О представлении непрерывных положительно определенных ядер

Н. Н. Чаус

Необходимые и достаточные условия существования и единственности интегрального представления произвольного положительно определенного (п. о.) ядра K по решениям определенных уравнений даны в работе Ю. М. Березанского ([1], теорема 1). Как показано там же, в случае непрерывных п. о. ядер $K = K(x, y)$ $(x, y \in E_n)$ и дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами достаточные условия можно сформулировать в гораздо более конкретном виде, когда существенную роль играет рост ядра $K(x, y)$ на ∞ (теорема 4).

В данной статье рассматриваются непрерывные п. о. ядра $K(x, y) = K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_n)$ $(x, y \in G_{mn} \subset E_n, m \leqslant n)$, где $x \in G_{mn}$ означает, что $x_1, \ldots, x_m$ пробегают значения от $-\infty$ до $+\infty$, а $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — от 0 до $+\infty$. Выясняется возможность представления таких ядер по решениям уравнений $L^{(i)}u_i = \lambda_i u_i$, где $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ — дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами (и дополнительно предполагается, что $L^{(m+1)}, \ldots, L^{(n)}$ — выражения второго порядка). Доказывается теорема 1, которая в случае $m = n$ отличается от теоремы 4 [1] менее жесткими ограничениями на рост ядра на ∞. Условия теоремы 1 являются достаточными для существования и единственности интегральных представлений п. о. ядер. Но в отношении единственности эти условия оказываются в некотором смысле и необходимыми. Это обнаруживается на примере представления ядра по косинусам путем сравнения результата с одной теоремой Е. Б. Вул [2].

Практическая сторона доказательства теоремы 1 сводится, согласно [1], к установлению единственности слабого решения задачи Коши $\frac{du_t}{dt} \pm \pm iL^* u_t$, где u_t лежит в возможно более узком гильбертовом пространстве.

§ 1. Формулировка основной теоремы. Общие факты о представлении п. о. ядер.

Введем следующее определение.

Будем говорить, что $l(x)$ $(x \geqslant 0)$ является медленно растущей функцией, если:

1) $l(x)$ — неубывающая, положительная и $\lim\limits_{x\to\infty} l(x) = \infty$;

2) $l(x) < C_\varepsilon x^\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ с некоторыми постоянными C_ε;

3) существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xl''(x)}{l'(x)} = \gamma$ (γ — конечно или бесконечно);

4) функция $\frac{xl'(x)}{l(x)}$ является невозрастающей.

Обозначим через $\chi_1^j(x_j, \lambda_j), \ldots \chi_{r_j}^j(x_j, \lambda_j)$ фундаментальную систему решений уравнения $L^{(j)}u = \lambda_j u$ (r_j — порядок выражения $L^{(j)}$) и составим произведение

$$X_j(x, \lambda) = \chi_{j_1}^1(x_1, \lambda_1) \ldots \chi_{j_n}^n(x_n, \lambda_n)$$

$(x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_{mn},\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n)$. Здесь $j = (j_1, \ldots, j_n)$ — сборный индекс, меняющийся по множеству N точек с координатами $j_l = 1, \ldots, \ldots, r_l$ $(l = 1, \ldots, n)$.

Напомним, что ядро $K(x, y)$ $(x, y \in G_{mn})$ называется п. о., если для любой финитной на G_{mn} функции $\varphi(x)$

$$\int_{G_{mn}} \int_{G_{mn}} K(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(y)}\, dx dy \geqslant 0.$$

Справедлива следующая теорема о представлении п. о. ядер.

Теорема 1. *Пусть в области G_{mn} определено непрерывное п. о. ядро $K(x, y)$ $(x, y \in G_{mn})$, удовлетворяющее в смысле обобщенных функций соотношениям*

$$L_{x_j}^{(j)} K(x, y) = \overline{L_{y_j}^{(j)}} K(x, y) \qquad (j = 1, \ldots n),$$

где $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ — дифференциальные выражения с действительными постоянными коэффициентами по переменным, соответственно, $x_1, \ldots, x_n$ и с порядками $r_1, \ldots, r_m > 1$, $r_{m+1} = \ldots = r_n = 2$. Если выполняется оценка*

$$|K(x, y)| \leqslant C \exp[|x_1|^{r_1'} l_1(|x_1|) + |y_1|^{r_1'} l_1(|y_1|) + \ldots + |x_m|^{r_m'} l_m(|x_m|) +$$
$$+ |y_m|^{r_m'} l_m(|y_m|) + a_{m+1} x_{m+1}^{2-\varepsilon} + a_{m+1} y_{m+1}^{2-\varepsilon} + \ldots + a_n x_n^{2-\varepsilon} + a_n y_n^{2-\varepsilon}] \quad (1)$$

с некоторыми C, a_i, $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{r_k'} + \dfrac{1}{r_k} = 1$ и $l_j(s) \in I(r_j)$, то имеет место и единственно представление

$$K(x, y) = \int_{E_n} \sum_{j,k \in N} X_j(x, \lambda)\, \overline{X_k(y, \lambda)}\, d\varrho_{jk}(\lambda), \quad (2)$$

где матрица $\| d\varrho_{jk}(\lambda) \|_{j,k \in N}$ п. о. в том смысле, что $\sum\limits_{j,k \in N} \varrho_{jk}(\Delta)\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0$ $(\varrho_{jk}(\Delta) = \varrho_{jk}(\lambda'') - \varrho_{jk}(\lambda'),\ \Delta = [\lambda'', \lambda'))$ для любых Δ и набора чисел ξ_j. При этом интеграл будет сходиться абсолютно. Включение $l(s) \in I(q)$ здесь означает, что $l(s)$ — медленно растущая функция с условием $\int\limits_1^\infty \dfrac{ds}{s l(s)^{q-1}} = \infty$.

