Об одном новом методе приближения функций

В. К. Дзядык

1°. Недавно появилась замечательная работа Ньюмена [1], в которой доказано, что точный порядок приближения на отрезке $[-1,1]$ функции $|x|$ при помощи рациональных функций $R_n(x)$ порядка n вида

$$R_n(x) = \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0x^l + b_1x^{l-1} + \ldots + b_l}, \quad 0 \leqslant k,\ l \leqslant n; \quad a_0 \neq 0 \quad b_0 \neq 0$$

равен $e^{-\sqrt{n}}$, т. е. поразительно лучше, чем приближение этой же функции алгебраическими многочленами. В частности, в работе [1] доказано, что если положить

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x + \xi^k), \qquad \xi = \xi(n) = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}, \tag{1}$$

$$R_n^*(x) = x\frac{P_n(x) - P_n(-x)}{P_n(x) + P_n(-x)}, \tag{2}$$

то будут иметь место неравенства

$$\prod_{m=1}^{n}\frac{1-\xi^m}{1+\xi^m} < e^{-\sqrt{n}}\ (n \geqslant 4); \qquad \left|\frac{P_n(-x)}{P_n(x)}\right| \leqslant e^{-\sqrt{n}}, \qquad x \in [e^{-\sqrt{n}}, 1]; \tag{3}$$

$$||x| - R_n^*(x)| \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{4}$$

В настоящей статье мы покажем, что при помощи функций $R_n^*(x)$ можно строить рациональные ядра $2n$-го порядка, которые в смысле сосредоточения особенности возле точки $x = 0$ являются несравнимо лучшими, чем любые полиномиальные ядра того же порядка, и укажем пути применения этого результата к теории приближения функций. В конце статьи мы при помощи очень простых рассуждений найдем точную по порядку оценку снизу наилучшего приближения функции $|x|$.

2°. Введем при каждом натуральном n следующие ядра:

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left|\frac{R_n^*(x)}{x}\right| = \frac{P_n(x)P_n'(-x) + P_n(-x)P_n'(x)}{[P_n(x) + P_n(-x)]^2}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Ядра $K_n(x)$ обладают следующими свойствами:*

1) *$K_n(x)$ являются четными рациональными функциями порядка* $4\left[\frac{n}{2}\right]$;

2) *числитель* $P_n(x)P'_n(-x)+P_n(-x)P'_n(x)$ *в ядре* $K_n(x)$ *представляет собой четный алгебраический многочлен степени* $2n-2$ *с корнями* $\pm x_j$ $(j=1, 2, \dots, n-1)$, *удовлетворяющими неравенствам*

$$e^{-\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\xi^{n-1}<x_1<\xi^{n-2}<x_2<\xi^{n-3}<\dots<\xi^1<x_{n-1}<1; \qquad (6)$$

2′) *знаменатель* $[P_n(x)+P_n(-x)]^2$ *в ядре* $K_n(x)$ *представляет собой четный алгебраический многочлен степени* $4\left[\frac{n}{2}\right]$ *с двойными корнями*

$$\pm iy_1, \qquad \pm iy_2, \dots, \pm iy_{\left[\frac{n}{2}\right]}, \qquad y_1<y_2<\dots<y_{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

которые расположены на мнимой оси и удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}(y_k\xi^{j-n+1})=(2k-1)\frac{\pi}{2}; \qquad k=1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]. \qquad (7)$$

В частности,

$$\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}(y_1\xi^{j-n+1})=\frac{\pi}{2}, \quad y_1\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}, \quad y_1>\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}} \quad (n\geqslant 4), \qquad (8)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}(y_2\xi^{j-n+1})=\frac{3\pi}{2}, \quad y_2\sim 3y_1\sim\frac{3\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}, \qquad (8')$$

кроме того, при четных n

$$\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi^{n-1}}{y_{\frac{n}{2}-k}}\xi^{j-n+1}\right)=\sum_{l=0}^{n-1}\operatorname{arcctg}(y_{\frac{n}{2}-k}\xi^{l-n+1})=$$

$$=\frac{n\pi}{2}-\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}(y_{\frac{n}{2}-k}\xi^{j-n+1})=$$

$$=\frac{n\pi}{2}-\left[2\left(\frac{n}{2}-k\right)-1\right]\frac{\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}=\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}(y_{k+1}\xi^{j-n+1})$$

