1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 18, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Асимптотика суммы одного класса графов Фейнмана

Н. Т. Мордовец

1. Введение. Исследованию асимптотического поведения амплитуды рассеяния в теории возмущений посвящены многие недавние работы [1—4]. Федербуш и Грисару [1] предложили метод суммирования асимптотических вкладов от плоских графов лестничного типа и сильносвязных графов с блоками несколько более сложного вида. Фукс [2] распространил этот метод на суммирование асимптотических вкладов от сильносвязных графов типа сетки с прямоугольными ячейками. Полкингхорн [3] несколько ранее разработал метод суммирования асимптотических вкладов от графов, составленных из блоков, в которых внутренние линии, соответствующие обменным виртуальным мезонам, пересекаются только с линиями границы графа, соответствующими внешним рассеивающимся частицам, а между собой могут лишь перекрещиваться; при этом сами блоки отделяются друг от друга не менее, чем одной одномезонной линией. Тиктопулос [4] разработал удобный метод для нахождения асимптотики вклада в амплитуду рассеяния от отдельного графа Фейнмана любого порядка непосредственно по топологии данного графа. В работе А. В. Ефремова и О. И. Завьялова для класса графов, не содержащих более одного перекрещивания линий в сходящейся части, разработан метод, позволяющий находить асимптотику отдельного графа и определять вклад от его расходящейся части непосредственно по топологической структуре графа.

В настоящей заметке предлагается метод для нахождения асимптотики суммы графов Фейнмана, принадлежащих определенному классу. Описание рассматриваемого класса графов дается в разделе 2. Там же приводятся все необходимые коэффициентные функции для редуцированных графов. В разделе 3 находится асимптотика суммы графов, откуда следуют явные выражения для функций $P(t)$ и $R(t)$, связанных с траекторией полюсов Редже и вычетами в этих полюсах, управляющих поведением амплитуды рассеяния при больших s. В качестве иллюстрации приводится пример (приложение).

2. Описание рассматриваемого класса графов. Пусть имеется произвольная диаграмма Фейнмана с четырьмя внешними линиями. Граф Фейнмана получается из диаграммы отбрасыванием внешних линий. Будем обозначать его буквой Φ.

Назовем t-путем в Φ непрерывную последовательность дуг, такую, что стягивание в точку каждой дуги, принадлежащей этой последовательности, приводит к потере графом его s-зависимости. Длиной t-пути называется число дуг, его составляющих; обозначим ее через ϱ.

Будем называть t-редуцированным графом граф Φ, у которого все t-пути стянуты в точку.

Пусть граф Φ имеет m независимых t-путей. При этом в плоском графе первый и последний из них совпадут с границами графа между внешними его вершинами (2,3) и (1, 4) соответственно (рис. 1).

Тогда рассматриваемый здесь класс графов включит в себя все не содержащие так называемых сингулярных конфигураций [4] плоские сходящиеся графы, длина t-путей которых подчиняется соотношению $\varrho_1 = \varrho_m \leqslant \varrho_i$, $i \neq 1, m$. Для таких графов понятие существенных подграфов с индексом сходимости r, который, как показал О. Завьялов [7], является

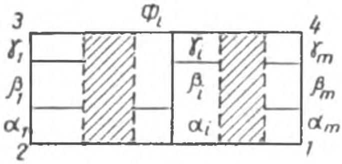

Рис. 1.

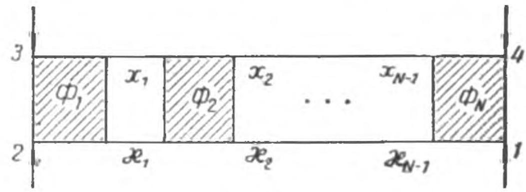

Рис. 2.

более общей характеристикой асимптотики графа, совпадает с используемым здесь понятием t-пути.

N-й вклад в амплитуду рассеяния дает диаграмма, изображенная на рис. 2.