Сейчас мы, пользуясь [1], опишем кратко ту ситуацию, при наличии которой имеет место представление п. о. ядра по решениям определенных уравнений. Это нам понадобится для доказательства только что сформулированной теоремы.

В дальнейшем будем обозначать через $L_2(\tau(x)\, dx)$ $(\tau(x) \geqslant 1)$ гильбертово пространство функций $\varphi(x)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \overline{\psi(x)}\, \tau(x)\, dx$ ($\|\cdot\|$ — норма), а через $L_2(\varrho(x)\, dx)$ $(\varrho(x) \geqslant 1)$ — гиль-

* В ходе доказательства теоремы будет видно, что это требование можно заменить требованием равенства дефектных чисел у каждого из операторов A_j в H_k, которые определяются дальше. По этой причине мы в теореме оставляем черту над $L_{y_j}^{(j)}$.

бертово пространство функций $\varphi(x)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi)_1 = = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\overline{\psi(x)}\varrho(x)\,dx$ ($\|\cdot\|_1$ — норма).

Рассмотрим теперь n гильбертовых пространств $L_2(\tau_1(x_1)\,dx_1), \ldots, L_2(\tau_m(x_m)\,dx_m)$, $L_2(\varrho_{m+1}(x_{m+1})\,dx_{m+1}), \ldots, L_2(\varrho_n(x_n)\,dx_n)$ и определим в них, соответственно, операторы $B_1, \ldots, B_n$ следующим образом: B_j есть замыкание в $L_2(\cdot\, dx_j)$ оператора $\varphi(x) \to (\overline{L_j^+}\varphi)(x)$ на финитных бесконечно дифференцируемых функциях $\varphi(x)$ из $L_2(\cdot\, dx_j)$ (здесь L_j^+ есть формально сопряженное выражение к $L^{(j)}$, а коэффициенты у $L^{(j)}$ не обязательно действительные).

Обозначим через H_+ тензорное произведение всех введенных пространств:

$$H_+ = L_2(\tau_1(x_1)\,dx_1) \otimes \ldots \otimes L_2(\varrho_n(x_n)\,dx_n)$$

и через H_-:

$$H_- = L_2\left(\frac{1}{\tau_1(x_1)}\,dx_1\right) \otimes \ldots \otimes L_2\left(\frac{1}{\varrho_n(x_n)}\,dx_n\right).$$

Теперь сделаем одно предположение.

а) Будем считать, что п. о. на G_{mn} ядро $K(x, y)$ и весовые функции $\tau_i(x_i)$ и $\varrho_k(x_k)$ таковы, что $K(x, y) \in H_- \otimes H_-$ (для этого достаточно, например, чтобы

$$\int\limits_{G_{mn}}\int\limits_{G_{mn}} \frac{|K(x, y)|^2}{\sigma(x)\,\sigma(y)}\,dxdy < \infty \quad (\sigma(x) = \tau_1(x_1)\ldots\tau_m(x_m)\,\varrho_{m+1}(x_{m+1})\ldots\varrho_n(x_n))\Bigg).$$

Введем в пространстве H_+ скалярное произведение

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int\limits_{G_{mn}}\int\limits_{G_{mn}} K(x, y)\,\varphi(y)\,\overline{\psi(x)}\,dxdy \qquad (\varphi, \psi \in H_+)$$

и гильбертово пространство, полученное после пополнения по этому скалярному произведению, обозначим через H_K. Так как в каждом $L_2(\cdot\, dx_j)$ определен свой оператор B_j, то в пространстве H_K определено n операторов $A_j = E \otimes \ldots \otimes E \otimes B_j \otimes E \otimes \ldots \otimes E$ (B_j на j-м месте) с понятными областями определения. Очевидно, что операторы A_j коммутируют в H_K.

Сделаем два следующих предположения.

б) Будем считать, что операторы A_j эрмитовы в H_k и каждый из них имеет в H_k равные дефектные числа. Эрмитовость здесь эквивалентна тому, что

$$L_{x_j}^j K(x, y) = \overline{L_{y_j}^{(j)}} K(x, y),$$

причем равенство понимается в смысле обобщенных функций, а $L_{x_j}^{(j)}$ обозначает применение выражения $L^{(j)}$ по переменной x_j; черта означает замену коэффициентов у $L^{(j)}$ на комплексно сопряженные. Приведенное условие получается из равенства $\langle A_j\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, A_j\psi\rangle$ ($j = 1, \ldots, n$) для финитных на G_{mn} бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

в) Будем считать, что операторы A_j после замыкания в H_k становятся самосопряженными и тоже коммутируют (в смысле разложений единицы).

