1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 18, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Случайное блуждание, описываемое однородным процессом с независимыми приращениями, и асимптотический анализ его характеристик

Д. В. Гусак

1. При изучении случайного блуждания, описываемого однородным процессом с независимыми приращениями (для краткости такие процессы будем называть S-процессами), основными характеристиками являются время первого выхода процесса из некоторой области и значение процесса в момент первого выхода. Наиболее содержательные результаты по данному вопросу получены при изучении блуждания, описываемого S-процессом $\xi(t)$ $(t > 0)$ в полуплоскости $x < z$ (см. [1] и [3]), в том случае, когда граница z достигается только непрерывным путем (т. е., когда значение процесса в момент первого выхода имеет вырожденное распределение, сосредоточенное в точке z). Некоторые результаты по изучению случайного блуждания, описываемого S-процессом в полосе $[z_-, z_+]$, можно найти в [2].

В данной заметке изучаются распределения характеристик случайного блуждания, описываемого S-процессом в некоторой криволинейной полосе. В нижеследующем п. 2 определяются изучаемые характеристики и устанавливается связь между их распределениями. В п. 3 сформулированы вспомогательные утверждения, необходимые для асимптотического анализа распределений этих характеристик. В п. 4 приводятся теоремы по асимптотическому анализу (см. теоремы 1—4), основной из которых является теорема 1. На описывающий блуждание процесс $\xi(t)$ накладываются следующие условия: плотность распределения $\xi(t)$ ограничена, а характеристическая функция (х. ф.) процесса имеет вид:

$$M \exp\{is\xi(t)\} = \exp\{t\psi(s)\},$$

$$\psi(s) = ias - \frac{\sigma^2 s^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} (e^{isx} - 1)\, dM(x) + \int_{0}^{\infty} (e^{isx} - 1)\, dN(x). \tag{1}$$

Указанные выше ограничения на $\xi(t)$ используются только при построении асимптотических разложений. Для асимптотического анализа распределений изучаемых характеристик блуждания используется метод последовательного исчерпывания невязок, развитый В. С. Королюком в его работах по асимптотическому анализу распределений характеристик блуждания, описываемого суммами случайных величин.

Полученные в настоящей заметке результаты являются обобщениями результатов работы [4], где рассматривался лишь тот случай, когда

$$\infty > \sigma^2 > 0,\ M_0 + N_0 < \infty,\ M_0 = \int_{-\infty}^{0} dM(x),\ N_0 = \int_{0}^{\infty} dN(x).$$

2. Пусть $\xi(t)$ — непрерывный справа S-процесс с х. ф. (1), описывающий случайное блуждание в криволинейной полосе

$$G = \{(t, x) : z_-(t) < x < z_+(t)\}, \quad z_-(0) < 0 < z_+(0).$$

Обозначим через

$$P(t, x) = P\{\xi(t) < x\}, \quad \tau = \inf\{t : \xi(t) \overline{\in} G\}. \tag{2}$$

и рассмотрим следующие функции:

распределение момента первого выхода

$$S(t) = P\{\tau > t\}; \tag{3}$$

распределение значения процесса в момент первого выхода

$$Q(x) = P\{\xi(\tau) < x\}; \tag{4}$$

совместное распределение момента первого выхода и значения процесса после выхода

$$A(t, x) = P\{\tau \leqslant t, \xi(t) < x\}; \tag{5}$$

можно рассматривать распределение

$$A(t, s; x) = P\{\tau \leqslant t, \xi(t+s) < x\} \quad (s > 0), \tag{6}$$

но легко заметить, что

$$A(t, s; x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, x-y)\, d_y P(s, y);$$

совместное распределение момента первого выхода и значения процесса до выхода

$$B(t, x) = P\{\tau > t, \xi(t) < x\}; \tag{7}$$

совместное распределение времени первого выхода и значения процесса в момент первого выхода

$$C(t, x) = P\{\tau \leqslant t, \xi(\tau) < x\}. \tag{8}$$

Распределения $Q(x)$ и $C(t, x)$ рассматриваются только в том случае, когда выход процесса из области G может осуществляться при помощи скачков.

