^+ также вполне непрерывны в $\mathfrak{B}$, образует двусторонний замкнутый идеал кольца $\mathfrak{P}$. Из теоремы 2 вытекает следующее предложение.

9°. *Для того чтобы операторы A ($\in \mathfrak{P}$) и A^+ были правильными ϕ-операторами, необходимо и достаточно, чтобы класс вычетов из фактор-кольца $\mathfrak{P}/\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}$, содержащий оператор A, был обратим в $\mathfrak{P}/\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}$.*

Из теоремы 2 можно также легко вывести следующую теорему о возмущении правильных ϕ-операторов (ср. [7]).

Теорема 3. *Пусть операторы $A(\in \mathfrak{P})$ и A^+ являются правильными ϕ-операторами. Если выполняется хотя бы одно из двух условий: а) операторы $T(\in \mathfrak{P})$ и T^+ вполне непрерывны; б) оператор $T \in \mathfrak{P}$ и $|T|\mathfrak{P} < \delta$, где $\delta\ (> 0)$ — некоторое число, зависящее только от оператора A, то операторы $A + T$ и $(A + T)^+$ также являются правильными ϕ-операторами.*

Отметим еще следующее предложение, вытекающее из теоремы 2.

Если операторы $A_j(\in \mathfrak{P};\ j = 1, 2)$ и A_j^+ являются правильными ϕ-операторами, то операторы A_1A_2 и $A_2^+A_1^+$ также являются правильными ϕ-операторами.

§ 3. Некоторые примеры. 1. В этом параграфе будут приведены примеры, которые уже упоминались в предыдущих параграфах.

Рассмотрим в пространстве $l_p (1 \leqslant p < \infty)$ операторы V и $V^{(-1)}$, определенные равенствами

$$V\{\xi_j\}_1^\infty = \{0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}, \quad V^{(-1)}\{\xi_j\}_1^\infty = \{\xi_2, \xi_3, \ldots\}.$$

Нам понадобится следующее предложение о теплицевых матрицах из [11], (стр. 70, см. также [12], гл. II).

1. *Пусть A — оператор, определенный в l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ равенством $A = a_{-1}V^{(-1)} + a_0 I + a_1 V$, где a_{-1}, a_0, a_1 — вещественные числа.*

Если $|a_{-1}| \neq |a_1|$, то спектр оператора A состоит из всех точек эллипса

$$\frac{(\operatorname{Re}\lambda - a_0)^2}{(a_{-1} + a_1)^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{(a_{-1} - a_1)^2} = 1 \tag{9}$$

и всех его внутренних точек. Во всех внутренних точках λ эллипса (9) *оператор $A - \lambda I$ нормально разрешим, причем*

$$\alpha(A - \lambda I) = \begin{cases} 1, & |a_{-1}| > |a_1| \\ 0, & |a_{-1}| < |a_1| \end{cases}; \quad \dim(l_p/(A - \lambda I)\, l_p) = \begin{cases} 0, & |a_{-1}| > |a_1| \\ 1, & |a_{-1}| < |a_1| \end{cases}.$$

Если $a_{-1} = a_1$, то $\sigma(A \mid l_p) = \{\lambda : -2|a_1| + a_0 \leqslant \lambda \leqslant 2|a_1| + a_0\}$.

Если же $a_{-1} = -a_1$, то $\sigma(A \mid l_p) = \{\lambda = i\mu + a_0 : 2|a_1| \leqslant \mu \leqslant 2|a_1|\}$. В обоих последних случаях $\alpha(A - \lambda I) = 0$ и $\overline{(A - \lambda I)\, l_p} = l_p$ для $\lambda \in \sigma(A|l_p)$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — пространство l_1 с весом $\{2^j\}_{j=1}^{\infty}$, т. е. $\mathfrak{B}$ состоит из всех последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_1^{\infty}$ комплексных чисел, для которых $\sum_j 2^j |\xi_j| < \infty$, с нормой

$$|\xi|_{\mathfrak{B}} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j |\xi_j|.$$