Согласно [1], при наличии условий а), б) и в) имеет место и единственно представление (2). Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что из условия теоремы следует выполнение предположений а) и в). С этой целью возьмем $\tau_i(x_i) = \exp[|x_i|^{r'_i} l_i(|x_i|)]$, $\varrho_k(x_k) = \exp[a_k x_k^{2-\frac{\varepsilon}{2}}]$, где $l_i(x_i)$, a_k и ε те же, что и в формулировке теоремы. Очевидно, что при этом условие а) выполняется. Условие в) тоже будет выполненным. Мы покажем это, воспользовавшись следующей теоремой Ю. М. Березанского [1], формулировку которой мы упрощаем применительно к нашим условиям.

Теорема 2* [1]. *Пусть для каждого из уравнений*

$$\frac{du_t}{dt} \pm iB_j^* u_t = 0, \qquad t \in [0, T],$$

рассматриваемых, соответственно, в $L_2(\cdot dx_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$, *справедлива единственность слабых решений задачи Коши. Тогда замыкания операторов* A_j *самосопряжены в* H_k *и их разложения единицы коммутируют.*

Под слабым решением задачи Коши для уравнения $\frac{du_t}{dt} - C^* u_t = 0$ ($t \in [0, T]$), где C — оператор в некотором гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(C)$, понимается такая вектор-функция u_t со значениями в H, которая принимает заданное значение u_0 при $t = 0$, слабо дифференцируема на $[0, T]$, и удовлетворяет соотношению $\frac{d}{dt}(u_t, \varphi) - (u_t, C\varphi) = 0$ $(\varphi \in D(C))$. Единственность слабого решения означает, что из $u_0 = 0$ следует $u_t = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Итак, мы видим, что теорема 1 будет доказана, если мы докажем следующее утверждение, которое сформулируем для удобства в виде самостоятельной теоремы.

Теорема 3. *Пусть* L — *обыкновенное дифференциальное выражение порядка* $r > 1$ *с постоянными коэффициентами, и* B — *оператор в* $L_2(\tau(x)\,dx)$ $(\tau(x) = \exp[|x|^{r'} l(|x|)]$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $l(x) \in I(r))$, *построенный как замыкание оператора* $\varphi \to L\varphi$ *на финитных бесконечно дифференцируемых на* $(-\infty, \infty)$ *функциях* $\varphi = \varphi(x)$. *Тогда в* $L_2(\tau(x)\,dx)$ *справедлива единственность слабого решения задачи Коши для уравнения*

$$\frac{du_t}{dt} - B^* u_t = 0, \qquad t \in [0, T].$$

Аналогичное утверждение имеет место, когда $L = P$ — *выражение второго порядка и* $B = R$ — *соответствующий ему оператор в* $L_2(\varrho(x)\,dx)$ $(\varrho(x) = \exp[ax^{2-\varepsilon}]$, a, $\varepsilon > 0$ — *постоянные*).

Доказательству этой теоремы посвящен следующий параграф.

§ 2. Установление единственности слабых решений.

1°. В этом пункте мы проводим подготовительную работу, вводя в рассмотрение целые аналитические функции специального вида. Множества рассматриваемых функций мы будем обозначать через $W_{M,a}^{\Omega,b}$ и $M_\theta(P)$.

Положим $M(x) = \Omega(x) = |x|^{r'} l(|x|)$, где $r' > 1$, $l(x)$ — медленно растущая функция. Можно показать, что по таким $M(x)$ и $\Omega(y)$ можно вполне корректно определить пространство $W_{M,a}^{\Omega,b}$. Как известно [4], оно состоит из целых аналитических функций $\varphi(z) = \varphi(x + iy)$, для которых при любых $\tilde{a} = a - \varepsilon$, $\tilde{b} = b + \delta$, ε, $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$|\varphi(z)| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta} e^{-M(\tilde{a}x) + \Omega(\tilde{b}y)}$$

с некоторыми постоянными $C_{\varphi,\varepsilon,\delta}$. Отметим, что в пространствах $W_{M,a}^{\Omega,b}$ определена операция дифференцирования $(\varphi(z) \to \varphi'(z))$, не выводящая из пространства. Кроме того, справедлива следующая лемма [7].

Лемма 1. *При достаточно большом b пространство $W_{M,1}^{\Omega,b}$ достаточно богато функциями на всей оси. Последовательные производные от $\varphi(x) \in W_{M,1}^{\Omega,b}$ удовлетворяют оценкам*

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta} K_\varepsilon^q q^{\frac{q}{r}} l(q)^{\frac{q}{r'}} e^{-l(|\tilde{a}x|)|\tilde{a}x|^{r'}},$$

где $\tilde{a} = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, K_ε *не зависит от* q, $q = 0, 1, \ldots; \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Здесь и в дальнейшем мы говорим, что некоторое множество Φ достаточно богато функциями $\varphi(x)$ на G, если для любой локально интегрируемой функции $u(x)$ из абсолютной сходимости интеграла

$$\int\limits_G u(x)\varphi(x)\,dx$$

и равенства его нулю для всех $\varphi(x) \in \Phi$ следует, что почти всюду на G $u(x) = 0$.