Нетрудно убедиться в том, что распределения $A(t, x)$ и $B(t, x)$ при наличии ограниченной плотности

$$p(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} P(t, x)$$

удовлетворяют в области G уравнению

$$\mathbf{P}u = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} [u(t, x) - u(t, x-y)]\, d\Pi(y) = 0 \tag{9}$$

$$(d\Pi(x) = dM(x)\,(x < 0),\ dN(x)\,(x > 0)),$$

а вне области G $A(t, x)$ и $B(t, x)$ удовлетворяют условиям

$$A(t, x) = \begin{cases} P(t, x), & (t, x) \in G_- = \{(t, x) : x < z_-(t)\}, \\ P(t, x) - S(t), & (t, x) \in G_+ = \{(t, x) : x > z_+(t)\}; \end{cases}$$

$$B(t, x) = \begin{cases} S(t), & (t, x) \in G_+, \\ 0, & (t, x) \in G_-. \end{cases} \tag{10}$$

Покажем, что вне области G распределение $A(t, x)$, кроме первых двух соотнощений в (10), удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{P}A(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} C(t, x) \quad (t, x) \overline{\in} G. \tag{11}$$

В самом деле при $(t, x) \overline{\in} G$

$$A(t + \Delta, x) = P\{\xi(t + \Delta) < x, \tau \leqslant t\} + P\{\xi(t + \Delta) < x, t < \tau \leqslant t + \Delta\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(t, x - y)\, d_y P(\Delta, y) + P\{\xi(t + \Delta) < x, t < \tau \leqslant t + \Delta\}.$$

Из предельных соотношений

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} P\{\xi(t + \Delta) < x,\ t < \tau \leqslant t + \Delta\} = \frac{\partial}{\partial t} C(t, x),$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(t, x - y)\, dP_y(\Delta, y) - A(t, x) \right] =$$

$$= a \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} [A(t, x - y) - A(t, x)]\, d\Pi(y)$$

следует уравнение (11).

Через $A(t, x)$ и $B(t, x)$ можно выразить распределения (3), (4) и (8). В частности,

$$S(t) = \int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial}{\partial x} B(t, x)\, dx,$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} C(t, x) = \int_{z_-}^{z_+} M(x - y) \frac{\partial}{\partial y} B(t, y)\, dy \quad (x \leqslant z_-(t)), \\ -\frac{\partial}{\partial t}[C(t, x) + S(t)] = \frac{\partial}{\partial t} P\{\tau \leqslant t, \xi(\tau) \geqslant x\} = \\ = -\int_{z_-}^{z_+} N(x - y) \frac{\partial}{\partial y} B(t, y)\, dy \quad (x \geqslant z_+(t)). \end{gathered} \tag{12}$$

Докажем только последнее соотношение в (12).

Пусть $(t, x) \in G_+$. Тогда условия (10) и уравнение (11) приводят к соотношению

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} = a \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{x - z_+} [P(t, x - y) - P(t, x)]\, d\Pi(y) +$$

$$+ \int_{x - z_+}^{x - z_-} [A(t, x - y) - A(t, x)]\, d\Pi(y) + \int_{x - z_-}^{\infty} [P(t, x - y) - P(t, x) + S(t)]\, d\Pi(y),$$

которое можно записать в виде

$$\mathbf{P}P(t, x) - \frac{\partial S(t)}{\partial t} = \int\limits_{x-z_+}^{x-z_-} [A(t, x-y) - P(t, x-y) -$$

$$- A(t, x) + P(t, x)]\, d\Pi(y) - S(t)\, N(x - z_-) + \frac{\partial C(t, x)}{\partial t}.$$

Если учесть, что $A + B = P$ и $\mathbf{P}P = 0$, отсюда легко получить соотношение

$$-\frac{\partial}{\partial t}[C(t, x) + S(t)] = \int\limits_{x-z_+}^{x-z_-} [B(t,x) - B(t, x-y)]\, d\Pi(y) -$$

$$- S(t)\, N(x - z_-) = \int\limits_{x-z_+}^{x-z_-} \int\limits_{x-y}^{z_+} \frac{\partial}{\partial u} B(t, u)\, du d\Pi(y) - S(t)\, N(x - z_-) \quad (x > z_+). \tag{13}$$

Меняя порядок интегрирования в правой части (13), получаем требуемое соотношение. Аналогичным образом доказывается соответствующее соотношение для $x < z_-(t)$.