Положим $\mathfrak{H} = l_2$. Очевидно, оператор $V \in \mathfrak{P}$, причем $V^{+} = V^{(-1)}$. Из соответствия $\xi = \{\xi_j\} \leftrightarrow \eta = \{2^j \xi_j\}$ $(\xi \in \mathfrak{B},\ \eta = l_1)$ вытекает изометричность пространств $\mathfrak{B}$ и l_1. При этом соответствии оператору $A = a_{-1}V^{(-1)} + a_0 I + a_1 V \in \mathfrak{P}$, очевидно, отвечает оператор $B = 2^{-1}a_{-1}V^{(-1)} + a_0 I + 2a_1 V$, действующий в пространстве l_1. В частности, $\sigma(A \mid \mathfrak{B}) = \sigma(B \mid l_1)$.

Рассмотрим оператор $W_1 = V^{(-1)} + 2I + V$ $(= (V^{+} + I)(V + I))$ из $\mathfrak{P}$. Оператор W_1, рассматриваемый в $\mathfrak{B}$, эквивалентен оператору $2^{-1}V^{(-1)} + 2I + 2V$, действующему в l_1. Следовательно, из предложения I вытекает следующее:

(а) *Спектр неотрицательного оператора W_1 $(\in \mathfrak{P})$ в пространстве $\mathfrak{H} = l_2$ состоит из отрезка $0 \leqslant \lambda \leqslant 4$, а спектр оператора W_1 в пространстве $\mathfrak{B}$ состоит из всех точек эллипса*

$$\frac{(\operatorname{Re}\lambda - 2)^2}{(5/2)^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{(3/2)^2} = 1$$

и его внутренних точек.

Из того же предложения I вытекают следующие утверждения.

(б). *Оператор W_1 $(\in \mathfrak{P})$ неотрицателен в l_2, $\alpha(W_1 \mid l_2) = 0$, $l_2 \neq W_1 l_2$, $\overline{W_1 l_2} = l_2$. Этот же оператор W_1 является ф-оператором в $\mathfrak{B}$ и $\dim(\mathfrak{B}/W_1\mathfrak{B}) = 1$.*

(в). *Оператор $W_2 = W_1 - I/3$ является обратимым положительно определенным оператором в l_2 и он же является ф-оператором в $\mathfrak{B}$, причем* $\dim(\mathfrak{B}/W_2\mathfrak{B}) = 1$.

(г). *Оператор $W_3 = W_1 - I/2$ $(\in \mathfrak{P})$ является обратимым положительно определенным в l_2, а в $\mathfrak{B}$ он не является ф-оператором.*

2. В остальных примерах рассматривается связь между операторами A и A^{+}.

(д). *Оператор $W_4 = I + V^{(-1)}$ $(\in \mathfrak{P})$ является обратимым оператором в $\mathfrak{B}$. Оператор $W_4^{+} = I + V$ является ф-оператором в $\mathfrak{B}$, причем $\alpha(W_4^{+} \mid \mathfrak{B}) = 0$,*

$\dim(\mathfrak{B}/W_4^+\mathfrak{B}) = 1$. *В пространстве* l_2 *оператор* W_4^+ *необратим, причем* $\alpha(W_4^+ \mid l_2) = \alpha(W_4^* \mid l_2) = 0$*.

В частности, оператор $W_4^+ (\in \mathfrak{P})$ является ϕ-оператором в $\mathfrak{B}$, но не является правильно разрешимым оператором, ибо $\alpha(W_4/\mathfrak{B}) = 0$, а $\dim(\mathfrak{B}/W_4^+\mathfrak{B}) \neq \neq 0$. Отметим еще, что оператор $W_4 (\in \mathfrak{P})$ правильно разрешим.

(ж). *Оператор* $W_5 = I + 2V (\in \mathfrak{P})$ *является ϕ-оператором в* $\mathfrak{B}$, *в то время как оператор* $W_5^+ = I + 2V^+$ *не является нормально разрешимым* (*он отображает взаимно однозначно* $\mathfrak{B}$ *на свою плотную часть* ($\neq \mathfrak{B}$).