Лемма 2. *Пусть $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ — дифференциальное выражение второго порядка с постоянными коэффициентами и старшим коэффициентом, отличным от нуля, θ — фиксированное число с условием $\frac{1}{2} < \theta < 1$. Существует такое множество $M_\theta(P)$ целых аналитических функций, что*:

$$1)\ \left[P^n\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]_{x=0} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots; \varphi(z) \in M_\theta(p)); \tag{3}$$

$$2)\ |\varphi^{(q)}(x)| \leqslant CN^q q^{q\left(1-\frac{1}{2\theta}\right)} e^{-a|x|^{2\theta}} \qquad (q = 0, 1, \ldots; -\infty < x < \infty) \tag{4}$$

с некоторыми постоянными C, N, $a > 0$, зависящими от $\varphi(z)$;

г) $M_\theta(P)$ достаточно богато функциями на правой полуоси ($x \geqslant 0$).

Доказательство этой леммы будет проведено в несколько приемов.

Обозначим через V_θ множество целых аналитических функций $f(z)$, для которых

$$|f(z)| \leqslant Ce^{b|z|^\theta}, \tag{5}$$

$$|f(x)| \leqslant C'e^{-ax^\theta} \qquad \text{при } x \geqslant 0, \tag{6}$$

где C, C', a, $b > 0$ и зависят от $f(z)$. Пример такой нетривиальной функции имеется в § 8 гл. 4 [3].

Лемма 3. *Пространство V_θ достаточно богато функциями на правой полуоси ($x \geqslant 0$).*

Доказательство. Легко показать, что если $f(z) \in V_\theta$, то для функции $f_1(z) = f(x + h + iy)$ ($h \geqq 0$) выполняются оценки (5) — (6) с некоторыми C_1, C_1', a_1, $b_1 > 0$, т. е. в пространстве V_θ определена операция сдвига вдоль вещественной оси.

Далее возьмем целую аналитическую функцию $w = \cos\sqrt{\lambda z}$, где λ меняется в некотором интервале $[\lambda'', \lambda']$. Так как

$$|\cos\sqrt{\lambda z}| \leqslant C_0 e^{k|z|^{\frac{1}{2}}}$$

с некоторыми C_0, $k>0$, то в пространстве V_θ оказывается определенной операция умножения на $\cos\sqrt{\lambda z}$ $\left(\text{из-за } \frac{1}{2}<\theta\right)$, т. е. $\cos\sqrt{\lambda z} f(z)\in V_\theta$ $(\lambda\in[\lambda'', \lambda'])$, если $f(z)\in V_\theta$.

Теперь предположим, что для некоторой $\omega(x)$

$$\int_0^\infty |\omega(x) f(x)|\,dx<\infty \qquad \text{и} \qquad \int_0^\infty \omega(x) f(x)\,dx=0$$

для всех $f(x)\in V_\theta$. Нам предстоит доказать, что $\omega(x)=0$ почти всюду при $x>0$. Для этого рассмотрим равенство

$$\int_0^\infty \omega(x) f_0(x)\cos\sqrt{\lambda x}\,dx=0,$$

где $f_0(x)\in V_\theta$ и не равна тождественно нулю. После замены $x=t^2$ это дает

$$\int_0^\infty t\omega(t^2) f_0(t^2)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt=0,$$

откуда по известному свойству единственности преобразования Фурье получаем, что

$$t\omega(t^2) f_0(t^2)=0, \qquad \text{или} \qquad \sqrt{x}\omega(x) f_0(x)=0$$

почти всюду при $x>0$. Учитывая, что в V_θ определена операция сдвига, и сдвигая, если это нужно, функцию $f_0(x)$ с самого начала на $h\gtrless 0$, легко получаем, что $\omega(x)=0$ почти всюду при $x>0$.

Нам понадобится еще следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha(x)$ — *произвольная бесконечно дифференцируемая функция и* $P\left(\frac{d}{dx}\right)=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)$. *Тогда функция*

$$\varphi(x)=\alpha(x)e^{\lambda_1 x}-\alpha(-x)e^{\lambda_2 x}$$

удовлетворяет условию

$$\left[P^n\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]_{x=0}=0 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Дифференцируя $\varphi(x)$, получаем, что

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)=(\alpha''(x)+\lambda_1\alpha'(x)-\lambda_2\alpha'(x))e^{\lambda_1 x}+$$

$$+(-\alpha''(-x)+\lambda_2\alpha'(-x)-\lambda_1\alpha'(-x))e^{\lambda_2 x}.$$

Обозначая $\alpha''(x)+(\lambda_1-\lambda_2)\alpha'(x)=\alpha_1(x)$, получаем, таким образом,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)[\alpha(x)e^{\lambda_1 x}-\alpha(-x)e^{\lambda_2 x}]=\alpha_1(x)e^{\lambda_1 x}-\alpha_1(-x)e^{\lambda_2 x}.$$

Значит,

$$P^n\left(\frac{d}{dx}\right)[\alpha(x)e^{\lambda_1 x}-\alpha(-x)e^{\lambda_2 x}]=\alpha_n(x)e^{\lambda_1 x}-\alpha_n(-x)e^{\lambda_2 x},$$

откуда

$$\left[P^n\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]_{x=0}=\alpha_n(0)-\alpha_n(0)=0,$$

что и требовалось доказать.