Знаменатель Фейнмана через мандельстамовские переменные s и t можно записать в следующем виде:

$$D = f(x)\cdot s + g(x)\cdot t + \sum_{\mu=1}^{4} h_\mu(x)\cdot p_\mu^2 - C(x)\sum_{k=1}^{l} x_k\cdot m_k^2. \tag{1}$$

Здесь коэффициентные функции задаются формулами [6]:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \widetilde{C}(x) & \Delta X_{i(2-3)} \\ -\Delta X_{i(1-4)} & 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$g(x) = \begin{vmatrix} C(x) & \Delta X_{i(3-4)} \\ -\Delta X_{i(2-1)} & 0 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$h_\mu^{(x)} = \begin{vmatrix} C(x) & \Delta X_{i(\mu-\nu)} \\ -\Delta X_{i(\mu-\sigma)} & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

. . . .

остальные могут быть получены путем циклических перестановок из $(\mu, \nu, \varrho, \sigma)$, где $\Delta X_{i(\mu-\nu)}$ — параметры Фейнмана, относящиеся к линиям границы графа между μ-й и ν-й вершинами в пределах i-го контура.

Обозначим через $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_{i\mu}(x)$ и $c_i(x)$ соответствующие коэффициентные функции i-го подграфа.

Используя формулы (2)—(4), можно показать, что для сильносвязного графа (см. рис. 2) коэффициентная функция $f(x)$ факторизуется:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x) \tag{5}$$

и что для t-редуцированных графов имеют место следующие соотношения:

$$\widetilde{G}(x) = \prod_{i=1}^{N} \widetilde{c}_i(x) \prod_{i=1}^{N-1} (\varkappa_i - \chi_i), \tag{6}$$

$$\widetilde{g}(x)=\widetilde{G}(x)\cdot\left|\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\varkappa_i\cdot\chi_i}{\varkappa_i+\chi_i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\widetilde{g}_i(x)}{\widetilde{c}_i(x)}\right|, \tag{7}$$

$$\widetilde{f}(x)=\widetilde{h}_{i\mu}(x)=0, \qquad \mu=1,2,3,4, \tag{8}$$

где волнистая черта над буквой означает, что соответствующая функция относится к t-редуцированному графу.

Заметим, что в случае, когда $m>2$ и имеются, кроме t_1- и t_m-путей, еще t-пути, проходящие внутри подграфа Φ_i, с длиной $\varrho=\varrho_1=\varrho_m$, величины $\widetilde{c}_i(x)$ могут, в свою очередь, сами распадаться на множители. Однако последнее обстоятельство несущественно для дальнейшего изложения.

3. Асимптотика суммы вкладов в амплитуду рассеяния. Запишем N-й вклад в амплитуду рассеяния в стандартной форме:

$$F_N(s,t,m)=(\mathrm{const})_N\int_0^1[C(x)]^{l-2n-2}\delta\left(1-\sum_{k=1}^{l}x_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{l}dx_k\times$$
$$\times[D(s,t,m,x)]^{2n-l}, \tag{9}$$

где l — число дуг графа, n — число независимых контуров в нем, $(\mathrm{const})_N$ — коэффициент, зависящий от константы взаимодействия g:

$$(\mathrm{const})_N=16\pi^2\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{l-2n}(l-2n-1)!\,.$$

Наибольший вклад в F_N при $s\to\infty$ дает интегрирование по области, где $f(x)$ исчезает; другими словами, по области, где близки к нулю параметры каждого t-пути графа. При этом, как было показано в [4], достаточно выделять в графе Φ лишь t-пути с минимальной длиной.

Пусть дугам t_j-пути i-го подграфа сопоставлены параметры $\{x_{jk}\}$ ($j=1,2,\ldots,m$), ($k=1,2,\ldots,\varrho$). Тогда такой областью будет область $x_{jk}\simeq 0$.