так, что

$$y_{\frac{n}{2}-k}=\frac{\xi^{n-1}}{y_{k+1}}, \quad k=0, 1, \dots, \frac{n}{2}, \quad y_{\frac{n}{2}}\sim\frac{2}{\pi}\sqrt{n};\ y_{\frac{n}{2}}<\sqrt{n} \quad (n\geqslant 4), \qquad (9)$$

а при нечетных n

$$\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi^{n-1}}{y_{\frac{n-1}{2}-k}}\xi^{j-n+1}\right)=(k+1)\pi; \quad \frac{\xi^{n-1}}{y_{\frac{n-1}{2}}}\sim 2y_1; \quad y_{\frac{n-1}{2}}\sim\frac{\sqrt{n}}{\pi}; \qquad (9')$$

$$y_{\frac{n-1}{2}}<\frac{\sqrt{n}}{2};$$

$$3)\ \int_{-1}^{1} K_n(x)\,dx = 1; \qquad K_n(0) = \frac{e^{\sqrt{n}} - 1}{2\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)} \sim \frac{\sqrt{n}}{2} e^{\sqrt{n}}; \tag{10}$$

$$4)\ \int_{e^{-\sqrt{n}}}^{1} |K_n(x)|\,dx < 3e^{-\sqrt{n}}, \qquad n \geqslant 4; \tag{11}$$

$$5)\ \int_{-e^{-\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n}}} |K_n(x)|\,dx = \int_{-e^{-\sqrt{n}}}^{e^{-\sqrt{n}}} K_n(x)\,dx = 1 - 2\int_{e^{-\sqrt{n}}}^{1} K_n(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 6e^{-\sqrt{n}} < 2, \qquad n \geqslant 4. \tag{12}$$

Доказательство. 1) Первое свойство очевидно.

2) На основании (1) видим, что $P_n(x) > 0$ при всех $x > -\xi^{n-1}$ и что единственными простыми корнями многочлена $P_n(x)$ являются числа $-\xi^{n-1}, -\xi^{n-2}, \ldots, -\xi, -1$. Поэтому в этих корнях имеем

$$P'_n(-\xi^{n-1}) > 0, \quad P'_n(-\xi^{n-2}) < 0, \quad P'_n(-\xi^{n-3}) > 0, \ldots,$$
$$(-1)^{n-1}P'_n(-\xi) < 0, \quad (-1)^{n-1}P'_n(-1) > 0.$$

В силу этого, полагая

$$P_n(x)\,P'_n(-x) + P_n(-x)\,P'_n(x) = \pi_n(x)$$

и учитывая, что $P_n(x) > 0$ при всех $x > 0$, получим

$$\pi_n(\xi^{n-1}) = P_n(\xi^{n-1})\,P'_n(-\xi^{n-1}) > 0, \quad \pi_n(\xi^{n-2}) < 0,$$
$$\pi_n(\xi^{n-3}) > 0, \ldots, (-1)^{n-1}\,\pi_n(\xi) < 0, \quad (-1)^{n-1}\,\pi_n(1) > 0.$$

Отсюда и следует, что расположенные в возрастающем порядке положительные корни x_i многочлена $P_n(x)\,P'_n(-x) + P_n(-x)\,P'_n(x) = \pi_n(x)$ удовлетворяют неравенствам (6).

2′) Очевидно, что для точек iy мнимой оси числа $P_n(iy)$ и $P_n(-iy)$ равны по модулю, а аргументы этих чисел отличаются друг от друга только знаком. Поэтому сумма $P_n(iy) + P_n(-iy)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\arg P_n(iy) = -\arg P_n(-iy) = \sum_{l=0}^{n-1} \arg(\xi^l + iy) = \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{arctg}\frac{y}{\xi^l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{arctg}(y\xi^{l-n+1}) = (2k-1)\frac{\pi}{2} \quad k = 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right].$$

Учитывая теперь, что при малых $a > 0$ $\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$, получаем