Переходим непосредственно к доказательству леммы 2. В качестве множества $M_\theta(P)$ возьмем множество функций $\varphi(z)$, определяя их следующим образом:

$$\varphi(z) = \alpha(z) e^{\lambda_1 z} - \alpha(-z) e^{\lambda_2 z}, \qquad \alpha(z) = z f(z^2), \qquad f(z) \in V_\theta$$

(здесь λ_1, λ_2 — корни полинома $P(s)$).

Проверим, что это $M_\theta(P)$ удовлетворяет всем условиям леммы.

То, что $M_\theta(P)$ удовлетворяет условию (3), доказано в лемме 4. Проверка того, что $M_\theta(P)$ достаточно богато функциями на правой полуоси, проходит крайне просто с использованием леммы 3. Остается лишь доказать справедливость оценок (4).

Прежде всего из определения пространства V_θ следует, что при $f(z) \in V_\theta$ для функции $g(z) = f(z^2)$ справедливы оценки

$$|g(z)| \leqslant C e^{b|z|^{2\theta}}, \tag{7}$$

$$|g(x)| \leqslant C_1 e^{-a|x|^{2\theta}} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{8}$$

Если воспользоваться теоремами 1 и 2 § 7 гл. IV [3], то из условий (7) и (8) легко получить следующую оценку для $g(z)$ с некоторыми C', a_1, $b_1 > 0$:

$$|g(z)| \leqslant C' e^{-a_1|x|^{2\theta} + b_1|y|^{2\theta}}. \tag{9}$$

О целой функции $g(z)$ с условием (9) говорят [3], что она принадлежит пространству S_α^β с $\alpha = \dfrac{1}{2\theta}$, $\beta = 1 - \dfrac{1}{2\theta}$. Пространства S_α^β есть частный случай пространств W_M^Ω; они обладают, в частности, тем свойством, что в них определены операции умножения на некоторые целые функции. В нашем случае нетрудно показать, что $\varphi(z) = f(z^2) z (e^{\lambda_1 z} + e^{\lambda_2 z})$ принадлежит пространству S_α^β вместе с $f(z^2)$, т. е.

$$|\varphi(z)| \leqslant C'' e^{-a_2|x|^{2\theta} + b_2|y|^{2\theta}}$$

с некоторыми C'', a_2, $b_2 > 0$. А теперь уже видно, что оценки (4) являются хорошо известным фактом в теории пространств S_α^β ([3], § 7).

Итак, лемма 2 полностью доказана.

2°. В этом пункте будет доказана теорема 3. Напомним, что операторы B и R, о которых там идет речь, определялись по обыкновенным дифференциальным выражениям L и P, соответственно, в пространствах $L_2(\tau(x)\,dx)$ и $L_2(\varrho(x)\,dx)$, где $\tau(x) = \exp[|x|^r l(|x|)]$ и $\varrho(x) = \exp[ax^{2-\varepsilon}]$. Мы сейчас покажем, что $W_{M,1}^{\Omega,b}$ с $M(x) = \Omega(x) = \tau(x)$ и $M_\theta(P)$ с $\theta = 1 - \dfrac{\varepsilon}{4}$ входят в область определения, соответственно, операторов B и R (то, что $W_{M,1}^{\Omega,b} \subset L_2(\tau(x)\,dx)$ и $M_\theta(P) \subset L_2(\varrho(x)\,dx)$, — очевидно). Более того, мы покажем, что $B\varphi = L\varphi$ ($\varphi \in W_{M,1}^{\Omega,b}$) и $R\varphi = P\varphi$ ($\varphi \in M_\theta(P)$).

Для этого возьмем какую-нибудь бесконечно дифференцируемую функцию $\omega(x)$, равную 1 на отрезке $[-1, 1]$ и равную нулю вне отрезка $[-2, 2]$. Дальше для каждой $\varphi(x)$ из $W_{M,1}^{\Omega,b}$ построим последовательность финитных функций $\varphi_\nu(x) = \omega\left(\dfrac{x}{\nu}\right)\varphi(x)$. При этом для любого фиксированного $q \geqslant 0$ будет

$$\|\varphi^{(q)}(x) - \varphi_\nu^{(q)}(x)\|^2 = \int\limits_{|x|>\nu} |\varphi^{(q)}(x) - \varphi_\nu^{(q)}(x)|^2 \tau(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x|>\nu} \left\{ |\varphi^{(q)}(x)|^2 + \left| \left[\omega\left(\frac{x}{\nu}\right) \varphi(x) \right]^{(q)} \right|^2 \right\} \tau(x)\,dx \to 0\,,$$

учитывая, что $\varphi^{(i)}(x) \in L_2(\tau(x)\,dx)$ и $\left| \left[\omega\left(\frac{x}{\nu}\right) \right]^{(i)} \right| \leqslant C_q$ $(0 \leqslant i \leqslant q)$. Отсюда сразу получается, что для последовательности $\varphi_\nu(x)$

$$\|\varphi(x) - \varphi_\nu(x)\| \to 0 \quad \text{и} \quad \|L\varphi - L\varphi_\nu\| \to 0 \qquad (\nu \to \infty).$$

А это как раз и означает, что $W^{\Omega,b}_{M,1} \subset D(B)$ и $B\varphi = L\varphi$ $(\varphi \in W^{\Omega,b}_{M,1})$.