§ 4. Некоторые приложения. 1. Пусть Γ — замкнутый простой ограниченный гладкий контур. Через $\mathfrak{B}^{(n)}$ обозначим одно из пространств $L_p^{(n)}(\Gamma)$ $(1 < p < 2)$, $H_\mu^{(n)}(\Gamma)$ $(0 < \mu < 1)$, где $L_p^{(n)}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций $f = \{f_j(t)\}_1^n$ $(t \in \Gamma)$ с компонентами из $L_p(\Gamma)$, а $H_\mu^{(n)}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций $f = \{f_j(t)\}_1^n$ $(t \in \Gamma)$ с компонентами, удовлетворяющими неравенству Гельдера с показателем μ. В пространстве $L_p^{(n)}(\Gamma)$ норма определяется равенством

$$|f|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma |f_j(t)|^p \, |dt| \right)^{1/p},$$

а в пространстве $H_\mu^{(n)}(\Gamma)$ — следующим равенством

$$|f|_\mu = \max_{j=1,2,\ldots,n} \left(\max_{t \in \Gamma} |f_j(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in \Gamma} \frac{|f_j(t_1) - f_j(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \right).$$

Роль пространства $\mathfrak{H}$ в рассматриваемом случае будет играть пространство $\mathfrak{H}^{(n)} = L_2^{(n)}(\Gamma)$. Пусть A — сингулярный интегральный оператор, определенный в $\mathfrak{B}$ равенством

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \qquad (t \in \Gamma), \tag{10}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — матрицы n-го порядка, составленные в случае $\mathfrak{B}^{(n)} = L_p^{(n)}(\Gamma)$ из непрерывных на Γ функций, а в случае $\mathfrak{B}^{(n)} = H_\mu^{(n)}(\Gamma)$ — из функций, принадлежащих пространству $H_\mu(\Gamma)$. Как известно, оператор A является линейным ограниченным оператором. Легко видеть, что оператор A^* в $\mathfrak{H}^{(n)}$ определяется равенством

$$(A^*\varphi)(t) = a^*(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{b^*(\tau)}{\bar{\tau} - \bar{t}} e^{i(\alpha_\tau - \alpha_t)} \varphi(\tau) \, d\tau, \tag{11}$$

где α_t — угол наклона касательной к кривой Γ в точке t к положительному направлению оси x, а $a^*(t)$ — матрица, сопряженная к $a(t)$. Следовательно, при достаточной гладкости контура Γ оператор A является правильным, а оператор A^+ определяется равенством (11).

Если выполняются условия

$$\det(a(t) + b(t)) \neq 0, \qquad \det(a(t) - b(t)) \neq 0 \qquad (t \in \Gamma), \tag{12}$$

то, как известно, оператор A допускает двустороннюю регуляризацию в $\mathfrak{B}^{(n)}$ правильным оператором M, определенным равенством

$$(M\varphi)(t) = c(t)\varphi(t) - \frac{d(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau,$$

---

* Этим примером, а также рядом критических замечаний авторы обязаны А. С. Маркусу.

где

$$c(t) = (a(t) + b(t))^{-1} a(t) (a(t) - b(t))^{-1}, \; b(t) = (a(t) + b(t))^{-1} b(t) (a(t) - b(t))^{-1}.$$

Эта регуляризация является правильной*.