Применим к параметрам x_{jk} λ-преобразование Тиктопулоса [4]:

$$x_{jk}=\lambda_i\cdot y_{jk}, \qquad \sum_{j=1}^{\varrho}y_{jk}=1, \tag{10}$$

с якобианом

$$J(\lambda_j)=\prod_{j=1}^{m}(\lambda_j)^{\varrho-1}. \tag{11}$$

Тогда $f(x)$ запишется в виде

$$f(x)=\prod_{j=1}^{Nm}\lambda_j\prod_{i=1}^{N}f_i(x,y), \tag{12}$$

где $f(x,y)$ — соответствующая коэффициентная функция, относящаяся к графу, в котором выделены все t- пути с минимальной длиной ϱ.

Подставим (10) — (12) в (9) и, интегрируя по области $\lambda_j\simeq 0$ ($j=1,2,\ldots,N_m$), получим наибольший асимптотический вклад в амплитуду рассеяния (для случая равных масс)

$$F_N=16\pi^2\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{l-2n}\frac{(\varrho-1)!}{s^{\varrho}}\cdot\frac{(\ln s)^{Nm-1}}{(Nm-1)!}\cdot I_N(t), \tag{13}$$

где

$$I_N(t)=(l-2n-\varrho+1)!\int_0^1[\widetilde{C}(x)]^{l-2n-2}\delta\Big(1-\sum_k x_k\Big)\cdot\prod_j\delta\Big(1-\sum_{k=1}^{\varrho}y_{jk}\Big)\times$$
$$\times[\widetilde{g}(x)t-\widetilde{C}(x)m^2)^{2n+\varrho-l}[\widetilde{f}(x,y)]^{-\varrho}\cdot\prod_k dx_k\prod_{j,k}dy_{jk}.$$

Функция $\widetilde{f}(x, y)$ получается из $f(x)$, если заменить все параметры, соответствующие дугам t-путей, преобразованными параметрами и отбросить те слагаемые, где λ_j входит множителем более одного раза. Функции $\widetilde{g}(x)$ и $\widetilde{(C}x)$ задаются формулами (6) и (7).

Факторизуем полученный многократный интеграл $I_N(t)$. Для этого применим к «связующим» параметрам $\varkappa_i$ и χ_i следующее преобразование [1]:

$$\begin{gathered}\varkappa_i+\chi_i=r_i,\\ \varkappa_i=\overline{\varkappa}_i\cdot r_i,\\ \chi_i=(1-\overline{\varkappa}_i)r_i,\\ \frac{\partial(\varkappa_i,\ \chi_i)}{\partial(r_i,\ \overline{\varkappa}_i)}=\prod_{i=1}^{N-1}r_i,\end{gathered}\tag{14}$$

после чего первая сумма в выражении для $\widetilde{g}(x)$ (7) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N-1}r_i(1-\overline{\varkappa}_i)\overline{\varkappa}_i t=\sum_{i=1}^{N-1}r_i\cdot v_i.$$

К непреобразованным параметрам x_{ki} из функций $\widetilde{c}_i(x)$, $\widetilde{g}_i(x)$ и $\widetilde{f}(x, y)$ применим масштабное преобразование

$$\begin{gathered}x_{ki}=\zeta_i\cdot\overline{x}_{ki},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ l_i-\varrho m,\\ \sum_{k=1}^{l_i}\overline{x}_{ki}=1,\end{gathered}\tag{15}$$

с якобианом

$$\frac{\partial(x_{ki})}{\partial(\zeta_i,\ \overline{x}_{jk})}=\prod_{i=1}^{N}(\zeta_i)^{l_i-\varrho m-1},\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ l_i-\varrho m-1,$$

после чего функции $\widetilde{c}(x)$, $\widetilde{g}(x)$, $f(x, y)$ и вторая сумма в (7) примут вид:

$$\begin{gathered}\widetilde{c}_i(x)=(\zeta_i)^{n_i}\cdot\widetilde{c}_i(\overline{x}),\\ \widetilde{g}_i(x)=(\zeta_i)^{n_i+1}\cdot\widetilde{g}_i(x),\\ \widetilde{f}_i(x,\ y)=(\zeta_i)^{n_i-m+1}\widetilde{f}_i(\overline{x},\ y),\\ \sum_{i=1}^{N}\zeta_i\frac{\widetilde{g}_i(\overline{x})}{\widetilde{c}_i(x)}t=\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\cdot w_i.\end{gathered}\tag{16}$$