То же самое мы теперь проделаем для случая оператора R и пространства $L_2(\varrho(x)\,dx)$. Последовательность финитных на $[0, \infty)$ бесконечно дифференцируемых функций $\widetilde{\varphi}_\nu(x)$ для функции $\varphi(x) \in M_\theta(P)$ выберем такой, что $\widetilde{\varphi}_\nu(x)$ равна нулю на $\left[0, \frac{1}{2\nu}\right]$, а на полуоси $x > \nu$ $\widetilde{\varphi}_\nu(x)$ совпадает с $\varphi_\nu(x)$, которая строилась выше. Очевидно, что при этом $\|\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\nu(x)\|_1 \to 0$ $(\nu \to \infty)$. Кроме того,

$$\|P\varphi - P\widetilde{\varphi}_\nu\|_1^2 = \int\limits_0^{\frac{1}{\nu}} |P\varphi(x) - P\widetilde{\varphi}_\nu(x)|^2 \varrho(x)\,dx + \int\limits_\nu^\infty |P\varphi(x) - P\widetilde{\varphi}_\nu(x)|^2 \varrho(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu} \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\nu}} (|P\varphi(x) - P\widetilde{\varphi}_\nu(x)|^2 \varrho(x)) + \int\limits_\nu^\infty |P\varphi(x) - P\widetilde{\varphi}_\nu(x)|^2 \varrho(x)\,dx\,.$$

Ясно, что последний интеграл стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Далее, из непрерывности функций $P\varphi(x)$ и $P\widetilde{\varphi}_\nu(x)$ и условий $[P\varphi(x)]_{x=0} = [P\widetilde{\varphi}_\nu(x)]_{x=0} = 0$ следует, что

$$\frac{1}{\nu} \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\nu}} (|P\varphi(x) - P\widetilde{\varphi}_\nu(x)|^2 \varrho(x)) \to 0 \qquad (\nu \to \infty)\,,$$

откуда $\|P\varphi - P\widetilde{\varphi}_\nu\|_1 \to 0$ $(\nu \to \infty)$, что и требовалось показать.

Заметим, что из свойств пространства $W^{\Omega,b}_{M,1}$, леммы 2 и из доказанного только что сразу вытекает, что $W^{\Omega,b}_{M,1}$ и $M_\theta(P)$ являются инвариантными подпространствами, соответственно, операторов B и R.

Теперь предположим, что u_t принадлежит $L_2(\tau(x)\,dx)$ при каждом $t \in [0, T]$ и является слабым решением задачи Коши

$$\frac{du_t}{dt} - B^* u_t = 0\,, \qquad u_0 = 0.$$

Так как для u_t справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}(u_t, \varphi) = (u_t, B\varphi) \qquad (\varphi \in W^{\Omega,b}_{M,1}),$$

а $W^{\Omega,b}_{M,1}$ — инвариантное подпространство оператора B, то функция $F_\varphi(t) = (u_t, \varphi)$ $(\varphi \in W^{\Omega,b}_{M,1})$ оказывается бесконечно дифференцируемой по t, причем

$$\frac{d^N}{dt^N} F_\varphi(t) = (u_t, B^N\varphi) = (u_t, L^N\varphi),$$

$$\left|\frac{d^N}{dt^N}F_\varphi(t)\right| = |(u_t, L^N\varphi)| \leqslant \|u_t\|\cdot\|L^N\varphi\| = \|u_t\|\cdot\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|L^N\varphi|^2\tau(x)\,dx}\,.$$

Так как L^N — выражение порядка Nr, то по лемме 1 получаем, что

$$|L^N\varphi(x)| \leqslant A_\varepsilon^N N^N l(N)^{N\frac{r}{r'}} e^{-|\widetilde{a}x|^{r'} l(|\widetilde{a}x|)},$$

где $A_\varepsilon > 0$ — некоторая величина, не зависящая от N, $\widetilde{a} = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. Из этой оценки следует, что

$$\left|\frac{d^N}{dt^N}F_\varphi(t)\right| \leqslant \|u_t\| A_\varepsilon^N N^N l(N)^{N\frac{r}{r'}} \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\widetilde{a}x|^{r'} l(|\widetilde{a}x|)}\tau(x)dx} \leqslant$$

$$\leqslant C_T A_\varepsilon^N N^N l(N)^{N\frac{r}{r'}} C_1 = m_N,$$

где C_1^2 — значение интеграла (ясно, что оно конечно), а C_T — константа, которой ограничены в совокупности $\|u_t\|$, $t \in [0, T]$. Существование такой C_T следует из слабой непрерывности u_t, которая, в свою очередь, следует из предположения слабой дифференцируемости u_t.