Отметим еще, что решения уравнений

$$a^*(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{b^*(\tau)}{\tau - t} e^{i(\alpha_\tau - \alpha_t)} \varphi(\tau)\, d\tau = 0,$$

$$a'(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{b'(\tau)}{\tau - t}\psi(\tau)\, d\tau = 0,$$

где $a'(t)$ — матрица, транспонированная к $a(t)$, связаны соотношением

$$\psi(t) = e^{i\alpha_t}\overline{\varphi(t)},$$

и, стало быть, для любого вектора $f \in \mathfrak{B}^{(n)}$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} f_j(t)\, \overline{\varphi_j(t)}\, |dt| = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} f_j(t)\, \psi_j(t)\, dt.$$

Из общей теоремы 2 и последнего замечания при условиях (12) вытекают для операторов A и A^+ теоремы Нетера в их классической формулировке из [1]. Кроме того, из той же теоремы вытекает, что

$$\mathfrak{Z}(A \mid \mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A \mid \mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{Z}(A^+ \mid \mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(A^+ \mid \mathfrak{H}). \tag{13}$$

2. Теорема 4. *Для того чтобы оператор A, определенный в пространстве $\mathfrak{B}$ равенством* (10), *был ф-оператором*** *в $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (12).

Если условия (12) *выполняются, то операторы A и A^+ являются правильными ф-операторами, причем выполняются соотношения* (13).

Эта теорема в части необходимости ее условий представляет собой уточнение и обобщение некоторых результатов работ [12—17].

Доказательство. В силу рассуждений п. 1 нам остается доказать необходимость условий (12) в первом утверждении теоремы. Воспользуемся двумя предложениями Н. Я. Крупника, доказательства которых будут приведены в дополнении.

1). *Пусть R — нормированное кольцо, $a, b, (\in R)$ — элементы с вещественным спектром, которые коммутируют между собой. Если элемент $a + bi$ обратим, то обратим и элемент $a - bi$.*

2). *Пусть $a = \| a_{jk} \|_1^n$ — матрица, составленная из коммутирующих между собой элементов кольца R. Для того чтобы матрица a имела обратную, составленную из элементов кольца R, необходимо и достаточно, чтобы элемент* $\det a$ *был обратим в R.*

Пусть оператор A вида (10) является ϕ-оператором в пространстве $\mathfrak{B}^{(n)}$. Тогда класс вычетов $\hat{A}$ из $\hat{\mathfrak{R}}^{(n)} = \mathfrak{R}(\mathfrak{B}^{(n)})/\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}^{(n)}}$, содержащий оператор A,

---

* Это утверждение легко выводится из того, что оператор

$$(T_a\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \frac{a(t) - a(\tau)}{t - \tau}\varphi(\tau)\, d\tau$$

является правильным и вполне непрерывным в $\mathfrak{B}^{(n)}$ вместе с T_a^+. Последним предложением в случае $\mathfrak{B}^{(n)} = H_\mu^{(n)}(\Gamma)$ мы обязаны И. А. Фельдману.

** Можно показать, что если этот оператор A является Φ_+- или Φ_--оператором (см. [7]), то он является Ф-оператором.

является обратимым в $\widehat{\mathfrak{R}}^{(n)}$. Элемент $\widehat{A}$ можно рассматривать как матрицу $\| \widehat{A}_{jk} \|_1^n$, где

$$(A_{jk}\varphi)(t) = a_{jk}(t)\varphi(t) + \frac{b_{jk}(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (a = \| a_{jk} \|_1^n;\ b = \| b_{jk} \|;\ \varphi \in \mathfrak{B}^{(1)}).$$

Так как элементы $\widehat{A}_{jk}$ ($\in \widehat{\mathfrak{R}}^{(1)}$) коммутируют между собой, то в силу предложения 2) обратим класс вычетов $\det \widehat{A}$ из $\widehat{\mathfrak{R}}^{(1)}$, который, как легко видеть, порождается оператором X:

$$(X\varphi)(t) = x(t)\varphi(t) + \frac{y(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (\varphi \in \mathfrak{B}^{(1)}),$$

где

$$x(t) + y(t) = \det(a(t) + b(t)),\ x(t) - y(t) = \det(a(t) - b(t)).$$

Без труда показывается, что оператор A^+ можно представить в виде

$$(A^+\varphi)(t) = a^*(t)\varphi(t) + b^*(t)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + (T\varphi)(t),$$