3. В дальнейшем будем рассматривать случайное блуждание, описываемое внутри полосы G центрированным процессом

$$\zeta_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}[\xi(\lambda t) - M\xi(\lambda t)]. \tag{14}$$

Для распределений характеристик этого блуждания оставим прежние обозначения, снабдив их индексом λ, например,

$$\tau_\lambda = \inf\{t : \zeta_\lambda(t) \overline{\in} G\},$$

$$p_\lambda(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} P_\lambda(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} P\{\zeta_\lambda(t) < x\},$$

$$S_\lambda(t) = P\{\tau_\lambda > t\}, \tag{15}$$

$$Q_\lambda(t, x) = P\{\zeta_\lambda(\tau_\lambda) < x\}.$$

Оператор $\mathbf{P}_\lambda$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{P}_\lambda u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{\lambda}\Pi_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} [u(t, x) - u\left(t, x - \frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)] d\Pi(y), \tag{16}$$

где $d\Pi(x) = dM(x)$ $(x < 0)$, $d\Pi(x) = dN(x)$ $(x > 0)$, а моменты определяются так:

$$\Pi_r = M_r + N_r,\ M_r = \int\limits_{-\infty}^{0} x^r dM(x),\ N_r = \int\limits_{0}^{\infty} x^r dN(x) \ (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

причем предполагается, что

$$|M_1| < \infty,\ N_1 < \infty, \text{ а при } \sigma^2 = 0\ \Pi_1 > 0. \tag{18}$$

Можно было бы предположить, что при $\sigma^2 = 0$ $\Pi_1 < 0$. Любое из этих предположений обеспечивает ненулевой сдвиг центрированного процесса, когда $\sigma^2 = 0$.

При наличии ограниченной производной $\frac{\partial p_\lambda}{\partial x}$, плотности

$$a_\lambda(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} A_\lambda(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} P\{\tau_\lambda \leqslant t, \zeta_\lambda(t) < x\},$$

$$b_\lambda(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} B_\lambda(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} P\{\tau_\lambda > t, \zeta_\lambda(t) < x\}$$

однозначно определяются уравнениями

$$\mathbf{P}_\lambda a_\lambda(t, x) = 0, \quad \mathbf{P}_\lambda b_\lambda(t, x) = 0 \quad (t, x) \in G \tag{19}$$

и условиями

$$a_\lambda(t, x) = p_\lambda(t, x), \ b_\lambda(t, x) = 0 \quad (t, x) \overline{\in} G. \tag{20}$$

Нас интересует следующий вопрос. Как, воспользовавшись данными задачи (19), (20), построить асимптотическое разложение для $a_\lambda(t, x)$ и $b_\lambda(t, x)$ по степеням $\varepsilon(\lambda)$ ($\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$). Для решения этого вопроса нам понадобятся вспомогательные утверждения. Некоторые из них были доказаны в [4] для случая $\Pi_0 < \infty$; доказательство их без труда может быть получено и для $\Pi_0 = \infty$.

Лемма 1. *При наличии ограниченной плотности и условия*

$$|M_r| < \infty, \ N_r < \infty \quad (2 \leqslant r \leqslant k, \ k \geqslant 3)$$

имеет место асимптотическое разложение ($\tau' = \lambda t \to \infty$)

$$\sqrt{D\xi(t)}\, p_\lambda(t, x) = \varphi(u) + \sum_{r=1}^{k-2} P_r(-\varphi(u))(\tau')^{-\frac{r}{2}} + o\left((\tau')^{-\frac{k-2}{2}}\right),$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad u = \frac{x}{\sqrt{D\xi(t)}} \tag{21}$$

(определение $P_r(-\varphi)$ см. в [5], гл. 8). *При этом существует такая не зависящая от x функция $\delta(\tau')$, что $\delta(\tau') \to 0$ при $\tau' \to \infty$ и*

$$\left|\sqrt{D\xi(t)}\, p_\lambda(t, x) - \sum_{r=1}^{k-2} P_r(-\varphi(u))(\tau')^{-\frac{r}{2}}\right| \leqslant \frac{\delta(\tau')(\tau')^{-\frac{k-2}{2}}}{1 + |u|^k (tD\xi(1))^{-\frac{k}{2}}}.$$

Нам удобнее пользоваться разложением (21) в таком виде:

$$p_\lambda(t, x) = \varphi_0(t, x) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \varphi_1(t, x) + \frac{1}{\lambda} \varphi_2(t, x) + \ldots;$$

$$\varphi_0(t, x) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2D^2 t}}, \quad D^2 = \sigma^2 + \Pi_2,$$

$$\varphi_1(t, x) = \frac{\Pi_3}{6D^2}[2\varphi_0'(t, x) + x\varphi_0''(t, x)], \tag{22}$$

$$\varphi_2(t, x) = \frac{\Pi_3}{72D^2} x^2 \varphi_0^{\mathrm{IV}}(t, x) + \left(\frac{\Pi_3^2}{8D^4} - \frac{\Pi_4}{24D^2}\right) x\varphi_0^{\mathrm{III}}(t, x) +$$

$$+ \left(\frac{5\Pi_3^2}{24D^4} - \frac{\Pi_4}{8D^2}\right) \varphi_0''(t, x).$$