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{arctg}(y_1\xi^{i-n+1}) \sim \frac{y_1}{\xi^n}\,\frac{1-\xi^n}{1-\xi} =$$

$$= \frac{y_1}{e^{-\sqrt{n}}}\,\frac{1 - e^{-\sqrt{n}}}{1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \sim \frac{y_1\sqrt{n}}{e^{-\sqrt{n}}}, \qquad y_1 \sim \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}},$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}\,\xi^{l+1-n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}\,\frac{\xi(1-\xi^n)}{\xi^n(1-\xi)} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n}\left(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} < \frac{1}{1-\frac{1}{2\sqrt{n}}} < \frac{4}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Этим соотношения (7) и (8) доказаны. Соотношения (9) и (9′) следуют из (7), если учесть, что при любом $x > 0$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

3) Используя равенства (5), (2) и (1), находим

$$\int_{-1}^{1} K_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{R_n^*(x)}{x}\Big|_{-1}^{1} = R_n^*(1) = \frac{P_n(1)}{P_n(1)} = 1,$$

а также

$$K_n(x) = \frac{\sum\limits_{0}^{n-1}\frac{1}{-x+\xi^k} + \sum\limits_{0}^{n-1}\frac{1}{x+\xi^k}}{\left(\sqrt{\frac{P_n(x)}{P_n(-x)}} + \sqrt{\frac{P_n(-x)}{P_n(x)}}\right)^2},$$

$$K_n(0) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\xi^k} = \frac{\xi^{-n}-1}{2(\xi^{-1}-1)} = \frac{e^{\sqrt{n}}-1}{2\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)} \sim \frac{\sqrt{n}}{2}e^{\sqrt{n}},$$

и свойство 3) доказано.

4) Для доказательства неравенства (11) положим

$$\alpha_n(x) = \frac{P_n(-x)}{P_n(x)} \tag{13}$$

и убедимся сначала, что при всех $n \geqslant 4$ имеют место неравенства

$$|\alpha_n(x)| < \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{6} & \text{при } x \in [\xi^{n-1}, \xi^{n-2}] \cup [\xi, 1], \\[2mm] \dfrac{1}{2n}e^{-\sqrt{n}} & \text{при } x \in [\xi^{n-2}, \xi]. \end{cases} \tag{14}$$

Действительно, полагая $x = \xi^{j+\alpha}$, где j принимает одно из значений $0, 1, 2, \ldots, n-2$ и $0 < \alpha < 1$ (случаи, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ неинтересны, ибо тогда $\alpha_n(x) = 0$), учитывая первое из неравенств (3), получим

$$|\alpha_n(x)| = |\alpha_n(\xi^{j+\alpha})| = \prod_{k=0}^{j}\frac{\xi^k - \xi^{j+\alpha}}{\xi^k + \xi^{j+\alpha}}\prod_{k=j+1}^{n-1}\frac{\xi^{j+\alpha}-\xi^k}{\xi^{j+\alpha}+\xi^k} =$$

$$= \frac{(1-\xi^\alpha)(1-\xi^{1-\alpha})}{(1+\xi^\alpha)(1+\xi^{1-\alpha})}\prod_{l=1}^{j}\frac{1-\xi^{l+\alpha}}{1+\xi^{l+\alpha}}\prod_{l=1}^{n-j-2}\frac{1-\xi^{l+1-\alpha}}{1+\xi^{l+1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\,\frac{1-\alpha}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{(1+\xi)^2}\prod_{l=1}^{j}\frac{1-\xi^{l+1}}{1+\xi^{l+1}}\prod_{l=1}^{n-j-2}\frac{1-\xi^{l+1}}{1+\xi^{l+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^2}\prod_{m=1}^{n}\frac{1-\xi^m}{1+\xi^m}\cdot\frac{1+\xi}{1-\xi}\prod_{m=j+2}^{n}\frac{1+\xi^m}{1-\xi^m}\prod_{m=2}^{n-j-1}\frac{1-\xi^m}{1+\xi^m}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\sqrt{n}}}{4n}\,\frac{1}{(1-\xi)^2}\prod_{l=1}^{n-j-1}\frac{1-\xi^l}{1+\xi^l}\,\frac{1+\xi^{n+1-l}}{1-\xi^{n+1-l}}\,. \tag{15}$$

