1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 18, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс

И. И. Ежов

Целью настоящей работы является изучение однородного процесса Маркова $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ (первые две компоненты целочисленны, а третья—неотрицательна), переходные вероятности которого имеют вид:

$$P\{(i, k, x)\xrightarrow{\Delta t}(i, k, x+\Delta t)\} = (1-\nu_i\Delta t)\frac{1-F_k(x+\Delta t)}{1-F_k(x)} + o(\Delta t),$$

$$P\{(i, k, x)\xrightarrow{\Delta t}(j, k, x+\Delta t)\} = \nu_i\nu_{ij}\frac{1-F_k(x+\Delta t)}{1-F_k(x)}\Delta t + o(\Delta t). \qquad (1)$$

$$P\{(i, k, x)\xrightarrow{\Delta t}(l, m, 0)\} = \frac{F_k(x+\Delta t)-F_k(x)}{1-F_k(x)}b_{ik}^{lm}(x) + o(\Delta t),$$

где $F_k(x)$ — непрерывные функции распределений, а ν_i, ν_{ij} и $b_{ik}^{lm}(x)$ — неотрицательные константы и функции, причем

$$\sum_j \nu_{ij} = \sum_l \sum_m b_{ik}^{lm}(x) = 1.$$

Заметим, что в случае $F_k(x)=0$ процесс $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ сводится к однородной цепи Маркова $\xi(t)$; если $\nu_i = 0$, то мы имеем полумарковский процесс $\{\eta(t), \zeta(t)\}$. В общем же случае $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ описывает поведение некоторой физической системы, эволюционирующей по траекториям цепи $\xi(t)$ и подвергающейся «возмущениям», моменты появления которых определяются полумарковским процессом $\{\eta(t), \zeta(t)\}$.

В § 1 находится эргодическое распределение процесса $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ в предположении, что но существует. В § 2 обосновываются результаты § 1. В § 3 и § 4 рассматривается распределение времени достижения процессом $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ заданной области своего фазового пространства. В § 5 приведены примеры.

Заметим, что процессы, близкие к рассматриваемому («линейчатые» марковские процессы), впервые изучались Ю. К. Беляевым в [5]. Часть результатов § 5 другими методами была получена И. Н. Коваленко и Л. Такачем в [6].

§ 1. Эргодическая теорема

Введем следующие определения и обозначения:

а) систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i(x)}{dx} = -\nu_i z_i(x) + \sum_{j\neq i}\nu_j\nu_{ji}z_j(x) \quad (i=1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

назовем «стандартной»; ее общее решение можно представить в виде

$$z_l(x) = \sum_j \alpha_j p_{jl}(x), \tag{3}$$

где $p_{ji}(x)$—переходная вероятность цепи $\xi(t)$ за время x;

в)
$$\sum_i \int_0^\infty b_{ik}^{lm}(x)\, p_{ji}(x)\, dF_k(x) = \pi_{jk}^{lm}.$$

Заметим, что матрица $\|\pi_{jk}^{lm}\|$ стохастическая. Будем считать, что определяемая ею цепь Маркова обладает эргодическим распределением $<\varrho_{jk}>$.

с)
$$\int_0^\infty [1 - F_k(x)]\, dx = \mu_k < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Теорема. *Если процесс* $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ *эргодичен, причем*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = i, \ \eta(t) = k, \ \zeta(t) \leqslant x\} = \int_0^x p_i(k, z)\, dz,$$

то

$$p_i(k, z) = \frac{\sum_j \varrho_{jk} p_{jk}(z)\,[1 - F_k(z)]}{\sum_l \sum_m \varrho_{lm}\mu_m}. \tag{4}$$

Доказательство. Используя (1), находим:

$$p_i(k, x + \Delta t) = p_i(k, x)(1 - \nu_i \Delta t)\frac{1 - F_k(x + \Delta t)}{1 - F_k(x)}\Delta t +$$

$$+ \sum_{j \neq i} p_j(k, x)\, \nu_j \nu_{ji}\, \frac{1 - F_k(x + \Delta t)}{1 - F_k(x)}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_l(m, 0) = \sum_{i,k} \int_0^\infty p_i(k, x)\, b_{ik}^{lm}(x)\, \frac{dF_k(x)}{1 - F_k(x)}.$$

Обозначим $\dfrac{p_i(k, x)}{1 - F_k(x)}$ через $r_i(k, x)$, тогда

$$\frac{dr_i(k, x)}{dx} = -\nu_i r_i(k, x) + \sum_{j \neq i} r_j(k, x)\, \nu_j \nu_{ji}, \tag{5}$$

$$r_l(m, 0) = \sum_{i,k} \int_0^\infty r_i(k, x)\, b_{ik}^{lm}(x)\, dF_k(x).$$

Сравнивая (5) с (2), видим, что

$$r_l(k, x) = \sum_j \alpha_{jk} p_{jl}(x), \tag{6}$$

$$r_l(m, 0) = \alpha_{lm} = \sum_{i,k,j} \alpha_{jk} \int_0^\infty b_{ik}^{lm}(x)\, p_{ji}(x)\, dF_k(x) = \sum_{k,j} \alpha_{jk}\pi_{jk}^{lm}.$$

где α_{jk} — константы, подлежащие определению. Так как $\|\pi_{jk}^{lm}\|$ порождает эргодическую цепь, то, используя (6), получаем:

$$\alpha_{jk} = A\varrho_{jk}; \qquad r_i(k, x) = A\sum_j \varrho_{jk}\; p_{ji}(x),$$

где A определяется из условия нормировки:

$$\int_0^\infty \sum_{i,k} p_i(k, x)\, dx = A\int_0^\infty \sum_{i,k,j} \varrho_{jk} p_{ji}(x)\,[1 - F_k(x)]\, dx = 1.$$

Теорема доказана.

§ 2. Эргодическая теорема (продолжение)

Покажем, что если

$$\sum_l \sum_m \varrho_{lm}\mu_m < \infty, \tag{7}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} P\,\{\xi(t) = i, \quad \eta(t) = k, \zeta(t) \leqslant x\} = \lim_{t\to\infty} \Phi_i(t,k,x) = \Phi_i(k, x)$$

существует, не зависит от $\{\xi(0),\ \eta(0),\ \zeta(0)\}$ и является абсолютно непрерывной функцией от x; при этом $d\Phi_i(k, x) = p_i(k, x)\, dx$.