где T — вполне непрерывный оператор в $\mathfrak{B}^{(n)}$. Очевидно, класс вычетов $\det(\widehat{A}^+)$ порождается оператором Y:

$$(Y\varphi)(t) = \overline{x(t)}\,\varphi(t) + \overline{y(t)}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (\varphi \in \mathfrak{B}^{(1)}).$$

Элемент $\det \widehat{A}$ можно представить в виде $\widehat{A} = \widehat{C} + i\widehat{D}$, где

$$(C\varphi)(t) = (\operatorname{Re} x(t))\varphi(t) + \frac{(\operatorname{Re} y(t))}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$(D\varphi)(t) = (\operatorname{Im} x(t))\varphi(t) + \frac{(\operatorname{Im} y(t))}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Элементы $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ коммутируют между собой и имеют вещественный спектр, следовательно, в силу предложения 1) из обратимости элемента $\det\widehat{A}$ вытекает обратимость элемента $\det\widehat{A}^+$. Отсюда непосредственно вытекает обратимость элемента $\widehat{A}^+$. Таким образом, оператор A^+ является ϕ-оператором в $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим оператор $A^+A + \lambda I$, где λ — произвольное положительное число. Очевидно,

$$(A^+A\varphi)(t) + \lambda\varphi(t) = g(t)\varphi(t) + \frac{h(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + (T_1\varphi)(t),$$

где T_1 — вполне непрерывный оператор в $\mathfrak{B}^{(n)}$,

$$g(t) = a^*(t)a(t) + b^*(t)b(t) + \lambda,\ h(t) = a^*(t)b(t) + b^*(t)a(t).$$

Так как

$$g(t) + h(t) = (a^*(t) + b^*(t))(a(t) + b(t)) + \lambda > 0 \quad (t \in \Gamma),$$

$$g(t) - h(t) = (a^*(t) - b^*(t))(a(t) - b(t)) + \lambda > 0 \quad (t \in \Gamma),$$

то оператор $A^+A + \lambda I$ является ϕ-оператором в $\mathfrak{B}$.

Таким образом, при всех неотрицательных λ оператор $A^+A + \lambda I$ является ϕ-оператором в $\mathfrak{B}$. Так как при достаточно больших λ оператор $A^+A+\lambda I$ обратим, то в силу теоремы об устойчивости индекса (см. [7]) $\varkappa(A^+A \mid \mathfrak{B}) = 0$, а следовательно, $\varkappa(A^+) = \varkappa(A)$. В силу теоремы 1 отсюда следует, что оператор A является ф-оператором в $\mathfrak{H}$. Последнее, как известно (см. [13, 14]), влечет за собой выполнение условий (12).

Дополнение. Здесь будут доказаны предложения 1) и 2), использованные при доказательстве теоремы 4. Начнем с доказательства предложения 1).

Пусть a и b — коммутирующие элементы с вещественным спектром из нормированного кольца R и пусть элемент $a + bi$ обратим в R. Так как $(a + bi)^{-1} a = (a + bi)^{-1} a (a + bi)(a + bi)^{-1} = (a + bi)^{-1}(a + bi) a (a + bi)^{-1} = a (a + bi)^{-1}$, то элемент a коммутирует с элементом $(a + bi)^{-1}$; аналогично доказывается, что элемент b коммутирует с $(a + bi)^{-1}$. Через R_1 обозначим коммутативное подкольцо R с тремя образующими a, b и $(a + bi)^{-1}$, а через $\mathfrak{M}$ — множество максимальных идеалов кольца R_1. В силу предложения 2° из [18] спектр каждого из элементов a и b в R_1 таков же, как и в кольце R. Следовательно, функции $a(M)$ и $b(M)$ $(M \in \mathfrak{M})$ элементов a и b на бикомпакте максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ принимают только вещественные значения. Как известно (см. [19]), произвольный элемент $x \in R_1$ обратим в R_1 в том и только том случае, когда функция $x(M)$ не обращается в нуль ни в одной точке $\mathfrak{M}$. Так как элемент $a + bi$ обратим в R_1, то $a(M) + b(M)i \neq 0$ $(M \in \mathfrak{M})$, но тогда и $a(M) - ib(M) \neq 0$ $(M \in \mathfrak{M})$, и стало быть, элемент $a - bi$ обратим в R_1.