Лемма 2. *На классе бесконечно дифференцируемых функций* $a(t, u)$ *по аргументу* u *и один раз дифференцируемых по* t *для оператора* $\mathbf{P}_\lambda$ *при* $u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x - \Pi_1 \lambda t)$ *имеет место расщепление*

$$\mathbf{P}_\lambda a = \sum_{r=0}^{n} L_r a \lambda^{-\frac{r}{2}} + \lambda^{-\frac{n+1}{2}} R_{n,\lambda} a, \tag{23}$$

члены которого определяются следующим образом:

$$L_0 a = \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{D^2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial u^2},$$

$$L_r a = \frac{(-1)^{r+1} \Pi_{r+2}}{(r+2)!} \frac{\partial^{r+2} a}{\partial u^{r+2}} \quad (1 \leqslant r \leqslant n), \tag{24}$$

$$R_{n,\lambda} a = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{n+3}}{\partial u^{n+3}} a\left(t, u - \frac{\theta y}{\sqrt{\lambda}}\right) \frac{(-1)^n y^{n+3}}{(n+3)!} \, d\Pi(y) \quad (0 < \theta < 1).$$

Лемма 3. *Пусть* $V^{\pm}(t, s)$, *где* $s = \sqrt{\lambda}(\pm z_{\pm}(t) \mp x) > 0$, *— дифференцируемые один раз по* t *и два раза* по* s *функции. Если* $V^{\pm}(t, s)$ *и* $\frac{\partial}{\partial s} V^{\pm}(t, s)$ *убывают при* $s \to \infty$, $V^{\pm}(t, s)$ и $\frac{\partial}{\partial t} V^{\pm}(t, s)$ *абсолютно интегрируемы по* s *с весовой функцией* $1 + |s|$, *то*

$$\int_s^{\infty} (y - s) \mathbf{P}_\lambda V^{\pm}(t, y) \, dy = \lambda M_0^{\pm} V^{\pm} + \sqrt{\lambda} M_1^{\pm} V^{\pm} + M_2^{\pm} V^{\pm}, \tag{25}$$

где

$$M_0^{\pm} V^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} V^{\pm}(t, s \pm y) K(y) \, dy - \frac{\sigma^2}{2} V^{\pm}(t, s),$$

$$M_1^{\pm} V^{\pm} = \mp z'_{\pm}(t) \int_s^{\infty} V^{\pm}(t, y) \, dy, \tag{26}$$

$$M_2^{\pm} V^{\pm} = \int_s^{\infty} (y - s) \frac{\partial}{\partial t} V^{\pm}(t, y) \, dy,$$

$$K(x) = \int_{-\infty}^{x} M(z) \, dz \ (x < 0), \quad -\int_x^{\infty} N(z) \, dz \ (x > 0).$$

Для того чтобы сформулировать следующее вспомогательное утверждение, введем некоторые обозначения.

$L_{<m>}$ — кольцо функций $\Phi(x)(-\infty < x < \infty)$, абсолютно интегрируемых на вещественной оси с весовой функцией $p(x) = 1 + |x|^m$. В качестве операции умножения служит операция свертывания

$$\Phi_1(x) * \Phi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x - y) \Phi_2(y) \, dy.$$

* Если $\sigma^2 = 0$, достаточно потребовать, чтобы $V^{\pm}(t, s)$ были дифференцируемы один раз по t и один раз по s.

$L^0_{\langle m\rangle}$ — кольцо преобразований Фурье функций $\Phi(x) \in L_{\langle m\rangle}$

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\Phi(x)\,dx \in Z^0_{\langle m\rangle}$$

с обычной операцией умножения.

$Z_{\langle m\rangle}$ — расширение кольца $Z^0_{\langle m\rangle}$, полученное путем прибавления констант.

$$\varphi(s) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\Phi(x)\,dx \in Z_{\langle m\rangle},\ \Phi(x) \in L_{\langle m\rangle}.$$

Если выполнено условие

$$|M_r| < \infty,\ N_r < \infty \quad (1 \leqslant r \leqslant m+2,\ m > 0), \tag{27}$$

тогда

$$K(x) \in L_{\langle m\rangle},\ M(x) \in L^-_{\langle m+1\rangle},\ N(x) \in L^+_{\langle m+1\rangle},$$

где $L^{\pm}_{\langle m\rangle}$ обозначает кольцо тех функций из $L_{\langle m\rangle}$, которые на отрицательной (положительной) полуоси тождественно равны нулю. Это означает, что

$$k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}K(x)\,dx \in Z^0_{\langle m\rangle},$$

$$\pi(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{isx}M(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{isx}N(x)\,dx \in Z^0_{\langle m+1\rangle}.$$

Лемма 4. *Пусть выполняется условие* (27).