Обозначим через $\{\tau^{(n)}\}$ последовательность тех моментов времени, для которых выполняется соотношение $\zeta(\tau^{(n)}) = 0$. Если положить $\xi(\tau^{(n)} + 0) = \xi_n$, $\eta(\tau^{(n)} + 0) = \eta_n$, то последовательность $\{\xi_n,\ \eta_n\}$ образует однородную цепь Маркова со следующими вероятностями перехода за один шаг:

$$P\,\{\xi_n = l,\ \eta_n = m \mid \xi_{n-1} = j,\ \eta_{n-1} = k\} =$$

$$= \int_0^\infty \sum_i p_{ji}(x)\, b_{ik}^{lm}(x)\, dF_k(x) = \pi_{jk}^{lm}.$$

Согласно предположению в) цепь $\{\xi_n,\ \eta_n\}$ эргодична. Поэтому, если предположить, что последовательность $\{\mu_k\}$ ограничена (ниже мы увидим, что на самом деле достаточно потребовать выполнения неравенства (7)), то $u_{lm} = M\,\{\tau_{lm}^{(n+1)} - \tau_{lm}^{(n)}\} < \infty$, где через $\tau_{lm}^{(n)}$ обозначен n-й по счету момент времени, для которого выполнено соотношение

$$\xi(\tau_{lm}^{(n)} + 0) = l, \quad \eta(\tau_{lm}^{(n)} + 0) = m, \quad \zeta(\tau_{lm}^{(n)} + 0) = 0.$$

Введем обозначение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\,\{\tau_{lm}^{(n)} < y\} = H_{lm}(y).$$

В таком случае

$$\Phi_i(t, k, x) = \sum_l \sum_n \int_{t-x}^{t} p_{li}(t - y)\,[1 - F_k(t - y)]\, dP\,\{\tau_{lk}^{(n)} < y\} =$$

$$= \sum_l \int_0^t p_{li}(t - y)\,[1 - F_k(t - y)]\, dH_{lk}(y) -$$

$$- \sum_l \int_0^{t-x} p_{li}(t - y)\,[1 - F_k(t - y)]\, dH_{lk}(y). \tag{8}$$

Используя «узловую» теорему теории восстановления [2], из последнего соотношения находим:

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_i (t, k, x) = \sum_l \frac{1}{u_{lk}} \int_0^x p_{li}(\tau)\,[1 - F_k(\tau)]\, d\tau. \tag{9}$$

Сравнивая (9) с (4), находим u_{lk}:

$$u_{lk} = \frac{1}{\varrho_{lk}} \sum_{j,m} \varrho_{jm}\mu_m,$$

откуда видно, что для конечности u_{lk} достаточно потребовать выполнения неравенства (7).

§ 3. О времени достижения процессом $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ заданной области фазового пространства

Пусть D — произвольная фиксированная область фазового пространства процесса $\{\xi(t), \eta(t)\}$. Если $(i, k) \overline{\in} D$, то через $\xi_{ik}(x)$ обозначим случайную величину, определяемую следующим образом: пусть $\{\xi(t_0), \eta(t_0), \zeta(t_0)\} = \{i, k, x\}$, тогда через $\tau = t_0 + \xi_{ik}(x)$ обозначим тот первый после t_0 момент времени, для которого выполняется соотношение $(\xi(\tau), \eta(\tau)) \in D$.

Если $p_1, \ldots, p_k$ — неотрицательные числа с суммой, равной 1, а $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — случайные величины с функциями распределений $A_1(x), \ldots, A_k(x)$, то под

$$\left|\begin{array}{l} \theta_1 : p_1 \\ \theta_2 : p_2 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \theta_k : p_k \end{array}\right.$$

будем понимать случайную величину с функцией распределения

$$p_1A_1(x) + p_2A_2(x) + \ldots + p_kA_k(x).$$

Используя (1), получаем:

$$\xi_{ik}(x) = \Delta t + \begin{cases} \xi_{ik}(x+\Delta t) : (1 - \nu_i\Delta t)\dfrac{1 - F_k(x+\Delta t)}{1 - F\ (x)} + o(\Delta t), \\[2ex] \xi_{jk}(x+\Delta t) : \nu_i\nu_{ij}\dfrac{1 - F_k(x+\Delta t)}{1 - F_k(x)}\Delta t + o(\Delta t); \quad (j, k) \overline{\in} D, \\[2ex] 0 : \nu_i\nu_{ij}\dfrac{1 - F_k(x+\Delta t)}{1 - F_k(x)}\Delta t + o(\Delta t); \quad (j, k) \in D, \\[2ex] \xi_{lm}(0) : \dfrac{F_k(x+\Delta t) - F_k(x)}{1 - F_k(x)}\, b_{ik}^{lm}(x) + o(\Delta t); \quad (l, m) \overline{\in} D, \\[2ex] 0 : \dfrac{F_k(x+\Delta t) - F_k(x)}{1 - F_k(x)}\, b_{ik}^{lm}(x) + o(\Delta t); \quad (l, m) \in D. \end{cases} \tag{10}$$

Полагая $M \exp\{-s\xi_{ik}(x)\} = \varphi_{ik}(s, x)$ и используя (10), находим:

$$\varphi_{ik}(s, x) = (1 - s\Delta t)\Big\{1 - \nu_i\Delta t)\frac{1 - F_k(x+\Delta t)}{1 - F_k(x)}\varphi_{ik}(s, x+\Delta t) +$$

$$+\sum_{j:(j,k)\overline{\in}D}\nu_i\nu_{ij}\frac{1-F_k(x+\Delta t)}{1-F_k(x)}\Delta t\varphi_{jk}(s,x+\Delta t)+$$

$$+\sum_{j:(j,k)\in D}\nu_i\nu_{ij}\frac{1-F_k(x+\Delta t)}{1-F_k(x)}\Delta t+\sum_{(l,m)\overline{\in}D}\frac{F_k(x+\Delta t)-F_k(x)}{1-F_k(x)}b_{ik}^{lm}(x)\varphi_{lm}(s,0)+$$

$$+\sum_{(l,m)\in D}\frac{F_k(x+\Delta t)-F_k(x)}{1-F_k(x)}b_{ik}^{lm}(x)\Bigg\}+o(\Delta t). \quad (11)$$

Если $F_k(x)=\int_0^x f_k(t)\,dt$, а $\psi_{ik}(s,x)=[1-F_k(x)]\varphi_{ik}(s,x)$, то из (11) находим, что $\psi_{ik}(s,x)$ удовлетворяют следующей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial\psi_{ik}(s,x)}{\partial x}-(s+\nu_i)\psi_{ik}(s,x)=\sum_{j:(j,k)\overline{\in}D}\nu_i\nu_{ij}\psi_{jk}(s,x)-$$

$$-\sum_{(l,m)\overline{\in}D}b_{ik}^{lm}(x)f_k(x)\psi_{lm}(s,0)-\sum_{j:(j,k)\in D}\nu_i\nu_{ij}[1-F_k(x)]-\sum_{(l,m)\in D}b_{ik}^{lm}(x)f_k(x). \quad (12)$$

При выводе системы уравнений (12) мы неявно использовали непрерывность $\psi_{ik}(s,x)$ по x. Докажем это и за одно дадим другой вывод системы уравнений (12).

