1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 18, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Критерии устойчивой выпуклости области при однолистных конформных отображениях. I

Н. И. Черней

1. Пусть D — некоторая односвязная область в круге $|z|<1$. Условимся называть эту область *устойчиво выпуклой* относительно некоторого множества $\mathfrak{M}$ однолистных отображений круга $|z|<1$ (короче: *$\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклой*), если ее образами при этих отображениях являются выпуклые области. В дальнейшем будем предполагать, что множество $\mathfrak{M}$ есть класс всех однолистных выпуклых отображений круга $|z|<1$. Так как в классе $\mathfrak{M}$ содержится тождественное отображение, то всякая $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклая область должна быть выпуклой.

Обозначим через S° подкласс функций $w=f(z)\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f^1(0)=1$. Легко видеть, что из $F(z)\in\mathfrak{M}$ следует

$$f(z)=\frac{F(z)-F(0)}{F'(0)}\in S^\circ.$$

Условимся называть каждую окружность в круге $|z|\leqslant 1$, касающуюся окружности $|z|=1$, *орициклом*. Через каждую пару различных точек в круге $|z|<1$ проходят точно два орицикла. Отсюда следует, что через каждую точку в круге $|z|<1$ проходят тоже точно два орицикла, касающиеся в этой точке любой заранее проведенной через нее прямой.

2. В работе [1] доказана следующая теорема, устанавливающая критерий $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости, который будем называть в дальнейшем внутренним критерием.

Теорема 1*. *Выпуклая область D в круге $|z|<1$ обладает $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклостью тогда и только тогда, когда для каждой пары точек z_1 и z_2 ($z_1\neq z_2$) в D дуги двух орициклов, проходящие через эти точки и образующие выпуклую луночку, принадлежат D.*

Примечание. Так как D — односвязная область, то вместе с границей луночки, упоминаемой в теореме, и сама луночка содержится в области D.

Целью настоящей заметки является установление некоторых свойств $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклых областей в круге $|z|<1$, а также выяснение связи между теоремой 1 и аналитическим критерием $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости областей с достаточно гладкой границей в круге $|z|<1$, который получается методом, указанным в работе [2]. Наконец, некоторые результаты обобщаются на многомерные пространства.

3. Теорема 2. *Если область D в круге $|z|<1$ является $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклой, то полагая $\zeta=l(z;z_0,\alpha)\equiv e^{i\alpha}\dfrac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$, где $|z_0|<1$, $\alpha\in[0,$*

* Редакция теоремы наша.

$2\pi]$, *мы получаем область* $l(D; z_0, \alpha)$ *в круге* $|\zeta| < 1$, *которая тоже* $\mathfrak{M}$-*устойчиво выпукла.*

Доказательство. Достаточно заметить, что преобразование $\zeta = l(z; z_0, \alpha)$ превращает круг $|z| \leqslant 1$ в круг $|\zeta| \leqslant 1$, а орициклы первого круга — в орициклы второго. Затем применяем теорему 1.

Теорема 3. *Пусть* M — *какая-нибудь точка границы* C *области* D *в круге* $|z| < 1$, *являющейся* $\mathfrak{M}$-*устойчиво выпуклой, а* l_M — *опорная прямая* области* D *в точке* M. *Тогда один из двух орициклов, проходящих через точку* M *и касающихся прямой* l_M *в этой точке, содержит область* D.

Доказательство. Точку M можно рассматривать как предельную для последовательности пар различных точек $(M_n, \dot{M}_n)$ кривой C, выбранных так, что M лежит на каждой дуге $M_n\dot{M}_n$ кривой C, а прямая l_M есть предельное положение секущей $\dot{M}_n\dot{M}_n$ при $n \to \infty$. Проведем через точки M_n и $\dot{M}_n$ орицикл Γ_n так, чтобы дуга $\dot{M}_n M M_n$ кривой C лежала вне Γ_n. Тогда этот орицикл разделит область D на две части (на основании теоремы 1), одна из которых лежит внутри, а другая — вне Γ_n. При $n \to \infty$ орицикл Γ_n, переходит в орицикл Γ, удовлетворяющий условию теоремы.

Определение. Условимся называть орицикл Γ, проходящий через точку M границы C выпуклой области D в круге $|z| < 1$, касающийся в этой точке опорной прямой l_M области D и расположенный в той же полуплоскости относительно l_M, что и D, *соприкасательным орициклом* кривой C в точке M, ассоциированным с прямой l_M.

Теорема 4. *Если выпуклая область* D *в круге* $|z| < 1$ *содержится в каждом соприкасательном орицикле своей границы* C, *то она* $\mathfrak{M}$-*устойчиво выпукла.*

Доказательство. Предположим, что область D не является устойчиво выпуклой. Тогда, на основании теоремы 1, на границе C области D можно указать такую пару точек M_1 и M_2, что дуга M_1M_2 орицикла Γ, проходящего через эти точки и касающегося основной окружности $|z| = 1$ в некоторой точке P, лежит вне области D. Уменьшая радиус орицикла Γ без нарушения его точки касания P с окружностью $|z| = 1$, получим орицикл, который будет касаться опорной прямой к области D в некоторой точке M дуги M_1M_2 кривой C и, очевидно, не будет содержать область D. Это противоречит условию теоремы 4, что и требовалось доказать.