а) *Если* $\sigma^2 > 0$, *тогда имеет место каноническая факторизация* (определение ее см. в [6], § 2)

$$k(s) - \frac{\sigma^2}{2} = \varkappa_1^+(s)\,\varkappa_1^-(s) \quad s \in \{-\infty,\ \infty\}. \tag{28}$$

б) *Если* $\sigma^2 = 0$ *и* $\pi(0) \neq 0$, *тогда*

$$k(s) = \varkappa_2^-(s)\,\frac{\varkappa_2^+(s)}{1 - is} \quad s \in \{-\infty,\ \infty\}; \tag{29}$$

при этом

$$\varkappa_j^+(s) = a_j^+ + \int_0^{\infty} e^{isx}K_j^+(x)\,dx \ \textit{для}\ s \in \Pi_+ = \{s : \operatorname{Im} s > 0\}.$$

$$\varkappa_j^-(s) = a_j^- + \int_{-\infty}^{0} e^{isx}K_j^-(x)\,dx \ \textit{для}\ s \in \Pi_- = \{s : \operatorname{Im} s \leqslant 0\},$$

$$K_j^{\pm}(x) \in L^{\pm}_{\langle m\rangle} \quad (j = 1, 2).$$

$a_j^{\pm}$ — *такие вещественные числа, что* $a_1^+ a_1^- = -\dfrac{\sigma^2}{2}$, $a_2^+ a_2^- = \pi(0)$.

Доказательство леммы 4 следует из теоремы о факторизации на оси (см. [6]).

Из леммы 4 следует, что при наличии условия (27) для $K(x)$ справедливо представление

$$K(x) = \int_{-\infty}^{0} K_+(x-y)\,K_-(y)\,dy + c^- K_+(x) + c^+ K_-(x). \tag{30}$$

При этом в случае, когда $\sigma^2 > 0$,

$$c^{\pm} = a_1^{\pm} \neq 0, \quad c^+ c^- = -\frac{\sigma^2}{2},$$

$K_{\pm}(x) = K_1^{\pm}(x) \in L_{\langle m \rangle}^{\pm}$ и абсолютно непрерывны. В случае, когда $\sigma^2 = 0$,

$$c^+ = 0, \; c^- = a_2^-, \; K_-(x) = K_2^-(x),$$

$$K_+(x) = a_2^- e^{-x} + e^{-x} \int_0^x K_2(y) e^y dy,$$

$K_{\pm}(x) \in L_{\langle m \rangle}^{\pm}$, $K_+(x)$ — абсолютно непрерывна.

Лемма 5. *Если $\sigma^2 > 0$, плотности $a(t, x)$ и $b(t, x)$ непрерывны на границах $z_+(t)$ и $z_-(t)$.*

Мы докажем непрерывность $a(t, x)$ и $b(t, x)$ только на верхней границе. Пусть A^+ — событие, заключающееся в том, что выход из полосы G осуществляется пересечением границы z_+. Определим распределение

$$S^+(t) = P\{\tau > t, \; A^+\}.$$

Оно в силу 3-го соотношения из (12) абсолютно непрерывно и имеет плотность

$$s^+(t) = \frac{\partial S^+(t)}{\partial t} = \int_{z_-}^{z_+} N(z_+ - u)\, b(t, u)\, du. \tag{31}$$

Докажем, что $\lim\limits_{x \to z_+ - 0} b(t, x) = b(t, z_+ - 0) = 0$. Предположим противное, что $b(t, z_+ - 0) \neq 0$. Тогда

$$P\{\tau \in [t, t + \Delta_1), A^+\} \geqslant P\{\xi(t) \in [z_+ - \Delta_2, z_+), \tau \in [t, t + \Delta_1), A^+\} \geqslant$$
$$\geqslant b(t, z_+ - 0)\, P\{\xi(t + \Delta_1) - \xi(t) > \Delta_2 + k\Delta_1\}\, \Delta_2,$$

где $k = \max \dot{z}_+(t)$. Положим $\Delta_2 = c\sqrt{\Delta_1}$, где $0 < c < \sqrt{D\xi_1(1)}\; \xi_1(t) = \xi(t) - \sigma w(t)$, $w(t)$ — процесс брауновского движения.