Пусть в момент времени t_0 процесс $\{\xi(t),\ \eta(t),\ \zeta(t)\}$ находится в состоянии $\{i,k,x\}$, тогда через $\tau_1=t_0+\tau_{ik}(x)$ обозначим тот первый после t_0 момент времени, для которого $(\xi(\tau_1),\eta(\tau_1))\neq(i,k)$ $((a,b)=(c,d)$ тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d)$. В таком случае ясно, что

$$\tau_{ik}(x)=\min(\xi_i,\eta_k(x)),$$

где ξ_i и $\eta_k(x)$ независимы и имеют следующие распределения:

$$P\{\xi_i<z\}=1-e^{-\nu_i z}$$

$$P\{\eta_k(x)<z\}=\frac{F_k(x+z)-F_k(x)}{1-F_k(x)}.$$

Используя приведенные выше обозначения, получаем:

$$\xi_{ik}(x)=\begin{cases} z+\xi_{jk}(x+z):\nu_{ij}P\{\tau_{ik}(x)\in dz, & \xi_i<\eta_k(x)\},\\ \qquad z\in[0,\infty); & (j,k)\overline{\in}D,\\ z:\nu_{ij}P\{\tau_{ik}(x)\in dz, & \xi_i<\eta_k(x)\},\\ \qquad z\in[0,\infty); & (j,k)\in D,\\ z+\xi_{lm}(0):b_{ik}^{lm}(x+z)P\{\tau_{ik}(x)\in dz, & \xi_i>\eta_k(x)\},\\ \qquad z\in[0,\infty); & (l,m)\overline{\in}D,\\ z:b_{ik}^{lm}(x+z)P\{\tau_{ik}(x)\in dz; & \xi_i>\eta_k(x)\},\\ \qquad z\in[0,\infty); & (l,m)\in D.\end{cases} \quad (13)$$

Несложные вычисления показывают, что

$$P\{\tau_{ik}(x) < z,\ \xi_i < \eta_k(x)\} = \nu_i \int_0^z e^{-\nu_i u} \frac{1 - F_k(x+u)}{1 - F_k(x)}\, du,$$

$$P\{\tau_{ik}(x) < z,\ \xi_i > \eta_k(x)\} = \int_0^z e^{-\nu_i v} \frac{dF_k(x+v)}{1 - F_k(x)}. \tag{14}$$

Используя (13) и (14), находим:

$$\varphi_{ik}(s, x) = \sum_{j:(j,k)\overline{\in} D} \int_0^\infty e^{-sz} \varphi_{jk}(s, x+z)\, \nu_i \nu_{ij} e^{-\nu_i z} \frac{1 - F_k(x+z)}{1 - F_k(x)}\, dz +$$

$$+ \sum_{j:(j,k)\in D} \int_0^\infty e^{-sz} \nu_i \nu_{ij} e^{-\nu_i z} \frac{1 - F_k(x+z)}{1 - F_k(x)}\, dz + \sum_{(l,m)\overline{\in} D} \int_0^\infty e^{-sz} \varphi_{lm}(s, 0) \times$$

$$\times\, b_{ik}^{lm}(x+z)\, e^{-\nu_i z} \frac{dF_k(x+z)}{1 - F_k(x)} + \sum_{(l,m)\in D} \int_0^\infty e^{-sz} b_{ik}^{lm}(x+z) e^{-\nu_i z} \frac{dF_k(x+z)}{1 - F_k(x)}$$

или, переходя к $\psi_{ik}(s, x)$:

$$\psi_{ik}(s, x) = \sum_{j:(j,k)\overline{\in} D} e^{(s+\nu_i)x} \int_x^\infty e^{-(s+\nu_i)z} \nu_i \nu_{ij} \psi_{jk}(s, z)\, dz +$$

$$+ \sum_{j:(j,k)\in D} e^{(s+\nu_i)x} \int_x^\infty e^{-(s+\nu_i)z} \nu_i \nu_{ij} [1 - F_k(z)]\, dz + \sum_{(l,m)\overline{\in} D} e^{(s+\nu_i)x} \int_x^\infty \psi_{lm}(s, 0) \times$$

$$\times\, e^{-(s+\nu_i)z} b_{ik}^{lm}(z)\, dF_k(z) + \sum_{(l,m)\in D} e^{(s+\nu_i)x} \int_x^\infty e^{-(s+\nu_i)z} b_{ik}^{lm}(z)\, dF_k(z). \tag{15}$$

Из (15) видим, что $\psi_{ik}(s, x)$ непрерывны по x и дифференцируемы одновременно с $F_k(x)$. Если правую и левую части соотношений (15) умножить на $e^{-(s+\nu_i)x}$ и продифференцировать по x, то после сокращения обеих частей на $e^{-(s+\nu_i)x}$ получим (12).

§ 4. Решение системы дифференциальных уравнений (12)

Лемма. *Пусть δ_k — множество тех состояний j цепи $\xi(t)$, для которых $(j, k) \in D$, а $\gamma_{ik}(s)$ — преобразование Лапласа того промежутка времени, за который цепь $\xi(t)$ из i впервые попадает в δ_k (считаем при этом, что $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ отсутствуют). Тогда $\gamma_{ik}(s)$ $(i \overline{\in} \delta_k)$ удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:*

$$-(s + \nu_i)\gamma_{ik}(s) + \sum_{j\overline{\in}\delta_k} \nu_i \nu_{ij} \gamma_{jk}(s) + \sum_{j\in\delta_k} \nu_i \nu_{ij} = 0 \quad (i \overline{\in} \delta_k). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_{ik}(s) = M \exp\{-s\omega_{ik}\}$, тогда

$$\omega_{ik} = \begin{cases} z + \omega_{jk} : \nu_{ij} P\{\xi_i \in dz\}, & z \in [0, \infty); \quad j \overline{\in} \delta_k, \\ z : \nu_{ij} P\{\xi_i \in dz\}, & z \in [0, \infty); \quad j \in \delta_k, \end{cases} \tag{17}$$

где $P\{\xi_i > z\} = e^{-\nu_i z}$. Это очевидно. Переходя в (17) к преобразованиям Лапласа, получаем:

$$\gamma_{ik}(s) = \sum_{j \overline{\in} \delta_k} \nu_{ij} \eta_{jk}(s) \int_0^\infty e^{-sz} \nu_i e^{-\nu_i z} dz + \sum_{j \in \delta_k} \nu_{ij} \int_0^\infty e^{-sz} \nu_i e^{-\nu_i z} dz,$$

что совпадает с (16). Лемма доказана.