При помощи этого неравенства после некоторых подсчетов (различных для случаев $n=4$ и $n\geqslant 5$) убедимся, что при всех $x=\xi^{j+\alpha}\in[\xi^{n-1},\xi^{n-2}]\cup[\xi,1]$ (т. е. при $j=n-2$ или $j=0$) будет

$$|\alpha_n(x)|\leqslant\frac{e^{-\sqrt{n}}}{4n}\cdot\frac{1}{(1-\xi)^2}\cdot\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+\xi^n}{1-\xi^n}<\frac{e^{-\sqrt{n}}}{4n}\,\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}\,\frac{1+\xi^n}{(1+\xi)(1-\xi^n)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{-\sqrt{n}}}{4n}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}\,\frac{1+e^{-\sqrt{n}}}{(1+e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}})(1-e^{-\sqrt{n}})}\leqslant\frac{e^{-\sqrt{n}}}{6}\,,$$

а при всех $x\in[\xi^{n-2},\xi]$, т. е. при $j=1,2,\dots,n-3$, будет

$$|\alpha_n(x)|\leqslant\frac{e^{-\sqrt{n}}}{4n}\,\frac{1}{(1-\xi)^2}\,\frac{(1-\xi)(1-\xi^2)(1+\xi^n)(1+\xi^{n-1})}{(1+\xi)(1+\xi^2)(1-\xi^n)(1-\xi^{n-1})}<$$

$$<\frac{e^{-\sqrt{n}}}{4n}\cdot\frac{1\,(1+e^{-\sqrt{n}})(1+e^{-\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}})}{(1+e^{-\frac{2}{\sqrt{n}}})(1-e^{-\sqrt{n}})(1-e^{-\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}})}<\frac{e^{-\sqrt{n}}}{2n}\,.$$

Этим неравенства (14) доказаны. Принимая теперь во внимание второе из неравенств (3) и учитывая, что

$$\alpha_n'(x)=-\frac{P_n(x)\,P_n'(-x)+P_n(-x)\,P_n'(x)}{[P_n(x)]^2}\,, \tag{16}$$

используя свойство (2) ядра $K_n(x)$ и неравенства (3) и (14), получим

$$\int\limits_{e^{-\sqrt{n}}}^{1}|K_n(x)|\,dx=\int\limits_{e^{-\sqrt{n}}}^{1}\left|\frac{P_n(x)\,P_n'(-x)+P_n(-x)\,P_n'(x)}{\left|1+\frac{P_n(-x)}{P_n(x)}\right|^2P_n^2(x)}\right|dx<$$

$$<\frac{1}{(1-e^{-\sqrt{n}})^2}\int\limits_{e^{-\sqrt{n}}}^{1}|\alpha_n'(x)|\,dx=\frac{1}{(1-e^{-\sqrt{n}})^2}\left|-\int\limits_{e^{-\sqrt{n}}}^{x_1}+\int\limits_{x_1}^{x_2}-\int\limits_{x_2}^{x_3}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+(-1)^n\int\limits_{x_{n-1}}^{1}\alpha_n'(x)\,dx\right|=\frac{2}{(1-e^{-\sqrt{n}})^2}\left[\frac{1}{2}\,|\alpha_n(e^{-\sqrt{n}})|+|\alpha_n(x_1)|+\right.$$

$$\left.+|\alpha_n(x_2)|+\dots+|\alpha_n(x_{n-1})|\right]\leqslant\frac{2e^{-\sqrt{n}}}{(1-e^{-\sqrt{n}})^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{n-3}{2n}+\frac{1}{6}\right)=$$

$$= 2e^{-\sqrt{n}} \frac{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2n}\right)}{(1 - e^{-\sqrt{n}})^2} < 3e^{-\sqrt{n}}.$$

Этим неравенство (11) установлено.

5) Соотношение (12) немедленно следует из свойств 2), 3) и 4) ядра $K_n(x)$.

Теорема полностью доказана.