$$P\{\xi(t + \Delta_1) - \xi(t) > c\sqrt{\Delta_1} + k\Delta_1\} = P\{\xi(\Delta_1) > c\sqrt{\Delta_1} + k\Delta_1\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{\xi_1(\Delta_1) > c\sqrt{\Delta_1} + k\Delta_1 - y\}\, dP\{\sigma w(\Delta_1) < y\} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{2c\sqrt{\Delta_1} + k\Delta_1 - M\xi_1(\Delta_1)}^{\infty} P\{\xi_1(\Delta_1) > c\sqrt{\Delta_1} - k\Delta_1 - y\}\, dP\{\sigma w(\Delta_1) < y\} \geqslant$$

$$\geqslant P\{\xi_1(\Delta_1) > -c\sqrt{\Delta_1} + M\xi_1(\Delta_1)\}\, P\{\sigma w(\Delta_1) > 2c\sqrt{\Delta_1} + k\Delta_1 - M\xi_1(\Delta_1)\} \geqslant$$
$$\geqslant P\{|\xi_1(\Delta_1) - M\xi_1(\Delta_1)| < c\sqrt{\Delta_1}\}\, P\{\sigma w(\Delta_1) > 2c\sqrt{\Delta_1} + k\Delta_1 - M\xi_1(\Delta_1)\} \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - \frac{c^2}{D\xi_1(1)}\right)\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_0\right)\left(0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, предположение о том, что $b(t, z_+ - 0) \neq 0$, противоречит существованию ограниченной плотности $s^+(t)$ (см. (31)).

Если $\sigma^2 = 0$, и сдвиг a конечный, то непрерывность на верхней границе можно установить при наличии условия $\min z'_+(t) \geqslant a$ (на нижней границе — при наличии условия $\max z'_-(t) \leqslant a$).

4. Основным утверждением в п. 4 является следующая теорема, в которой дается алгоритм построения асимптотического разложения для $a_\lambda(t, x)$

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$|M_r| < \infty, \quad N_r < \infty \ (1 \leqslant r \leqslant n+5),$$

$$p_\lambda(t, z_\pm) = 0(\lambda^{-\frac{n+1}{2}})(\lambda \to \infty, t = O(\lambda^{-\alpha}), \alpha > 1), \tag{32}$$

$$z_\pm(t) \in C^{6n+11}_{[0,\infty]},$$

тогда для a_λ *имеет место асимптотическое разложение* ($\lambda \to \infty$)

$$a_\lambda(t, x) = \sum_{r=0}^{n} a_r(t, x)\lambda^{-\frac{r}{2}} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n+1} \lambda^{-\frac{r+1}{2}} [V_r^-(t, (x - z_-)\sqrt{\lambda}) + V_r^+(t, (z_+ - x)\sqrt{\lambda})] + o(\lambda^{-\frac{n}{2}}). \tag{33}$$

$a_k(t, x)$ определяются из рекуррентной системы дифференциальных уравнений

$$L_0 a_0 = \frac{\partial a_0}{\partial t} - \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 a_0}{\partial x^2} = 0,$$

$$L_0 a_k = -\sum_{r=1}^{k} L_r a_{k-r} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{34}$$

в условиях

$$a_k(0, x) = 0 \qquad (z_-(0) < x < z_+(0)),$$

$$a_0(t, z_\pm) = \varphi_0(t, z_\pm), \tag{35}$$

$$a_k(t, z_\pm) = \varphi_k(t, z_\pm) - V_{k-1}^\pm(t, -0).$$

$V_k^\pm(t, s)$ определяются на полуоси $s \geqslant 0$ в классе абсолютно интегрируемых по s функций из уравнений

$$M_0^\pm V_0^\pm(t, s) = 0,$$

$$M_0^\pm V_1^\pm(t, s) = -M_1^\pm V_0^\pm(t, s), \tag{36}$$

$$M_0^\pm V_k^\pm(t, s) = -M_1^\pm V_{k-1}^\pm(t, s) - M_2^\pm V_{k-2}^\pm(t, s) \qquad (2 \leqslant k \leqslant n+1)$$

в условиях

$$V_k^\pm(t, s) = V_k^\pm(t, 0) + \sum_{r=1}^{k+1} \frac{(\mp s)^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial x^r}[\varphi_{k+1-r}(t, x) -$$

$$- a_{k+1-r}(t, x)]_{x=z_\pm(t)} \qquad (s \leqslant 0). \tag{37}$$

Доказательство теоремы проводится в два этапа. Сначала строится формальное разложение (33). Начиная построение асимптотики с главного члена a_0, оцениваются невязки в исходной задаче (19), (20) суммы