Докажем теперь предложение 2).

Если элемент $\det A$, где $A = \| a_{jk} \|_1^n$, а a_{jk} — коммутирующие элементы из R, обратим в R, то

$$(\det A)^{-1} a_{jk} = (\det A)^{-1} a_{jk} (\det A)(\det A)^{-1} = a_{jk} (\det A)^{-1}.$$

Отсюда следует, что матрица $\| (\det A)^{-1} b_{jk} \|_1^n$, где b_{jk} — алгебраическое дополнение к a_{jk}, является матрицей, обратной к A.

Пусть существует матрица $A^{-1} = \| c_{jk} \|_1^n$ $(c_{jk} \in R)$, являющаяся обратной к матрице A. Для доказательства необходимости условия предложения 2) достаточно показать, что все элементы c_{jk} коммутируют между собой и со всеми элементами a_{jk}, ибо в последнем случае $I = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A$, что означает обратимость элемента $\det A$.

Обозначим через Z частично упорядоченное отношением включения множество всех коммутативных подколец кольца R, содержащих все элементы a_{jk} матрицы A. Согласно принципу Цорна в множестве Z существует хотя бы один максимальный элемент U. Коммутативное подкольцо U кольца R обладает следующим свойством: если для некоторого элемента $a \in R$ имеем $ax = xa$ $(x \in U)$, то $a \in U$. Так как $a_{jk} \in U$, то для любого элемента $x \in U$: $xA^{-1} = A^{-1}xAA^{-1} = A^{-1}AxA^{-1} = xA^{-1}$, и стало быть, $xc_{jk} = c_{jk}x$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда следует, что все элементы $c_{jk} \in U$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
2. М. Г. Крейн, Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами, Сб. праць ін-ту матем. АН УРСР, № 9, 1947, 104—129.

3. P. D. Lax, Symmetrizable Linear Transformations, Comm. on pure and applied Math., v. 7, 1954, 633—647.
4. J. A. Diedonne, Qussi-hermitian operators, Proc. of the intern. symposium on linear spaces, Ierusalem, 1961, 115—122.
5. Ю. М. Березанский, Пространства с негативной нормой, УМН, т. 18, вып. 1, 1963, 63—96.
6. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4, Физматгиз, 1961.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, т. 12, вып. 2, 1957, 43—118.
8. И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, И. А. Фельдман, О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалах, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76), 1960, 51—70.
9. И. Ц. Гохберг, О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, ДАН СССР, т. 76, 1951, 9—12.
10. Ф. В. Аткинсон, Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб., т. 28 (70), № 1, 3—14.
11. М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, т. 13, вып. 5, 1958, 3—120.
12. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН, т. 19, вып. 1, 1964, 71—124.
13. И. Ц. Гохберг, Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям УМН, т. 7, вып. 2, 1952, 149—156.
14. И. Ц. Гохберг, О системах сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, 55—60.
15. И. Ц. Гохберг, О границах применимости теорем Ф. Нетера, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 17, 1955, 35—44.
16. А. И. Вольперт, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 10, 1961, 41—87.
17. Д. Ф. Харазов, Б. В. Хведелидзе, Некоторые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 28, № 2, 1962, 129—135.
18. И. Ц. Гохберг, О нормальной разрешимости и индексе функции от оператора, Изв. АН МССР (сер. физ.-матем. наук), № 11, 1964, 11—25.
19. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.
20. И. Ц. Гохберг, М. К. Замбицкий, О нормально разрешимых операторах в пространствах с двумя нормами, Изв. АН МССР (сер. ест. и тех. наук), № 6, 1964.

Поступила 9.XII 1964 г.
Кишинев