Замечания. 1. Принимая во внимание, что в случае четных n при всех $x \geqslant 1$ имеют место неравенства

$$|P_n'(-x)| \leqslant P_n'(x) \leqslant \frac{nP_n(x)}{x} \leqslant nP_n(x);$$

$$P_n(-x) = |P_n(-x)| \leqslant P_n(x)$$

и, значит, также неравенство

$$|K_n(x)| = \frac{|P_n(x)P_n'(-x) + P_n(-x)P_n'(x)|}{[P_n(x) + P_n(-x)]^2} < 2n, \qquad |x| \geqslant 1,$$

видим, что на всей числовой оси свойствами, аналогичными свойствам ядер $K_n(x)$, будут обладать, например, следующие рациональные ядра

$$K_n^*(x) = \gamma_n K_n(x) \frac{1}{1 + \left(\frac{xe^{\sqrt{n}}}{n}\right)^2}, \qquad n \text{ — четное,} \tag{17}$$

где множитель γ_n выбран так, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n^*(x)\,dx = 1$ (и, следовательно, $\gamma_n \to 1$ при $n \to \infty$).

2. Свойствами, совершенно аналогичными свойствам ядер $K_n(x)$, обладают также построенные при их помощи следующие периодические ядра

$$\widetilde{K}_n(t) = \widetilde{\gamma}_n K_n\left(\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\right) \cos^2 \frac{t}{2} = \widetilde{\gamma}_n K_n\left(\sin \frac{t}{2}\right) \cos^2 \frac{t}{2}, \tag{18}$$

где $\widetilde{\gamma}_n$ опять берется так, чтобы $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{K}_n(t)\,dt = 1$, т. е. в силу замены $1 - \cos t = 2x^2$, $\sin \frac{t}{2} = x$

$$\widetilde{\gamma}_n = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n\left(\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\right) \cos^2 \frac{t}{2}\,dt\right)^{-1} =$$

$$= \left(2\int\limits_{-0}^{1} K_n(x)(1 - x^2)\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx\right)^{-1} \to \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty$$

так, что, например,

$$\int\limits_{\pi e^{-\sqrt{n}}}^{\pi} |\widetilde{K}_n(t)|\,dt = 2\widetilde{\gamma}_n \int\limits_{\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-\sqrt{n}}\right)}^{1} |K_n(x)| \sqrt{1 - x^2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\widetilde{\gamma}_n \int\limits_{e^{-\sqrt{n}}}^{1} |K_n(x)|\,dx \leqslant 6\widetilde{\gamma}_n e^{-\sqrt{n}}$$

при $n \geqslant 4$ и т. д.

3°. Покажем, что полученные в п. 2 результаты дают возможность строить при помощи элементарных операций многочлены хорошего приближения для любой непрерывной функции. Предварительно нам еще потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — любая непрерывная на $[-1,1]$ функция и $f^*(x)$ — функция, определенная на $[-2,2]$ при помощи равенств*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-1) & \text{при } x \in [-2, -1], \\ f(x) & \text{при } x \in [-1,1], \\ f(1) & \text{при } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Тогда при любом $x \in [-1,1]$ имеет место неравенство

$$\left| f(x) - \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} f^*(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt \right| \leqslant 6\omega\left(f; e^{-\sqrt{n}}\right) + 18e^{-\sqrt{n}}, \tag{19}$$

где $M = \|f\|_C = \|f^*\|_C$ и $\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Доказательство. Действительно, учитывая что

$$f(x) = \frac{1}{3} f(x) \int\limits_{-3}^{3} K_n\left(\frac{t}{3}\right) dt = \frac{f(x)}{3}\left[\int\limits_{x-2}^{x+2} K_n\left(\frac{t}{3}\right) dt + J_1\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt + \frac{f(x)}{3} J_1, \tag{20}$$

где вследствие (11)

$$|J_1| = \left| \int\limits_{-3}^{x-2} + \int\limits_{x+2}^{3} K_n\left(\frac{t}{3}\right) dt \right| \leqslant 6 \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} |K_n(u)|\,du \leqslant 18e^{-\sqrt{n}}, \tag{21}$$