Пусть $\{\Gamma_{ik}^{lm}(s, x)\}$ — фундаментальная система решений следующей системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (s фиксировано):

$$\frac{dB_{ik}(x)}{dx} - (s + \nu_i) B_{ik}(x) + \sum_{j:(j,k) \overline{\in} D} \nu_i \nu_{ij} B_{jk}(x) = 0 \qquad ((i, k) \text{ и } (l, m) \overline{\in} D). \tag{18}$$

Будем искать $\psi_{ik}(s, x)$ в виде

$$\psi_{ik}(s, x) = \gamma_{ik}(s) + \sum_{(l,m) \overline{\in} D} C_{lm}(s, x) \Gamma_{ik}^{lm}(s, x). \tag{19}$$

После подстановки правой части (19) в (12) имеем:

$$\sum_{(l,m) \overline{\in} D} \frac{dC_{lm}(s, x)}{dx} \Gamma_{ik}^{lm}(s, x) + \sum_{(l,m) \overline{\in} D} C_{lm}(s, x) \frac{\partial \Gamma_{ik}^{lm}(s, x)}{\partial x} - (s + \nu_i) \gamma_{ik}(s) -$$

$$- (s + \nu_i) \sum_{(l,m) \overline{\in} D} C_{lm}(s, x) \Gamma_{ik}^{lm}(s, x) = - \sum_{j:(j,k) \overline{\in} D} \nu_i \nu_{ij} \gamma_{jk}(s) - \sum_{j:(j,k) \overline{\in} D} \nu_i \nu_{ij} \times$$

$$\times \sum_{(l,m) \overline{\in} D} C_{lm}(s,x) \Gamma_{jk}^{lm}(s,x) - \sum_{(l,m) \overline{\in} D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x) \gamma_{lm}(s) - \sum_{(l,m) \overline{\in} D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x) \times$$

$$\times \sum_{(\tau,\sigma) \overline{\in} D} C_{\tau\sigma}(s,0) \Gamma_{lm}^{\tau\sigma}(s,0) - \sum_{j:(j,k) \in D} \nu_i \nu_{ij} + \sum_{j:(j,k) \in D} \nu_i \nu_{ij} F_k(x) - \sum_{(l,m) \in D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x). \tag{20}$$

Соотношения (20) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{(l,m) \overline{\in} D} \frac{\partial C_{lm}(s, x)}{\partial x} \Gamma_{ik}^{lm}(s, x) + \sum_{(l,m) \in D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x) + \sum_{(l,m) \overline{\in} D} C_{lm}(s, x) \times$$

$$\times \left| \frac{\partial \Gamma_{ik}^{lm}(s, x)}{\partial x} - (s + \nu_i) \Gamma_{ik}^{lm}(s, x) + \sum_{j:(j,k) \overline{\in} D} \nu_i \nu_{ij} \Gamma_{jk}^{lm}(s, x) \right| =$$

$$= \left\{ (s + \nu_i) \gamma_{ik}(s) - \sum_{j:(j,k) \overline{\in} D} \nu_i \nu_{ij} \gamma_{jk}(s) - \sum_{j:(j,k) \in D} \nu_i \nu_{ij} \right\} - \sum_{(l,m) \overline{\in} D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x) \gamma_{lm}(s) +$$

$$+ \sum_{j:(j,k) \in D} (\nu_i \nu_{ij} F_k(x) - \sum_{(l,m) \overline{\in} D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x) \sum_{(\tau,\sigma) \overline{\in} D} C_{\tau\sigma}(s, 0) \Gamma_{lm}^{\tau\sigma}(s, 0). \tag{21}$$

Введем обозначения:

$$\sum_{j:(j,k)\in D} \nu_i \nu_{ij} F_k(x) - \sum_{(l,m)\overline{\in} D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x)\gamma_{lm}(s) - \sum_{(l,m)\in D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x) = V_{ik}(s,x),$$

$$\sum_{(l,m)\overline{\in} D} b_{ik}^{lm}(x) f_k(x)\Gamma_{lm}^{\tau\sigma}(s,0) = -W_{ik}^{\tau\sigma}(s,x). \tag{22}$$

Используя (16), (18), (21), (22) для нахождения $C_{ik}(s,x)$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{(l,m)\overline{\in} D} \frac{\partial C_{lm}(s,x)}{\partial x}\Gamma_{ik}^{lm}(s,x) = V_{ik}(s,x) + \sum_{(l,m)\overline{\in} D} W_{ik}^{lm}(s,x) C_{lm}(s,0) \quad ((i,k)\overline{\in} D). \tag{23}$$

Таким образом, для нахождения $\dfrac{\partial C_{lm}(s,x)}{\partial x}$ получена система линейных неоднородных алгебраических уравнений с определителем $E(s,x)$ отличным от 0 при всех $x \geqslant 0$, так как система функций $\{\Gamma_{ik}^{lm}\}$ является фундаментальной системой решений системы уравнений (18). Пусть $E_{lm}^{ik}(s,x)$ — минор определителя $E(s,x)$, соответствующий элементу $\Gamma_{ik}^{lm}(s,x)$. В таком случае

$$\frac{\partial C_{lm}(s,x)}{\partial x} = \frac{\sum\limits_{(i,k)\overline{\in} D}\left\{V_{ik}(s,x) + \sum\limits_{(\tau,\sigma)\overline{\in} D} W_{ik}^{\tau\sigma}(s,x) C_{\tau\sigma}(s,0)\right\} E_{ik}^{lm}(s,x)}{E(s,x)}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{E(s,x)} \sum_{(i,k)\overline{\in} D} V_{ik}(s,x) E_{ik}^{lm}(s,x)$$

через $V_{lm}^{*}(s,x)$, а

$$\frac{1}{E(s,x)} \sum_{(i,k)\overline{\in} D} W_{ik}^{\tau\sigma}(s,x) E_{ik}^{lm}(s,x)$$

через $\widehat{W}_{\tau\sigma}^{lm}(s,x)$, тогда

$$\frac{\partial C_{lm}(s,x)}{\partial x} = V_{lm}^{*}(s,x) + \sum_{(\tau,\sigma)\overline{\in} D} \widehat{W}_{\tau\sigma}^{lm}(s,x) C_{\tau\sigma}(s,0). \tag{24}$$

Из (24) находим:

$$C_{lm}(s,x) = C_{lm}(s,0) + \int_0^x V_{lm}^{*}(s,t)\,dt + \sum_{(\tau,\sigma)\overline{\in} D} C_{\tau\sigma}(s,0)\int_0^x \widehat{W}_{\tau\sigma}^{lm}(s,t)\,dt. \tag{25}$$

Используя (19) и (25), получаем:

$$\psi_{ik}(s,x) = \gamma_{ik}(s) + \sum_{(l,m)\in D}\left\{C_{lm}(s,0) + \int_0^x V_{lm}^{*}(s,t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{(\tau,\sigma)\in D} C_{\tau\sigma}(s,0)\int_0^x \widehat{W}_{\tau\sigma}^{lm}(s,t)\,dt\right\}\Gamma_{ik}^{lm}(s,x). \tag{26}$$