Условимся называть свойство области D, указанное в условии теоремы 4, ***H***-*свойством.*

Примечание. Теорему 4 можно доказать и по-иному, а именно, используя тот факт, что выпуклая область D, содержась в каждом соприкасательном орицикле своей границы, является пересечением замкнутых кругов, границы которых есть упомянутые выше соприкасательные орициклы.

Из теорем 3 и 4 следует, очевидно, такая теорема.

Теорема 5. *Чтобы область* D *в круге* $|z| < 1$ *была* $\mathfrak{M}$-*устойчиво выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она обладала* ***H***-*свойством.*

Критерий $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости, указанный в теореме 5, будем называть первым граничным критерием или ***H***-критерием. Он эквивалентен внутреннему критерию, указанному в теореме 1.

4. Теперь исследуем другую форму граничного критерия $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости области D в круге $|z| < 1$, связанную с кривизной границы C этой области.

Предположим, что область D ограничена такой гладкой кривой C, которая имеет в каждой своей точке определенную кривизну и, следовательно, определенную окружность кривизны. Условимся такие области D называть *регулярными*. В этом случае, очевидно, в каждой точке кривой C суще-

* Опорных прямых у области D в точке M может быть бесконечно много. Речь идет о любой из них.

ствует только один соприкасательный орицикл. Предполагая, что регулярная область D является $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклой, и применяя теорему 5, получаем следующее свойство этих областей.

Теорема 6. *Если область D в круге $|z| < 1$ регулярна и $\mathfrak{M}$-устойчиво выпукла, то кривизна ее границы C в любой точке не меньше кривизны соприкасательного орицикла в этой точке.*

Оказывается, что свойство, выраженное в этой теореме, не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы регулярная в круге $|z| < 1$ выпуклая область D была $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклой. Вот доказательство этого утверждения. Если $w = f(z) \in \mathfrak{M}$ и $\vec{\tau}$ есть положительно ориентированный орт касательной к кривой C, являющейся границей регулярной выпуклой области D в круге $|z| < 1$, в точке M с аффиксом z, то, обозначая через K_z и $\widetilde{K}_z$ соответственно кривизны кривой C и соприкасательного орицикла в точке z, мы, как известно [3], получаем для кривизн K_W и $\widetilde{K}_W$ их образов в точке $w = f(z)$ выражения

$$K_w = \frac{1}{|f'(z)|}\left[K_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] \tag{1}$$

и

$$\widetilde{K}_w = \frac{1}{|f'(z)|}\left[\widetilde{K}_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right]. \tag{2}$$

Отсюда $K_w - \widetilde{K}_w = \frac{1}{|f'(z)|}(K_z - \widetilde{K}_z)$. Но $K_z \geqslant \widetilde{K}_z$. Поэтому $K_w \geqslant \widetilde{K}_w$.

Величина $\widetilde{K}_z$ является кривизной соприкасательного орицикла кривой C в точке M, а $\widetilde{K}_w$ — кривизна образа этого орицикла, но каждая окружность в круге $|z| \leqslant 1$ преобразуется каждой функцией из $\mathfrak{M}$, как известно, в выпуклую область. Поэтому $\widetilde{K}_w \geqslant 0$, и следовательно, $K_w \geqslant 0$, т. е. образом кривой C является выпуклая кривая, что и доказывает $\mathfrak{M}$-устойчивую выпуклость регулярной выпуклой области D, для которой во всех точках ее контура C соблюдается условие $K_z \geqslant \widetilde{K}_z$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Если D — регулярная выпуклая область в круге $|z| < 1$ и ее граница C обладает тем свойством, что кривизна ее в каждой точке не меньше кривизны соприкасательного орицикла в этой точке, то D является $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклой областью.*

Из сопоставления теорем 6 и 7 получаем для регулярных выпуклых областей в круге $|z| < 1$ еще один граничный критерий $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости, который условно назовем вторым граничным критерием или ***K**-критерием*. Этот же самый критерий, но только в виде некоторого дифференциального неравенства, скрывающего его простой геометрический смысл, можно получить, применяя метод, указанный в работе [2]. Если учесть известную оценку для класса $\mathfrak{M}$

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2r}{1-r^2},$$

где $|z| = r < 1$, и применить вышеупомянутый метод, то получим необходимое и достаточное условие $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости области D в круге $|z| < 1$ с дважды непрерывно дифференцируемой границей $C : z = \omega + r(\psi)e^{i\psi}$, $\omega \in D$, в виде следующего неравенства:

$$\frac{2\varrho(\varphi)}{\sqrt{r^2(\psi) + r'^2(\psi)}}[r(\psi)\cos(\psi-\varphi) + r'(\psi)\sin(\psi-\varphi)] + [1-\varrho^2(\varphi)]\cdot K_C \geqslant 2, \tag{3}$$

где

$$\varrho(\varphi)\, e^{i\varphi} = \omega + r(\psi)\, e^{i\psi} \tag{4}$$

в любой точке P кривой C, а K_C — кривизна C в точке P.