и что при $t \in [0,2]$ модули непрерывности функций $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают, для всех $x \in [-1,1]$, используя неравенства (12) и (11), получим

$$\left| f(x) - \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} f^*(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt \right| = \left| \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} |f^*(x) - f^*(t)|\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{f(x)}{3} J_1 \right| \leqslant \frac{1}{3} \int\limits_{x-3e^{-\sqrt{n}}}^{x+3e^{-\sqrt{n}}} |f^*(x) - f^*(t)| \left| K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) \right| dt +$$

$$+ \frac{2}{3} M \left[\int\limits_{-2}^{x-3e^{-\sqrt{n}}} + \int\limits_{x+3e^{-\sqrt{n}}}^{2} \left| K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt \right| \right] + 6Me^{-\sqrt{n}} <$$

$$\leqslant \omega(f; 3e^{-\sqrt{n}}) \int\limits_{-e^{-\sqrt{n}}}^{e^{-\sqrt{n}}} K_n(u)\,du + 4M \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} |K_n(u)|\,du + 6Me^{-\sqrt{n}} \leqslant$$

$$\leqslant 6\omega(f; e^{-\sqrt{n}}) + 18Me^{-\sqrt{n}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если* $\pi_m(x)$ — *заданный на отрезке* $[x_j, x_{j+1}] \in [-1,1]$ *многочлен степени* m, *то*

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \pi_m(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt = A_{m-1}(x) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Bigg\{ B_{m,k}(x) \ln\left[(x-t)^2 + 9y_k^2\right]_{x_j}^{x_{j+1}} +$$

$$+ C_{m+1,k}(x) \operatorname{arctg} \frac{x-t}{3y_k}\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} + D_{m,k}(x) \frac{1}{(x-t)^2 + 9y_k^2}\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} +$$

$$+ E_{m,k}(x) \frac{x-t}{(x-t)^2 + 9y_k^2}\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} \Bigg\}, \tag{22}$$

где $A_\nu(x)$, $B_{\nu,k}(x)$, $C_{\nu,k}(x)$, $D_{\nu,k}(x)$ *и* $E_{\nu,k}(x)$ — *многочлены степени* ν *и* $\pm iy_k$ — *корни знаменателя ядра* $K_n(x)$.

Действительно, в силу свойства 2′) ядро $K_n(x)$ можно представить в виде

$$K_n(x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{\alpha_k x + \beta_k}{x^2 + y_k^2} + \frac{\gamma_k x + \delta_k}{(x^2 + y_k^2)^2} \right], \tag{23}$$

а также в виде

$$K_n(x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{a_k}{x - iy_k} + \frac{\bar{a}_k}{x + iy_k} + \frac{b_k}{(x - iy_k)^2} + \frac{\bar{b}_k}{(x + iy_k)^2} \right], \tag{23'}$$

где α_k, β_k, γ_k и δ_k — действительные числа, а a_k и b_k, — вообще говоря, комплексные числа.

Поэтому, полагая $\frac{x-t}{3} = u$ и, $\pi_m(x) = \sum\limits_0^m c_i x^i$, получим

$$\pi_m(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) = \pi_m(x - 3u)\, K_n(u) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{\alpha_k u + \beta_k}{u^2 + y_k^2} \sum_{i=0}^{m} c_i (x - 3u)^i + \frac{\gamma_k u + \delta_k}{(u^2 + y_k^2)^2} \sum_{i=0}^{m} c_i (x - 3u)^i \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{\alpha_k u + \beta_k}{u^2 + y_k^2} + \frac{\gamma_k u + \delta_k}{(u^2 + y_k^2)^2} \right] (d_0 x^m + d_1 x^{m-1} u + \ldots + d_{m-1} u^{m-1} + d_m u^m) =$$

$$= P_{m-1}(x, u) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{Q_m(x)\, u + R_m(x)}{u^2 + y_k^2} + \frac{S_m(x)\, u + T_m(x)}{(u^2 + y_k^2)^2} \right],$$

где $d_\nu = (-1)^\nu 3^\nu c_\nu$ и $P_{m-1}, Q_m, \ldots, T_m$ — некоторые многочлены двух и одной переменных степеней, указанных нижними индексами, и, значит,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \pi_m(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt = \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_{m-1}\left(x, \frac{x-t}{3}\right) dt -$$

$$-3 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left\{ \frac{1}{2} Q_m(x) \ln \left[\left(\frac{x-t}{3}\right)^2 + y_k^2 \right] \Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} + \frac{1}{y_k} R_m(x) \operatorname{arctg} \frac{x-t}{3y_k} \Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} - \right.$$

$$- \frac{1}{2} S_m(x) \frac{1}{\left(\frac{x-t}{3}\right)^2 + y_k^2} \Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} +$$

$$\left. + T_m(x) \left[\frac{1}{2y_k^2} \frac{x-t}{3\left[\left(\frac{x-t}{3}\right)^2 + y_k^2\right]} + \frac{1}{2y_k^3} \operatorname{arctg} \frac{x-t}{3y_k} \right] \Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} \right\}.$$

Отсюда и следует равенство (22).