Здесь l_i и n_i — число дуг и независимых контуров i-го подграфа, соответственно. Действительно, $\widetilde{c}_i(x)$ является полиномом n_i-й степени относительно непреобразованных координат x, а $\widetilde{g}_i(x)$ — $(n_i + 1)$-й степени. Что касается коэффициентной функции $f_i(x, y)$, то она тоже является полиномом $(n_i + 1)$-й степени относительно всех своих параметров-аргументов x и y. Степень относительно y у нее равна m, следовательно, степень относительно x равна $n_i + 1 - m$. Нетрудно теперь убедиться, что в $I_N(t)$ новые переменные ζ_i будут входить в степени $p = l_i - 2_{ni} - \varrho + 1$.

Произведя все необходимые подстановки в (13), получим:

$$I_N(t) = \int_0^1 \prod_{i=1}^{N} [\widetilde{c}_i(\bar{x})]^{\varrho-2} \prod_{i=1}^{N} [\widetilde{f}_i(\bar{x}, y)]^{-\varrho} \cdot \prod_j \delta\left(1 - \sum_{k=1}^{\varrho} y_{jk}\right) \times$$
$$\times Y_N(t) \prod_k d\bar{x}_k \cdot \prod_{j,k} dy_{jk} \cdot \prod_i d\bar{\varkappa}_i, \tag{17}$$

где

$$Y_N(t) = (l - 2n - \varrho - 1)! \int_0^1 \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} r_i - \sum_{i=1}^{N} \zeta_i\right) \cdot \prod_{i=1}^{N-1} r_i^{(\varrho-1)} dr_i \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} (\zeta_i)^{l_i - 2n_i - \varrho - 1} d\zeta_i \left[\sum_{i=1}^{N-1} r_i v_i + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i w_i - m^2\right]^{\varrho - N(l_i - 2n_i)}.$$

Рассмотрим тождество Фейнмана

$$\prod_{i=1}^{N-1} \frac{1}{v_i} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{w_i} = (2N-2)! \int_2^1 \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} r_i - \sum_{i=1}^{N} \zeta_i\right) \prod_{i=1}^{N-1} dr_i \prod_{i=1}^{N} d\zeta_i \times$$
$$\times \left[\sum_{i=1}^{N-1} r_i (v_i - m^2) + \sum_i \zeta_i (w_i - m^2)\right]^{2N-1}, \tag{18}$$

подействуем на него слева дифференциальным оператором

$$\prod_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial v_i^{\varrho-1}} \prod_{i=1}^{N} \frac{\partial^{l_i - 2n_i - \varrho - 1}}{\partial w_i^{l_i - 2n_i - \varrho - 1}}. \tag{19}$$

Тогда справа получим в точности интеграл Y, а слева — его факторизованное выражение:

$$Y_N = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{(\varrho - 1)!}{[v_i - m^2]^{\varrho}} \prod_{i=1}^{N} \frac{(l_i - 2n_i - \varrho - 1)!}{[w_i - m^2]^{l_i - 2n - \varrho}}, \tag{20}$$

после чего, подставив (20) в (17), а затем (17) — в (13), получим:

$$F_N = 16\pi^2 \left\{\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{l_i - 2n_i}\right\}^N \frac{(\varrho - 1)!}{s^{\varrho}} \cdot \frac{(\ln s)^{Nm-1}}{(Nm - 1)!} \cdot A^{N-1} B^N, \tag{21}$$

где введены обозначения:

$$A = (\varrho - 1)! \int_0^1 \frac{d\varkappa}{[t(1-\varkappa)\varkappa - m^2]^{\varrho}}, \tag{22}$$

$$B=(l_i-2n_i-\varrho-1)!\int_0^1 [\widetilde{c}_i(x)]^{l_i-2n_i-2}\cdot\delta\left(1-\sum_k x_k\right)\prod_j \delta\left(1-\sum_k^{\varrho} y_{ik}\right)\times$$
$$\times[t\widetilde{g}_i(x)-\widetilde{c}_i(x)m^2]^{2n_i+\varrho-l_i}[f_i(x,\ y)]^{-\varrho}\prod_k dx_k\prod_{j,n} dy_{ik}.$$