Введем обозначение

$$\lim_{x\to\infty}\Gamma_{ik}^{lm}(s,x) = g_{ik}^{lm}(s). \tag{27}$$

Вспоминая, что $\psi_{ik}(s, x) = [1 - F_k(x)]\,\varphi_{ik}(s, x)$ и используя (26), (27), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения $C_{lm}(s, 0)$ $((l, m)\,\overline{\in}\, D)$:

$$\gamma_{ik}(s) + \sum_{(l,m)\overline{\in} D} \Big\{ C_{lm}(s, 0) + \int_0^\infty V^*_{lm}(s, t)\,dt +$$

$$+ \sum_{(\tau,\sigma)\overline{\in} D} C_{\tau\sigma}^{-}(s, 0) \int_0^\infty \widehat{W}^{lm}_{\tau\sigma}(s, t)\,dt \Big\}\, g^{lm}_{ik}(s) = 0. \tag{28}$$

Решая эту систему уравнений, находим последовательно $C_{ik}(s, 0)$, $C_{ik}(s, x)$, $\psi_{ik}(s, x)$, $\varphi_{ik}(s, x)$.

З а м е ч а н и е. На протяжении всего этого параграфа мы неявно использовали тот факт, что множество пар (i, k), не принадлежащих D, конечно. Соответствующие результаты, относящиеся к бесконечным множествам D, будут опубликованы позднее.

§ 5. Примеры

В этом параграфе результаты, полученные выше, используются для исследования однолинейной системы массового обслуживания с очередью. Поток требований — простейший с параметром λ, а время обслуживания — случайная величина с функцией распределения $F(x)$.

Пусть $\xi(t)$ — величина очереди в момент t (включая и обслуживаемое требование), а $\zeta(t) = x$, если требование, занимающее прибор в момент t, начало обслуживаться в момент $t - x$. Если $\xi(t) = 0$, то $\zeta(t)$ лишена смысла. В этом случае пару $(\xi(t), \zeta(t))$, образующую однородный процесс Маркова, будем обозначать нулем. Вероятности перехода процесса $(\xi(t), \zeta(t))$ за малый промежуток Δt имеют вид:

$$\begin{gathered}
P\left\{(0) \xrightarrow{\Delta t} (0)\right\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\
P\left\{(0) \xrightarrow{\Delta t} (1, 0)\right\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\
P\left\{(1, x) \xrightarrow{\Delta t} (1, x + \Delta t)\right\} = (1 - \lambda\Delta t)\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} + o(\Delta t), \\
P\left\{(1, x) \xrightarrow{\Delta t} (2, x + \Delta t)\right\} = \lambda\Delta t\,\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} + o(\Delta t), \\
P\left\{(1, x) \xrightarrow{\Delta t} (0)\right\} = \frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{1 - F(x)} + o(\Delta t), \\
P\left\{(k, x) \xrightarrow{\Delta t} (k, x + \Delta t)\right\} = (1 - \lambda\Delta t)\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} + o(\Delta t), \\
P\left\{(k, x) \xrightarrow{\Delta t} (k + 1, x + \Delta t)\right\} = \lambda\Delta t\,\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} + o(\Delta t), \\
P\left\{(k, x) \xrightarrow{\Delta t} (k - 1, 0)\right\} = \frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{1 - F(x)} + o(\Delta t) \qquad (k = 2, 3, \ldots).
\end{gathered} \tag{29}$$

А. Распределение $(\xi(t), \zeta(t))$ *в стационарном режиме.* Пусть $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots$ — случайные моменты времени, обладающие следующим свойством:

$$\xi(\tau_n + 0) > 0, \qquad \zeta(\tau_n - 0) > 0, \qquad \zeta(\tau_n + 0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В таком случае случайные величины $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$ связаны в однородную цепь Маркова со следующими вероятностями перехода за один шаг:

$$
\begin{gathered}
p_{11} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}(1 + \lambda x)\, dF(x), \\
p_{1r} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^r}{r!}\, dF(x) \qquad (r \geqslant 2), \\
p_{k,k-1+r} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^r}{r!}\, dF(x) \qquad (k \geqslant 2, r \geqslant 0).
\end{gathered} \tag{30}
$$

Эта цепь неприводима и непериодична. Покажем, что для ее эргодичности необходимо и достаточно выполнение условия:

$$
\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \frac{1}{\lambda}. \tag{31}
$$

Введем обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi_n = k\} = \varrho_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (пределы существуют и не зависят от ξ_1 ввиду неприводимости и непериодичности цепи ξ_n). Для нахождения ϱ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
\varrho_1 = \varrho_1 \int_0^\infty e^{-\lambda x}(1 + \lambda x)\, dF(x) + \varrho_2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x), \\
\varrho_k = \sum_{i=1}^{k+1} \varrho_i \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k+1-i}}{(k+1-i)!}\, dF(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots).
\end{gathered} \tag{32}
$$

Пусть $R(z) = \sum\limits_{k=1}^\infty \varrho_k z^k$ $(|z| \leqslant 1)$. Используя (32), находим:

$$
R(z) = \frac{\varrho_1 z(1 - z) \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)}{\int_0^\infty e^{\lambda x(z-1)} dF(x) - z}. \tag{33}
$$

Как известно [4], для того, чтобы неприводимая и непериодическая цепь была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы $R(1) > 0$. Используя (33), получаем:

$$
R(1) = \lim_{z\to 1-0} R(z) = \frac{\varrho_1 \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)}{1 - \lambda\mu}, \tag{34}
$$

откуда и следует наше утверждение. Итак, если условие (31) имеет место, то из (33), (34) получаем:

$$
R(z) = \frac{(1 - \lambda\mu) z(1 - z)}{\int_0^\infty e^{\lambda x(z-1)} dF(x) - z} \tag{35}
$$

(напомним, что $R(1) = 1$).