Нетрудно проверить, что последовательность m_N удовлетворяет условию $\sum \frac{1}{\sqrt[N]{m_N}} = \infty$. Кроме того, видно, что все производные $F_\varphi^{(N)}(t)$ при $t=0$ обращаются в нуль. Из теории квазианалитических функций известно [6], что функция $F_\varphi(t)$ с такими свойствами как у нас, тождественно равна нулю на $[0, T]$. Т. е. мы получили, что

$$F_\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x)\overline{\varphi(x)}\tau(x)\,dx = 0, \quad t \in [0, T]$$

для функций $\varphi(x) \in W_{M,1}^{\Omega,b}$. Но пространство $W_{M,1}^{\Omega,b}$ достаточно богато функциями на $(-\infty, \infty)$, поэтому $u_t(x)\tau(x) = 0$ почти всюду при каждом $t \in [0, T]$, и, значит $u_t = 0$ в $L_2(\tau(x)\,dx)$ $(t \in [0, T])$.

Нам осталось показать, что слабое решение u_t задачи Коши

$$\frac{du_t}{dt} - R^* u_t = 0, \qquad u_0 = 0, \qquad (t \in [0, T])$$

в $L_2(\varrho(x)\,dx)$ тоже равно нулю. Но это рассуждение мы опускаем, так как оно сводится к очевидным изменениям предыдущего доказательства.

Итак, теорема 3 полностью доказана.

§ 3. О неединственности представления одного п. о. ядра

Здесь на примере одного конкретного п. о. ядра и конкретного выражения L мы покажем, что оценки (1), даваемые теоремой 1 для единственности его интегрального представления, не могут быть улучшены.

Итак, пусть $k(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — непрерывная действительная, четная функция, для которой ядро $K(x, y) = \frac{1}{2}[k(x+y) + k(y-x)]$ п. о., и $L = -\frac{d^2}{dx^2} = L^+$.

Собственными функциями для L есть $\cos\sqrt{\lambda}x$ и $\sin\sqrt{\lambda}x$.

Если предположить, что

$$|K(x, y)| \leqslant Ce^{x^2l(|x|)+y^2l(|y|)} \qquad (C > 0,\ l(s) \in I(2)),$$

то согласно теореме 1 будет иметь место и будет единственным представление (2), или, исходя из четности $k(t)$, будет

$$K(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x \cos\sqrt{\lambda}y d\sigma(\lambda),$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная на $(-\infty, \infty)$ мера. Отсюда легко получить, что с той же $d\sigma(\lambda)$ будет

$$k(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t d\sigma(\lambda), \tag{10}$$

откуда, в свою очередь, следует предыдущее равенство. В частности, в последнем представлении $d\sigma(\lambda)$ будет определяться однозначно, если $|k(t)| \leqslant C_1 \exp[x^2 l_1(|x|)]$ $(C_1 > 0,\ l_1(x) \in I(2))$, так как из этого условия легко следует нужное условие для ядра $K(x, y)$. Более того, это последнее условие, гарантирующее единственность представления (10), нельзя улучшить. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Рассмотрим множество всех функций $k(t)$, имеющих представление* (10) *с неотрицательной мерой $d\sigma(\lambda)$ и таких, что $|k(t)| \leqslant C\exp[t^2h(t)]$, где $h(t)$ — медленно растущая функция, не принадлежащая $I(2)$, т. е. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{th(t)} = C_0 < \infty$. Тогда в этом множестве найдется такая функция $k_0(t)$, что для нее справедливо представление* (10) *с различными $d\sigma(\lambda)$.*

Эту теорему мы докажем, отправляясь от аналогичной теоремы Е. Б. Вул [2].

Теорема 5* [2]. *Рассмотрим класс функций $f(x)$, представимых в виде*

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x d\omega(\lambda), \tag{11}$$

где $\omega(\lambda)$ — комплекснозначная функция ограниченной вариации такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \exp[\sqrt{|\lambda|}x] |d\omega(\lambda)| \leqslant C\exp[\varrho(x)], \quad x > 0. \tag{12}$$

Если $\varrho(x)$ дифференцируема, $\varrho'(x)$ монотонно возрастает, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\varrho'(x)}{\varrho(x)} = \gamma > 1$ и $\int\limits_1^{\infty} t^{-2}\tau(t)\,dt < \infty$, где $\tau(x)$ — обратная функция к $\varrho'(x)$, то существует такая функция $f_0(t)$, что ее представление в виде (11) *неединственно в классе функций $\omega(\lambda)$, удовлетворяющих* (12).

Доказательство теоремы 4. Сначала на основании теоремы 5* построим для любой функции $\varrho(x)$, удовлетворяющей требованиям теоремы 5*, такую $k_0(t)$, что для нее $|k_0(t)| \leqslant C_0 \exp[\varrho(x)]$ и она имеет неединственное представление (10). После этого нам останется показать, что при $\int\limits_1^{\infty} s^{-1}h^{-1}(s)\,ds = C_0 < \infty$ функция $\varrho(x) = x^2h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5*.