Укажем теперь последовательность элементарных операций, позволяющих хорошо приближать любую непрерывную функцию.

Отправляясь от функции $f(x)$ и заданного числа $\varepsilon > 0$, разобьем отрезок $[-1, 1]$ каким-нибудь способом на части

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_j, x_{j+1}], \ldots, [x_N, x_{N+1}], \quad x_0 = -1, \; x_{N+1} = 1$$

и на каждой из частей $[x_j, x_{j+1}]$ построим какой-нибудь многочлен $\pi_j(x)$ степени $m = m(j)$ так, чтобы при всех $x \in [x_j, x_{j+1}]$ иметь

$$|f(x) - \pi_j(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [x_j, x_{j+1}], \tag{24}$$

и, взяв какое-нибудь натуральное число $n \geqslant 4$, удовлетворяющее неравенствам $\omega(f; e^{-\sqrt{n}}) < \varepsilon$, $Me^{-\sqrt{n}} < \varepsilon$, положим

$$\pi^*(x) = \begin{cases} \pi_0(-1), & \text{если } x \in [-2, -1], \\ \pi_j(x), & \text{если } x \in [x_j, x_{j+1}), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N, \\ \pi_N(1), & \text{если } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

В силу неравенств (11), (12) и (24) получим,

$$\left| \frac{1}{3} \int_{-2}^{2} f^*(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt - \frac{1}{3} \int_{-2}^{2} \pi^*(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt \right| < \varepsilon \int_{-1}^{1} |K_n(u)|\, du < 3\varepsilon,$$

и значит, на основании леммы 1

$$\left| f(x) - \frac{1}{3} \int_{-2}^{2} \pi^*(t)\, K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt \right| < 3\varepsilon + 6\omega(f; e^{-\sqrt{n}}) + 18Me^{-\sqrt{n}} < 27\varepsilon. \tag{25}$$

Если теперь для различных натуральных n раз и навсегда вычислить корни $iy_j = iy_j(n)$ настолько точно, чтобы правая часть (23) отличалась при этих корнях от $K_n(x)$ меньше, чем на $e^{-\sqrt{n}}$, и составить таблицу многочленов (может быть, достаточно высоких степеней), которые достаточно хорошо приближают функции

$$\ln(x^2 + 9y_j^2),\ \operatorname{arctg}\frac{x}{3y_j}\ \text{и}\ \frac{1}{x^2+9y_j^2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \tag{26}$$

то тогда на основании леммы 2 можно будет построить алгебраические многочлены, которые хорошо приближают каждый из интегралов

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \pi^*(t) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \pi_j(t) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt,$$

их сумму

$$\sum_0^N \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \pi^*(t) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt + \int\limits_{-2}^{-1} \pi_0(-1) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt +$$

$$+ \int\limits_{1}^{2} \pi_N(1) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt = \int\limits_{-2}^{2} \pi^*(t) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt,$$

и, значит, в силу (26) и саму функцию $f(x)$.

Замечания. 1. Отметим, что вследствие равенства (23′) интеграл $\frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} f^*(t) K_n\left(\frac{x-t}{3}\right) dt$, фигурирующий в лемме 1 [см. равенство (19)], представляет собою функцию аналитическую во всей комплексной плоскости, за исключением корней $\pm iy_k$ $\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ ядра $K_n(x)$.

2. Практический недостаток изложенного метода состоит в то, что для приближения функций (26) с достаточно хорощей точностью потребуется брать многочлены $P_N(x)$ степеней порядка не ниже $N = \frac{1}{10}\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}$.