Введем обозначение:

$$h_r = M\{\tau_{n+1}^{(r)} - \tau_n^{(r)}\}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P\{\tau_n^{(r)} < y\} = H_r(y),$$

где $\tau_n^{(2)}$ n-й по счету момент времени, для которого выполнено соотношение:

$$\xi(\tau_n^{(r)}+0) = r, \qquad \zeta(\tau_n^{(r)}-0) > 0, \qquad \zeta(\tau_n^{(r)}+0) = 0.$$

Используя формулу полной вероятности, находим:

$$P\{\xi(t) = k,\ \zeta(t) \leqslant x\} = F_k(t, x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\int_{t-x}^{t}[1 - F(t-y)]\, e^{-\lambda(t-y)}\frac{[\lambda(t-y)]^{k-r}}{(k-r)!}\, dP\{\tau_n^{(r)} \leqslant y\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\int_{t-x}^{t}[1 - F(t-y)]\, e^{-\lambda(t-y)}\frac{[\lambda(t-y)]^{k-r}}{(k-r)!}\, dH_r(y).$$

Повторяя рассуждения § 2, устанавливаем существование предела

$$\lim_{t\to\infty} F_k(t, x) = F_k(x),$$

где

$$F_k(x) = \sum_{r=1}^{k}\frac{1}{h_r}\int_0^x e^{-\lambda z}\frac{(\lambda z)^{k-r}}{(k-r)!}[1 - F(z)]\, dz. \tag{36}$$

Итак, стационарное распределение процесса $(\xi(t), \zeta(t))$ найдено с точностью до констант h_k $(k = 1, 2, \ldots)$, для определения которых воспользуемся методами § 1. Введем обозначения:

$$\frac{dF_k(x)}{dx} = f_k^*(x); \qquad \frac{f_k^*(x)}{1 - F(x)} = p_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Используя (29), находим:

$$p_0 = p_0(1 - \lambda\Delta t) + \int_0^{\infty} f_1^*(x)\frac{dF(x)}{1 - F(x)}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$f_1^*(x + \Delta t) = f_1^*(x)(1 - \lambda\Delta t)\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} + o(\Delta t),$$

$$f_k^*(x + \Delta t) = f_k^*(x)(1 - \lambda\Delta t)\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} +$$

$$+ \lambda\Delta t\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} f_{k-1}^*(x) + o(\Delta t) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$f_1^*(0)\,\Delta t = p_0\lambda\Delta t + \int_0^{\infty} f_2^*(x)\frac{dF(x)}{1 - F(x)}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$f_k(0) = \int_0^{\infty} f_{k+1}^*(x)\frac{dF(x)}{1 - F(x)} + o(1) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

откуда

$$\lambda p_0 = \int_0^\infty p_1(x)\, dF(x),$$

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = -\lambda p_1(x),$$

$$\frac{dp_k(x)}{dx} = -\lambda p_k(x) + \lambda p_{k-1}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$p_1(0) = \lambda p_0 + \int_0^\infty p_2(x)\, dF(x), \tag{37}$$

$$p_k(0) = \int_0^\infty p_{k+1}(x)\, dF(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Введем обозначение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(x) z^k = K(x, z)$. Используя второе и третье уравнения в (37), получаем:

$$\frac{\partial K(x, z)}{\partial x} = \lambda (z - 1) K(x, z),$$

$$K(x, z) = K(0, z)\, e^{\lambda x (z-1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} z^n \qquad (c_k = p_k(0)),$$

откуда

$$p_k(x) = \sum_{r=1}^{k} c_r e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-r}}{(k-r)!}, \tag{38}$$

где постоянные c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$c_1 = c_1 \int_0^\infty e^{-\lambda x} (1 + \lambda x)\, dF(x) + c_2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x),$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k+1-i}}{(k+1-i)!}\, dF(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{39}$$

Сравнивая (39) с (32), получаем:

$$c_k = A \varrho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{40}$$

где ϱ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ находятся из (35), а постоянная A подлежит определению. Итак

$$p_0 = \frac{A \varrho_1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) \tag{41}$$

$$F_k(x) = A\sum_{r=1}^{k} \varrho_r \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{k-r}}{(k-r)!} [1 - F(u)]\, du \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$A^{-1} = \frac{\varrho_1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dF(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k} \varrho_r \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-r}}{(k-r)!} [1 - F(x)]\, dx$$

или, после упрощений, $A = \lambda$ (напомним, что

$$\varrho_1 \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = 1 - \lambda\mu,$$

а двойная сумма после изменения порядка суммирования сведется к μ).

Подставляя в (41) $A = \lambda$, получаем окончательные выражения для $F_k(x)$ и p_0:

$$\begin{gathered} p_0 = 1 - \lambda\mu, \\ F_k(x) = \lambda \sum_{r=1}^{k} \varrho_r \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{\lambda u}{(k-r)!} [1 - F(u)]\, du\, . \end{gathered} \tag{42}$$

Сравнивая (42) с (36), видим, что $h_r = (\lambda\varrho_r)^{-1}$.

Обозначим $F_k(\infty)$ через F_k. Используя (35) и (42), находим:

$$(1 - \lambda\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^n = \frac{(1-\lambda\mu)(1-z)\int_0^\infty e^{\lambda x(z-1)} dF(x)}{\int_0^\infty e^{\lambda x(z-1)} dF(x) - z}. \tag{43}$$

Пусть ξ^* и ξ — целочисленные случайные величины с функциями распределений $R(z)$ и $(1 - \lambda\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^n$. В таком случае

$$\lim_{\lambda\mu \to 1-0} P\{(1-\lambda\mu)\,\xi^* > x\} = \lim_{\lambda\mu \to 1-0} P\{(1-\lambda\mu)\,\xi > x\} = \exp\left\{-\frac{2\mu^2 x}{\sigma^2 + \mu^2}\right\}, \tag{44.}$$

где σ^2 — дисперсия случайной величины с функцией распределения $F(x)$ Доказательство соотношений (44) вытекает из (35) и (43).

Пусть

$$\gamma(t) = \begin{cases} \zeta(t) : \xi(t) > 0; \\ 0 \quad : \xi_t(t) = 0. \end{cases}$$

В таком случае

$$\lim_{t\to\infty} P\{\gamma(t) \leqslant x\} = (1 - \lambda\mu) + \lambda \int_0^x [1 - F(u)]\, du.$$

Доказательство следует из (42).

Б. О распределении времени достижения процессом $\xi(t)$ заданного уровня. Пусть $(\xi(t_0), \zeta(t_0)) = (k, x)$ $(x \geqslant 0;\ k = 1, \ldots, N-1)$. В таком случае через $\tau = t_0 + \xi_k(x)$ обозначим тот первый после t_0 момент времени, для которого $\xi(\tau) = N$. Если $\xi(t_0) = 0$, то соответствующую случайную величину обозначим через ξ_0. Величины ξ_k связаны следующими соотношениями:

$$\xi_0 = \Delta t + \begin{cases} \xi_0 \quad : 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\ \xi_1(0) : \lambda\Delta t + o(\Delta t); \end{cases}$$

$$\xi_1(x) = \Delta t + \begin{cases} \xi_1(x+\Delta t) : (1-\lambda\Delta t)\dfrac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)} + o(\Delta t), \\[2ex] \xi_2(x+\Delta t) : \lambda\Delta t\dfrac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)} + o(\Delta t), \\[2ex] \xi_0 \quad : \dfrac{F(x+\Delta t)-F(x)}{1-F(x)} + o(\Delta t); \end{cases}$$

$$\xi_k(x) = \Delta t + \begin{cases} \xi_k(x+\Delta t) : (1-\lambda\Delta t)\dfrac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)} + o(\Delta t), \\[2ex] \xi_{k+1}(x+\Delta t) : \lambda\Delta t\dfrac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)} + o(\Delta t), \\[2ex] \xi_{k-1}(0) : \dfrac{F(x+\Delta t)-F(x)}{1-F(x)} + o(\Delta t); \end{cases} \tag{45}$$

$$\xi_{N-1}(x) = \Delta t + \begin{cases} \xi_{N-1}(x+\Delta t) : (1-\lambda\Delta t)\dfrac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)} + o(\Delta t), \\[2ex] 0 \quad : \lambda\Delta t\dfrac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)} + o(\Delta t), \\[2ex] \xi_{N-2}(0) : \dfrac{F(x+\Delta t)-F(x)}{1-F(x)} + o(\Delta t). \end{cases}$$