Выделим здесь множитель в степени $(Nm-1)$:

$$F_N=R(t)\cdot\frac{(\varrho-1)!}{s^{\varrho}}\cdot\frac{[P(t)\ln s]^{Nm-1}}{(Nm-1)!}, \tag{23}$$

где

$$R(t)=16\pi^2\left\{\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{l_i-2n_i}AB\right\}^{\frac{1}{m}}\cdot A^{-1}, \tag{24}$$

$$P(t)=\left\{\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{l_i-2n_i}AB\right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{25}$$

Исследуем теперь сумму вкладов $\sum\limits_{N=1}^{\infty}F_N$. Прежде всего заметим, что сумма начинается сразу с $(m-1)$-го члена, за которым следует $(2m-1)$-й, ..., $(Nm-1)$-й, ... Обозначив

$$y=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{(P\ln s)^{Nm-1}}{(Nm-1)!}, \tag{26}$$

приходим к неоднородному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(m-1)}+y^{(m-2)}+\ldots+y'+y=e^x, \tag{27}$$

где $x=P\ln s$, а $y^{(i)}$ обозначает производную по x i-го порядка. Общее решение (27) можно записать в виде

$$y=\frac{1}{m}e^x+c_1e^{\eta_1 x}+c_2e^{\eta_2 x}+\ldots+c_{m-1}e^{\eta_{m-1}x}, \tag{28}$$

где η_k — корни соответствующего характеристического многочлена

$$L(p)=p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+p+1. \tag{29}$$

Возвращаясь к прежним переменным, получаем:

$$F=\sum_{N=1}^{\infty}F_N=R(t)\frac{(\varrho-1)!}{s^{\varrho}}\left|\frac{1}{m}s^{P(t)}+\sum_{k=1}^{m-1}c_ks^{\eta_kP(t)}\right|. \tag{30}$$

Иными словами, поведение амплитуды при больших s управляется семейством из m траекторий: $P(t)$, $\eta_k\cdot P(t)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$.

Для выделения ведущей траектории необходимо знать свойства корней η_k. Прежде всего заметим, что характеристический многочлен $L(p)$ не имеет ни одного положительного вещественного корня, так как все его коэффициенты положительны. Следовательно, уравнение $L(p)=0$ будет иметь лишь вещественные отрицательные и комплексные сопряженные корни. Можно, кроме того, показать, что все эти корни имеют модуль, равный единице. Для этого помножим уравнение $L(p)=0$ на $(p-1)$. Получим двучленное уравнение

$$(p-1)L(p)=p^m-1=0, \tag{31}$$

корни которого суть

$$\eta_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \tag{32}$$

Очевидно, что корень $\eta_0 = 1$ появляется из-за умножения $L(p) = 0$ на множитель $(p-1)$. Остальные же корни η_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$ являются корнями характеристического многочлена. При этом $|\eta_k| = 1$ $\mathrm{Re}\,\eta_k < 1$. Следовательно, при $s \to \infty$ ведущей траекторией является $P(t)$, выходящая из точки $-\varrho$.

Итак,

$$F = R(t)\frac{(\varrho-1)!}{m}\cdot s^{-\varrho+P(t)} + O(s^{-\varrho+\mathrm{Re}\,\eta P(t)}), \tag{33}$$

где $\mathrm{Re}\,\eta = \max\{\mathrm{Re}\,\eta_k\}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$.

В заключение автор благодарит О. И. Завьялова за ценные замечания, а также В. И. Коломыцева, А. В. Нестерчука и В. И. Фущича за плодотворные обсуждения.

Приложение. В качестве примера рассмотрим диаграмму, изображенную на рис. 3.