Проще всего справедливость этого замечания проверить на функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{3y_1}. \tag{27}$$

Действительно, многочлен $P_N(x)$, хорошо приближающий функцию $f(x)$, будет, очевидно, удовлетворять условиям:

$$P_N(0) = \frac{\varepsilon}{4}; \qquad P_N(3y_1) > \frac{\pi-\varepsilon}{4}; \qquad |P_N(x)| \leqslant \frac{\pi+\varepsilon}{2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Первые из этих двух соотношений в силу (8) показывают, что найдется по крайней мере одна точка $\xi \in (0, 3y_1)$ такая, что

$$P'_N(\xi) > \frac{\pi - 2\varepsilon}{4\cdot 3y_1} \asymp \frac{\pi-2\varepsilon}{12}\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{\pi}\varepsilon\right)\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}.$$

С другой стороны, в силу неравенства Бернштейна

$$P'_N(\xi) \leqslant \frac{N}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\pi+\varepsilon}{2}.$$

Из этих двух неравенств и следует, что при больших n число N должно удовлетворять условию

$$N > (1-\varepsilon)\frac{1}{3\pi}\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}} > \frac{\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}{10}.$$

4°. Покажем, наконец, что при помощи рассуждений, близких тем, которые дали нам возможность построить ядра $K_n(x)$, можно очень просто получить точную по порядку оценку снизу наилучшего приближения многочленами функции $|x|$.

Для этого отметим сначала, что если некоторый алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени $n \geqslant 6$ удовлетворяет условию

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| = |P_n(x_0)| = M, \qquad x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], \tag{28}$$

то тогда

$$\min_{x_0 - \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{1}{2n}} |P_n(x)| \geqslant \frac{M}{3}. \tag{29}$$

Действительно, если бы неравенство (29) не выполнялось, то нашлась бы точка $\xi \in U_{x_0} = \left[x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}\right] \subset \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ такая, что

$$|P'_n(\xi)| \geqslant \frac{M - \frac{1}{3}M}{\frac{1}{2n}} = \frac{4}{3}Mn > \frac{Mn}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

и, следовательно, мы пришли бы к противоречию с неравенством Бернштейна для модуля производной от алгебраического многочлена.

Без ограничения общности можем, очевидно, считать, что многочлен $P_n(x)$, хорошо приближающий функцию $|x|$, является четным, обращается в нуль при $x = 0$ и удовлетворяет условию

$$\left||x| - P_n(x)\right| < \frac{1}{n}. \tag{30}$$

Убедимся, что в таком случае при всех $x \in [-1, 1]$ будет иметь место неравенство

$$\left|\frac{P_n(x)}{x}\right| \leqslant 9. \tag{31}$$

В самом деле, предполагая от противного, что

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{P_n(x)}{x}\right| = \left|\frac{P_n(x_0)}{x_0}\right| = M > 9,$$

учитывая, что в силу (30) $|P_n(x)| \leqslant 2$, заключаем, что $x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, и что, следовательно, на основании (29),

$$\min_{x\in U_{x_0}} \left|\frac{P_n(x)}{x}\right| > 3; \qquad |P_n(x)| > 3|x|, \qquad x \in U_{x_0} = \left[x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}\right].$$

$$\max_{x \in U_{x_0}} | P_n(x) - |x|| > 2 \max_{x_0 \in U_{x_0}} |x| \geqslant \frac{1}{n},$$

т. е. приходим в противоречие с неравенством (30). Этим неравенство (31) доказано. В силу этого неравенства и неравенства Бернштейна при всех $x \in [0, \frac{1}{4}]$ будет

$$\left| \left(\frac{P_n(x)}{x} \right)' \right| \leqslant \frac{9n}{\sqrt{1 - x^2}} < 10n,$$

$$\left| \frac{P_n(x)}{x} \right| = \left| \int_0^x \left(\frac{P_n(t)}{t} \right)' dt \right| \leqslant 10nx, \qquad |P_n(x)| \leqslant 10nx^2$$

и, следовательно,

$$\max | |x| - P_n(x) | \geqslant \frac{1}{12n} - 10n \left(\frac{1}{12n} \right)^2 = \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{n}, \tag{32}$$

что и требовалось доказать. Путем некоторых дополнительных несложных рассуждений постоянную $\frac{1}{72}$ в неравенстве (32) можно значительно увеличить.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. I. Newman, Rational Approximation to $|x|$, Michigan Math. J., 11, N 1, 1964, 11—14.

Поступила 27.IV 1965 г.
Киев