Обозначим $[1-F(x)]M\exp\{-s\xi_k(x)\}$ через $\psi_k(s, x)$, а $M\exp\{-s\xi_0\}$ — через $\psi_0(s)$. Используя (45), находим:

$$\psi_0(s) = (1-s\Delta t)\{\psi_0(s)(1-\lambda\Delta t) + \psi_1(s, 0)\lambda\Delta t\} + o(\Delta t),$$

$$\psi_1(s, x) = (1-s\Delta t)\{\psi_1(s, x+\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + \psi_2(s, x+\Delta t)\lambda\Delta t +$$
$$+ \psi_0(s)[F(x+\Delta t) - F(x)]\} + o(\Delta t),$$

$$\psi_k(s, x) = (1-s\Delta t)\{\psi_k(s, x+\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + \psi_{k-1}(s, 0)[F(x+\Delta t) -$$
$$- F(x)]\} + o(\Delta t) \qquad (k = 2, 3, \ldots, N-2),$$

$$\psi_{N-1}(s, x) = (1-s\Delta t)\{\psi_{N-1}(s, x+\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + \lambda\Delta t[1-F[x+\Delta t)] +$$
$$+ \psi_{N-2}(s, 0)[F(x+\Delta t) - F(x)]\} + o(\Delta t),$$

откуда

$$\psi_0(s)(\lambda+s) = \lambda\psi(s, 0),$$

$$-\frac{\partial\psi_1(s, x)}{\partial x} = -(\lambda+s)\psi_1(s, x) + \lambda\psi_2(s, x) + F'(x)\psi_0(s), \tag{46}$$

$$-\frac{\partial\psi_k(s, x)}{\partial x} = -(\lambda+s)\psi_k(s, x) + \lambda\psi_{k+1}(s, x) + F'(x)\psi_{k-1}(s, 0)$$
$$(k = 2, 3, \ldots, N-2),$$

$$-\frac{\partial\psi_{N-1}(s, x)}{\partial x} = -(\lambda + s)\psi_{N-1}(s, x) + \lambda[1 - F(x)] + F'(x)\psi_{N-2}(s, 0).$$

Рассмотрим следующую систему однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial B_k(s, x)}{\partial x} = (\lambda + s) B_k(s, x) - \lambda B_{k+1}(s, x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N-2),$$
$$\frac{\partial B_{N-1}(s, x)}{\partial x} = (\lambda + s) B_{N-1}(s, x) \tag{47}$$

и займемся нахождением ее общего решения. Обозначим $\int\limits_0^\infty e^{-ux} B_k(s, x)\,dx$ через $A_k(s, u)$ $(u \geqslant 0;\ k = 1, \ldots, N-1)$, а $B_k(s, 0)$ — через $a_k(s)$. Тогда

$$uA_k(s, u) - a_k(s) = (\lambda + s) A_k(s, u) - \lambda A_{k+1}(s, u),$$
$$uA_{N-1}(s, u) - a_{N-1}(s) = (\lambda + s) A_{N-1}(s). \tag{48}$$

Перепишем (48) в виде:

$$A_{N-1}(s, u) = \frac{a_{N-1}(s)}{u - \lambda - s}.$$
$$A_k(s, u) = \frac{a_k(s)}{u - \lambda - s} - \frac{\lambda}{u - \lambda - s} A_{k+1}(s, u), \tag{49}$$

откуда

$$A_k(s, u) = \sum_{j=k}^{N-1} (-1)^{j-k} \frac{\lambda^{j-k} a_j(s)}{(u - \lambda - s)^{j+1-k}}.$$

Возвращаясь к $B_k(s, x)$, получаем:

$$B_k(s, x) = e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=k}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!} a_j(s). \tag{50}$$

Будем искать $\psi_k(s, x)$ в виде:

$$\psi_k(s, x) = e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=k}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!} a_j(s, x). \tag{50'}$$

Используя (46), получаем:

$$(\lambda + s) e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} a_j(s, x) - \lambda e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=2}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-2}}{(j-2)!} a_j(s, x) +$$
$$+ e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \frac{\partial a_j(s, x)}{\partial x} - (\lambda + s) e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} a_j(s, x) +$$
$$+ \lambda e^{(\lambda+s)x} \sum_{j=2}^{N-1} \frac{(-\lambda x)^{j-2}}{(j-2)!} a_j(s, x) + \frac{\lambda}{\lambda + s} F'(x) a_1(s, 0) = 0;$$

$$(\lambda+s)\,e^{(\lambda+s)x}\sum_{j=k}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!}\,a_j(s,x)-\lambda e^{(\lambda+s)x}\sum_{j=k+1}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-k-1}}{(j-k-1)!}\,a_j(s,x)+$$

$$+e^{(\lambda+s)x}\sum_{j=k}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\frac{\partial a_j(s,x)}{\partial x}-(\lambda+s)\,e^{(\lambda+s)x}\sum_{j=k}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!}\,a_j(s,x)+$$

$$+\lambda e^{(\lambda+s)x}\sum_{j=k+1}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-k-1}}{(j-k-1)!}\,a_j(s,x)+F'(x)\,a_{k-1}(s,0)=0\,;$$

$$(\lambda+s)\,e^{(\lambda+s)x}a_{N-1}(s,x)+e^{(\lambda+s)x}\frac{\partial a_{N-1}(s,x)}{\partial x}-(\lambda+s)\,e^{(\lambda+s)x}a_{N-1}(s,x)+$$

$$+\lambda\,[1-F(x)]+F'(x)\,a_{N-2}(s,0)=0.$$

Итак, для нахождения $\frac{\partial a_k(s,x)}{\partial x}$ нами получена следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial a_{N-1}(s,x)}{\partial x}=-e^{-(\lambda+s)x}\{\lambda\,[1-F(x)]+F'(x)\,a_{N-2}(s,0)\}\,,$$

$$\sum_{j=k}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!}\,\frac{\partial a_j(s,x)}{\partial x}=-e^{-(\lambda+s)x}F'(x)\,a_{k-1}(s,0)\qquad(k=2,3,\ldots,N-2),\tag{51}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!}\,\frac{\partial a_j(s,x)}{\partial x}=-e^{-(\lambda+s)x}\,\frac{\lambda}{\lambda+s}\,F'(x)\,a_1(s,0)\,.$$