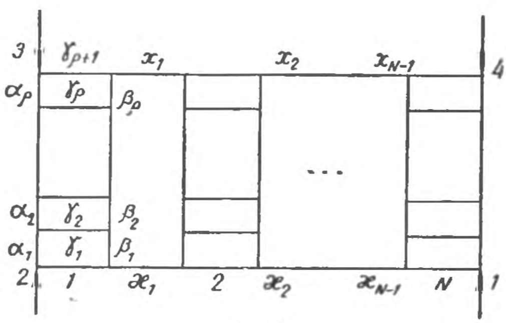

Рис. 3.

В каждом подграфе имеется 2 t-пути $(m = 2)$, состоящие из дуг с параметрами $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, которые подвергаются λ-преобразованию:

$$\alpha_i = \lambda_1 a_i, \qquad \sum_{i=1}^{\varrho} a_i = 1;$$

$$\beta_i = \lambda_2 b_i, \qquad \sum_{i=1}^{\varrho} b_i = 1.$$

Параметры γ_i подвергаются масштабному преобразованию:

$$\gamma_i = \zeta\bar{\gamma}_i, \qquad \sum_{i=1}^{\varrho+1}\bar{\gamma}_i = 1.$$

Коэффициентные функции $\tilde{c}_i(\gamma)$, $\tilde{g}_i(\gamma)$, $\tilde{f}_i(\gamma,\ a,\ b)$ имеют вид

$$\tilde{C}(\gamma) = \begin{vmatrix} \gamma_1+\gamma_2 & -\gamma_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_2+\gamma_3 & -\gamma_3 & & & \cdot \\ 0 & -\gamma_3 & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \gamma_{\varrho-1}+\gamma_\varrho & -\gamma_\varrho \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma_\varrho & \gamma_\varrho+\gamma_{\varrho+1} \end{vmatrix}.$$

$$g(\gamma) = \begin{vmatrix} C(\gamma) & & 0 \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & 0 \\ & & \gamma_{\varrho+1} \\ -\gamma_1\ 0 \ldots 0 & & 0 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{\varrho+1} \gamma_i,$$

$$f(a, b, \gamma) = \begin{vmatrix} & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ C(\gamma) & & b_i \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ \ldots -a_i \ldots & & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$A = (\varrho - 1)! \int_0^1 \frac{d\varkappa}{[t(1-\varkappa)\varkappa - m^2]^\varrho},$$

$$B = \int_0^1 \frac{[\widetilde{c}_i(\gamma)]^{\varrho-1} \delta\left(1 - \sum_i \gamma_i\right) \delta\left(1 - \sum_i a_i\right) \delta\left(1 - \sum_i b_i\right) d\gamma_i da_i db_i}{[t\widetilde{g}_i(\gamma) - \widetilde{c}_i(\gamma) m^2] \cdot [\widetilde{f}_i(\gamma, a, b]^\varrho},$$

$$P(t) = \left\{\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{\varrho+1} AB\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$R(t) = 16\pi^2 \left\{\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^{\varrho+1} AB\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot A^{-1}.$$

Траекториями будут $P(t)$ и $\eta_1 P(t)$, где $\eta_1 = -1$, согласно формулам (32) и (33).

Итак, при $s \to \infty$

$$F = R(t) \cdot \frac{(\varrho - 1)!}{2} \cdot s^{-\varrho + P(t)} + O(s^{-\varrho - P(t)}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Federbush and M. T. Grisaru, Ann. Phys., 22, 1963, 263.
2. N. H. Fuchs, J. Math. Phys., 4, 1963, 617.
3. J. C. Polkinghorne, J. Math. Phys., 4, 1963, 503.
4. G. Tiktopoulos, Phys. Rev., 131, 1963, 480.
5. А. В. Ефремов и О. И. Завьялов, Тр. XII МКФВЭ, VI—12, Дубна, 1964.
6. Н. Т. Мордовец, О структуре параметрического интеграла Фейнмана, Темат. сб. Ин-та матем. АН УССР, изд-во «Наукова думка», 1966.
7. О. И. Завьялов, ЖЕТФ, 47, 1964, 1099.

Поступила 14.X 1964 г.
Киев