$$S_r(t, x) = a_0(t, x) + \sum_{k=1}^{r} \bar{a}_k(t, x)\varepsilon^k(\lambda)$$

уже найденных членов $\bar{a}_k$ и указывается последующий член $\bar{a}_{r+1}$ погашающий эти невязки. При этом a_1 (подобно ему и все a_k при $k \geqslant 2$) содержит слагаемое a_1, погашающее невязку предыдущего члена a_0 в уравнении (19) (такого типа слагаемые принято называть регулярными членами), и слагаемые $V_0^{\mp}$, погашающие невязки в выполнении граничных условий (20); эти невязки возникают при продолжении S_0 из области G на всю полуплоскость $t > 0$. Такого типа слагаемые, входящие в a_k, принято называть погранслоями. Уравнения для регулярных членов следуют из расщепления (23), для погранслоев — из расщепления (25). Граничные условия для a_k задаются только на границах z_+. Для определения этих условий используется разложение для $p_\lambda(t, x)$ (см. лемму 1) и соотношение

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k(\lambda)\, a_k + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{k+1}(\lambda)\,(V_k^+ + V_k^-)\right]_{z_\pm} =$$

$$= p_\lambda(t, x) + o(\varepsilon^n(\lambda)) \qquad \left(\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Граничные условия для $V_k^{\pm}$ следуют из соотнощения

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k(\lambda)\, a_k + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{k+1}(\lambda)\,(V_k^+ + V_k^-)\right]_{(t,x)\in\overline{G}} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k(\lambda)\, \varphi_k(t, x)\right]_{(t,x)\in\overline{G}} + o(\varepsilon^n(\lambda))$$

после разложения $a_k(t, x)$ и $\varphi_k(t, x)$ в ряд Тейлора в окрестности границ $z_\pm(t)$. При этом следует перейти к новой переменной $s = \sqrt{\lambda}\,(z_+ - x)$ $(s = (x - z_-)\sqrt{\lambda})$ и учесть раньше полученные граничные условия для регулярных членов.

Для решения интегральных уравнений, определяющих погранслои, следует воспользоваться леммой 4. При помощи факторизации преобразований Фурье ядер этих уравнений нетрудно доказать, что $V_k^{\pm}$ находятся из интегральных уравнений, ядрами которых являются множители факторизации $K_\mp(x)$.

Непрерывность (разрывность) $a_\lambda(t, x)$ на границах обусловливает непрерывность (разрывность) погранслоев $V_k^{\pm}(t, s)$ при $s = 0$. В этом нетрудно убедиться, если перейти к пределу $(x \to z_+ \mp 0)$ в асимптотическом разложении для $a_\lambda(t, x)$ и учесть граничные условия для $a_k(t, x)$ $(x = z_\pm)$ и $V_k(t, s)$ $(s \leqslant 0)$. Из леммы 5 следует, что погранслои V_k непрерывны при $s = 0$, если $\sigma^2 > 0$. В силу сделанного после леммы 5 замечания верхние погранслои непрерывны при $s = 0$ и в том случае, когда $\sigma^2 = 0$.

Второй этап доказательства теоремы 1 заключается в обосновании асимптотики для $a_\lambda(t, x)$. Обоснование в данном случае может быть проведено таким же образом, как и в случае $\Pi_0 < \infty$ (см. [4]), путем введения верхних и нижних функций.

Пользуясь описанным в теореме 1 алгоритмом построения асимптотического разложения для $a_\lambda(t, x)$, можно получить асимптотические разложения для $S_\lambda(t)$ и $C_\lambda(t, x)$.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, тогда при $\lambda \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение для S_λ*

$$S_\lambda(t) = \int_{z_-}^{z_+} [b_0(t, u) + \lambda^{-\frac{1}{2}}\, b_1(t, u)]\, du +$$

$$+\sum_{r=2}^{n}\lambda^{-\frac{n}{2}}\left|\int_{z_-}^{z_+} b_r(t,u)\,du - v_{r-2}^{+}(t,0) - v_{r-2}^{-}(t,0)\right| + o(\lambda^{-\frac{n}{2}}), \qquad (38)$$