Введем обозначения:

$$\frac{(-\lambda x)^j}{j}\,\frac{\partial a_j(s,x)}{\partial x}=b_j(s,x)\qquad(j=1,2,\ldots,N-1)\,,$$

тогда (51) перепишется в виде:

$$b_{N-1}(s,x)=-e^{-(\lambda+s)x}\,\frac{(-\lambda x)^{N-1}}{(N-1)!}\,\{\lambda\,[1-F(x)]+F'(x)\,a_{N-2}(s,0)\}\,,$$

$$\sum_{j=k}^{N-1}C_j^k b_j(s,x)=-e^{-(\lambda+s)x}\,\frac{(-\lambda x)^k}{k!}\,F'(x)\,a_{k-1}(s,0)\qquad k=2,3,\ldots,N-2,\tag{52}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}C_j^1 b_j(s,x)=-e^{-(\lambda+s)x}\,\frac{(-\lambda x)}{1!}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}\,F'(x)\,a_1(s,0)\,.$$

Пусть A_{ik} — величина определителя, получающегося из определителя

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \ldots & C_{N-2}^1 & C_{N-1}^1 \\ 0 & C_2^2 & \ldots & C_{N-2}^2 & C_{N-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & C_{N-2}^{N-2} & C_{N-1}^{N-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & C_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix}$$

после вычеркивания в нем элементов i-й строки и k-го столбца. Используя тогда (52), находим $b_k(s, x)$:

$$b_k(s, x) = (-1)^{k+1} e^{-(\lambda+s)x} \left| A_{1k} \frac{\lambda x}{1!} \frac{\lambda}{\lambda+s} F'(x)\, a_1(s, 0) + \right.$$

$$\left. + A_{N-1,k} \frac{(\lambda x)^{N-1}}{(N-1)!} \lambda [1 - F(x)] + \sum_{i=\max(2,k)}^{N-1} A_{ik} \frac{(\lambda x)^i}{i!} F'(x)\, a_{i-1}(s, 0) \right|, \quad (53)$$

откуда

$$\frac{\partial a_k(s, x)}{\partial x} = -e^{-(\lambda+s)x} k! \left| A_{1k} \frac{(\lambda x)^{1-k}}{1!} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} F'(x)\, a_1(s, 0) + \right.$$

$$\left. + A_{N-1,k} \frac{(\lambda x)^{N-k-1}}{(N-1)!} \lambda [1 - F(x)] + \sum_{i=\max(2,k)} A_{ik} \frac{(\lambda x)^{i-k}}{i!} F'(x)\, a_{i-1}(s, 0) \right| \quad (54)$$

(при выводе соотношений (53), (54) мы воспользовались тем, что $A_{ik} = 0$, если $i < k$). Из (54) получаем:

$$a_k(s, x) = a_k(s, 0) - k! \left| A_{1k} \frac{\lambda}{\lambda+s} a_1(s, 0) \int_0^x \frac{(\lambda x)^{1-k}}{1!} e^{-(\lambda+s)x}\, dF(x) + \right.$$

$$+ \lambda A_{N-1,k} \int_0^x \frac{(\lambda x)^{N-1-k}}{(N-1)!} e^{-(\lambda+s)x} [1 - F(x)]\, dx +$$

$$+ \sum_{i=\max(2,k)} A_{ik} a_{i-1}(s, 0) \int_0^x \frac{(\lambda x)^{i-k}}{i!} e^{-(\lambda+s)x} dF(x). \quad (55)$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_k(s, x) = 0$, то из (50′) следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} a_k(s, x) = 0$ (существование $\lim\limits_{x\to\infty} a_k(s, x)$ вытекает из (55)). Поэтому

$$\frac{a_k(s, 0)}{k!} = A_{1k} \frac{\lambda}{\lambda+s} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^{1-k}}{1!} a_1(s, 0)\, dF(x) +$$

$$+ \sum_{i=\max(2,k)} A_{ik} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^{i-k}}{i!} a_{i-1}(s, 0)\, dF(x) +$$

$$+ \lambda A_{N-1,k} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^{N-1-k}}{(N-1)!} [1 - F(x)]\, dx. \quad (56)$$

Таким образом, для того чтобы найти $a_k(s, 0)$ ($k = 1, 2, \ldots, N-1$), достаточно решить систему неоднородных линейных алгебраических уравнений (56), что в принципе сделать несложно, так как эта система относится к числу «треугольных». Решая эту систему, находим последовательно

$a_k(s, 0)$, $a_k(s, x)$, $\psi_k(s, x)$ и, наконец,

$$M \exp\{-s\xi_k(x)\}.$$

В заключение покажем, как подсчитать распределение максимума длины очереди на интервале $[t_0\ T]$. Пусть

$$M \exp\{-s\xi_k(x)\} = \int_0^\infty e^{-sz}\, d\Phi_k(z \mid x),$$

тогда, как не трудно видеть,

$$P\{\max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant T} \xi(\tau) < N \mid (\xi(t_0), \zeta(t_0)) = (k, x)\} = 1 - \Phi_k(T - t_0 \mid x);$$

отсюда

$$\int_0^\infty e^{-sz} P\{\max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + z} \xi(\tau) \geqslant N \mid (\xi(t_0), \zeta(t_0)) = (k, x)\}\, dz = \frac{1}{s} M \exp\{-s\xi_k(x)\}.$$

Замечание. Преобразование Лапласа случайной величины $\xi_k(x)$ допускает обращение в явном виде, поскольку его можно представить следующим образом:

$$\varphi^*(s) + \int_0^x \psi^*(s, t)\, F^*(t)\, dt,$$

где $\varphi^*(s)$, $\psi^*(s, t)$, $F^*(t)$ известны, причем $\varphi^*(s)$ и $\psi^*(s, t)$ при фиксированном t являются преобразованиями Лапласа от известных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
2. В. Л. Смит, Теория восстановления и смежные с ней вопросы, Сб. переводов «Математика», 5 : 3, 1961, 95—150.
3. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, Л.—М., 1953.
4. Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, изд-во «Мир», М., 1964.
5. Ю. К. Беляев, Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, Тр. 6-го Всесоюзн. совещ. теор. вероятн. и матем. статист. 1960 г., Вильнюс, 1962, 309—323.
6. Л. Такач, Некоторые вероятностные задачи в телефонии, Сб. переводов «Математика», 4 : 6, 1960, 93—144.

Поступила 8. VI 1965 г.
Киев