Пусть $f_0(t)$ — одна из функций, о которой идет речь в теореме 5*, т. е.

$$f_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda} t d\omega'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda} t d\omega''(\lambda) \qquad (d\omega'(\lambda) \neq d\omega''(\lambda)).$$

Тогда хотя бы одна из следующих функций

$$F_1(t) = f_0(t) + \overline{f_0(t)}, \qquad F_2(t) = -i(f_0(t) - \overline{f_0(t)})$$

(пусть, для определенности, это будет $F_1(t)$) имеет два представления:

$$F_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda} t d\sigma_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda} t d\sigma_2(\lambda)$$

с различными действительными функциями $\sigma_1(\lambda) = 2\omega_1'(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda) = 2\omega_1''(\lambda)$ ограниченной вариации (здесь обозначено $\omega'(\lambda) = \omega_1'(\lambda) + i\omega_2'(\lambda)$, $\omega''(\lambda) = \omega_1''(\lambda) + i\omega_2''(\lambda)$). Обозначим, далее, $\sigma_i(\lambda) = \sigma_i^+(\lambda) - \sigma_i^-(\lambda)$, где $\sigma_i^+(\lambda)$ и $\sigma_i^-(\lambda)$ — неубывающие ограниченные функции, и в качестве искомой функции, $k_0(t)$ возьмем

$$k_0(t) = F_1(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda} t d[\sigma_1^-(\lambda) + \sigma_2^-(\lambda)].$$

Действительно, $k_0(t)$ имеет два различных представления (10) с неотрицательными мерами $d[\sigma_1^+(\lambda) + \sigma_2^-(\lambda)]$ в $d[\sigma_2^+(\lambda) + \sigma_1^-(\lambda)$. Кроме того,

$$|k_0(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\cos\sqrt{\lambda} t||d(\sigma_1^+(\lambda) + \sigma_2^-(\lambda))| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\cos\sqrt{\lambda} t||d\omega'(\lambda)| +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\cos\sqrt{\lambda} t||d\omega''(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \exp[|\sqrt{|\lambda|} t|] |d\omega'(\lambda)| + \int_{-\infty}^{0} \exp[|\sqrt{|\lambda|} t|] |d\omega''(\lambda)| +$$

$$+ \operatorname{var} \omega'(\lambda) + \operatorname{var} \omega''(\lambda) \leqslant C \exp[\varrho(x)].$$

Таким образом, требуемая функция $k_0(t)$ по $\varrho(x)$ построена.

Теперь покажем, что функция $\varrho(x) = x^2 h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5*. Ясно, что $\varrho(x)$ дифференцируема и $\varrho'(x)$ возрастает (так как $x^2 h(x)$ — выпуклая). Кроме того,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\varrho'(x)}{\varrho(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 h(x) + x^2 h'(x)}{x^2 h(x)} \geqslant 2.$$

Поэтому остается проверить, что $\varrho(x) = x^2 h(x)$ удовлетворяет условию $\int_1^{\infty} \frac{\tau(x)}{x^2} dx < \infty$, где $\tau(x)$ — обратная функция к $[x^2 h(x)]'$. Для этого заметим, что $\varrho(x)$ и $\int_0^x \tau(y) dy = \nu(x)$ есть двойственные по Юнгу функции и, значит, для них справедливы неравенства [5]: а) $\nu(s) \leqslant s\nu'(s) \leqslant \nu(2s)$ $(s > 0)$; б) $s < \nu^{-1}(s)\varrho^{-1}(s) \leqslant 2s$ $(s > 0)$, где $\nu^{-1}(s)$ и $\varrho^{-1}(s)$ — обратные функции, соответственно, к $\nu(s)$ и $\varrho(s)$.

Рассмотрим цепочку интегралов

$$\int_{a_1}^{\infty} \frac{\nu'(s)}{s^2} ds = \int_{a_1}^{\infty} \frac{\tau(s)}{s^2} ds, \qquad \int_{a_2}^{\infty} \frac{dz}{[\nu^{-1}(z)]^2}, \qquad \int_{a_3}^{\infty} \frac{[\varrho^{-1}(z)]^2}{z^2} dz.$$

$$\int_{a_4}^{\infty} \frac{t^2}{\varrho(t)^2}\varrho'(t)\,dt, \qquad \int_{a_5}^{\infty} \frac{s\,ds}{\varrho(s)} = \int_{a_5}^{\infty} \frac{ds}{sh(s)}.$$

Из неравенств а) и б) легко видеть, что каждый из приведенных интегралов эквивалентен в смысле сходимости предыдущему. А так как $\int_1^{\infty} \frac{ds}{sh(s)} < \infty$, то и $\int_1^{\infty} \frac{\tau(s)}{s^2}\,ds < \infty$. Этим теорема 4 полностью доказана.

В заключение автор благодарит Ю. М. Березанского за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера, ДАН СССР, т. 136, № 5, 1961.
2. Е. Б. Вул, О теоремах единственности для одного класса интегральных представлений, ДАН СССР, т. 129, № 4, 1959.
3. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 2, Физматгиз, М., 1958.
4. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, М., 1958.
5. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958.
6. С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, ОНТИ, 1937.
7. Н. Н. Чаус, О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, Укр. матем. ж., т. XVI, № 3, 1964.

Поступила 22.VI 1965 г.
Киев