где

$$b_k(t,u) = \varphi_k(t,u) - a_k(t,u),\ \ v_k^{\pm}(t,0) = \int_0^{\infty} V_k^{\pm}(t,s)\,ds \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 справедливы асимптотические представления* ($\lambda \to \infty$)

$$\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}P\{\tau_\lambda \leqslant t, \zeta_\lambda(\tau_\lambda) < x\} = \sum_{r=0}^{n}\lambda^{-\frac{r}{2}}\int_{z_-}^{z_+} M(x-u)\,b_r(t,u)\,du -$$

$$-\sum_{r=0}^{n+1}\lambda^{-\frac{r+2}{2}}\int_0^{z}[M(x-z_- - s)V_r^-(t,s\sqrt{\lambda}) + M(x-z_+ + s)V_r^+(t,s\sqrt{\lambda})]\,ds +$$

$$+ o(\lambda^{-\frac{n}{2}})\,(x < z_-(t),\ z = z(t) = z_+(t) - z_-(t)); \qquad (39)$$

$$\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}P\{\tau_\lambda \leqslant t, \zeta_\lambda(\tau_\lambda) > x\} = -\sum_{r=0}^{n}\lambda^{-\frac{r}{2}}\int_{z_-}^{z_+} N(x-u)\,b_r(t,u)\,du -$$

$$-\sum_{r=0}^{n+1}\lambda^{-\frac{r+1}{2}}\int_0^{z}[N(x-z_- - s)V_r^-(t,s\sqrt{\lambda}) +$$

$$+ N(x-z_+ + s)V_r^+(t,s\sqrt{\lambda})]\,ds + o(\lambda^{-\frac{n}{2}}) \qquad (x > z_+(t)). \qquad (40)$$

В теореме 4 найдены первые члены разложения для $b_\lambda(t, x)$ в том случае, когда границы $z_\pm$ постоянны.

Теорема 4. *Если $z_\pm$ не зависят от t и выполняются условия теоремы 1 с $n = 1$, тогда при $x \in [z_- + \varepsilon,\ z_+ - \varepsilon]$ справедливо асимптотическое представление* ($\lambda \to \infty$)

$$b_\lambda(t,x) = b_0(t,x) + \lambda^{-\frac{1}{2}}b_1(t,x) + o(\lambda^{-\frac{1}{2}});$$

$$b_0(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\varphi_0(t, x - 2z_k),$$

$$b_1(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Pi_3}{6D^2}[(-1)^k x\varphi_0''(t, x-2z_k) + 2\varphi_0'(t, x-2z_k)] +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{q_1^-}{c^- + q_0^-}[(-1)^k k\varphi_0'(t, x-2z_k) - \varphi_0'(t, x-2z_{2k+1})] +\right.$$

$$\left.+\frac{q_1^+}{c^+ + q_0^+}[(-1)^k k\varphi_0'(t, x-2z_k) + \varphi_0'(t, x-2z_{2k+1})]\right\},$$

$$q_r^{\pm} = \int_0^{\infty}(-y)^r K_\pm(\pm y)\,dy,$$

$$z_{2k} = kz, \quad z_{2k+1} = kz + z_+, \quad z = z_+ - z_-.$$

Из теоремы 4 вытекает, что для плотности

$$a_\lambda^\pm(t, x) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} P\{\zeta_\lambda(t) < x, \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \zeta_\lambda(s) \geqslant z_+\}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} P\{\zeta_\lambda(t) < x, \min\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \zeta_\lambda(s) \leqslant z_-\} \end{cases}$$

при выполнении условий теоремы 1 с $n = 1$ имеет место асимптотическое разложение $(\lambda \to \infty)$

$$a_\lambda^\pm(t, x) = a_0^\pm(t, x) + \lambda^{-\frac{1}{2}} a_1^\pm(t, x) + o(\lambda^{-\frac{1}{2}})(x \lesseqgtr z_\pm \mp \varepsilon);$$

$$a_0(t, x) = \varphi_0(t, x - 2z_\pm);$$

$$a_1^\pm(t, x) = \varphi_1(t, x - 2z_\pm) + \frac{\Pi_3 z_\pm}{3D^2} \varphi_0''(t, x - 2z_\pm) +$$

$$+ \left(\mp \frac{2q_1^\mp}{c^\pm + q_0^\mp} - \frac{2\Pi_3}{3D^2} \right) \varphi_0'(t, x - 2z_\pm).$$

В заключение автор выражает искреннюю признательность В. С. Королюку за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Keilson, The first passage time densiti for homogeneous skeepfree walks on the continuum, Ann. math. statist., 34, N 3, 1963, 1003—1011.
2. J. Kemperman, A Winer-Nopf type for a general random walk a two-sided boundary Ann. math. statist., 34, N 4, 1963, 1168—1193.
3. В. М. Золотарев, Момент первого прохождения уровня и поведения на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями, Теор. вероят. и ее примен. т. 9, № 4, 1964, 724—733.
4. Д. В. Гусак, К асимптотике распределения времени первого выхода однородного процесса с независимыми приращениями, УМЖ, т. 16, № 4, 1964, 463—474.
5. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полуоси с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, № 5, 1958, 3—120.

Поступила 1.VI 1965 г.
Киев