Пусть $z = z(t) \equiv x(t) + iy(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ — уравнение соприкасательного орицикла Γ в точке P. Тогда кривизна его в этой точке равна

$$K_\Gamma = \frac{2}{1 - x^2 - y^2}\left(1 - \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right). \tag{5}$$

Учитывая (4), получаем

$$x = \varrho\cos\varphi \equiv \omega + r\cos\psi; \qquad y = \varrho\sin\varphi \equiv \omega + r\sin\psi.$$

С помощью этих формул выражение (5) может быть записано так:

$$K_\Gamma = \frac{2}{1 - \varrho^2}\left\{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\left[r(\psi)\cos(\psi - \varphi) + r'(\psi)\sin(\psi - \varphi)\right]\right\}.$$

Следовательно, неравенство (3) принимает простой вид:

$$K_C \geqslant K_\Gamma.$$

Таким образом, мы можем констатировать, что нами получен новый граничный критерий, эквивалентный внутреннему, установлен второй граничный критерий $\mathfrak{M}$-устойчивой выпуклости для регулярных выпуклых областей в круге $|z| < 1$ и разъяснен геометрический смысл этого второго граничного критерия. Граничный критерий для регулярных выпуклых областей доказан двумя методами, благодаря чему выясняется связь между исследованиями, проведенными в работах [1] и [2]. Это открывает путь для дальнейших обобщений, которым посвящается вторая заметка под тем же названием.

5. Здесь мы обобщаем K- критерий на нерегулярные выпуклые области.

Пусть дана ограниченная выпуклая область D и пусть M — любая точка ее границы C, а l_M — опорная прямая области D в точке M.

Возьмем на C точку M_1, отличную от M, и проведем окружность, касающуюся прямой l_M в точке M и проходящую через точку M_1. Радиус этой окружности обозначим $R(M_1)$.

Пусть

$$\overline{R}(M) = \overline{\lim_{M_1 \to M}}\, R(M_1),$$

$$\underline{R}(M) = \underline{\lim_{M_1 \to M}}\, R(M_1).$$

Обозначим

$$\overline{K}(M) = \frac{1}{\overline{R}(M)},$$

$$\underline{K}(M) = \frac{1}{\underline{R}(M)}.$$

Если область D в круге $|z| < 1$ является $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклой и $K(M)$ — кривизна соприкасательного орицикла кривой C в точке M, ассоциированного с прямой l_M, то в силу H-свойства, получаем, что

$$\underline{K}(M) \geqslant K(M). \tag{*}$$

Условимся называть $\underline{K}(M)$ «нижней кривизной», а $\overline{K}(M)$ — «верхней кривизной» кривой C в точке M относительно опорной прямой l_M.

Тогда получаем следующее обобщение теоремы 6.

Т е о р е м а 8. *Если выпуклая область D в круге $|z| < 1$ $\mathfrak{M}$-устойчиво выпукла, то нижняя кривизна ее границы C в любой точке M относительно любой опорной прямой l_M области D в этой точке не меньше кривизны соприкасательного орицикла кривой C в точке M, ассоциированного с прямой l_M.*

Нижняя кривизна относительно опорной прямой может равняться $+\infty$. В этом случае неравенство (*) тривиально. Интерес представляют такие случаи, когда $\underline{K}(M) < +\infty$.. Пользуясь понятием нижней кривизны, применяя только отображения класса $\mathfrak{M}$ круга $|z| < 1$ и имея в виду только замкнутые выпуклые кривые C, вместо формулы (1), как показал В. А. Зморович, можно получить формулу

$$\underline{K}_w = \frac{1}{|f'(z)|}\left[\underline{K}_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right], \tag{6}$$

где $\vec{\tau}$ — положительно ориентированный орт опорной прямой l_M контура C в точке z, относительно которой вычисляется $\underline{K}_z$. При $\underline{K}_z = +\infty$ нужно считать $\underline{K}_w = +\infty$. Формула (6) остается без изменения. Поэтому, применяя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 7, с заменой формулы (1) на (6), получаем теорему, обратную теореме 8.

Таким образом, доказывается общий K-критерий, эквивалентный H-критерию, применимый к любым выпуклым областям в круге $|z| < 1$.

6. В настоящем параграфе покажем, как некоторые критерии устойчивой выпуклости, установленные в предыдущих параграфах, могут быть обобщены на многомерные пространства.

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_n совокупность T_n взаимно однозначных отображений шара Q_n: $\sum\limits_1^n x_k^2 \leqslant 1$ в выпуклые области пространства E_n, причем таких, что всякий шар, содержащийся в Q_n и касающийся сферы $\sum\limits_1^n x_k^2 = 1$, также переходит в выпуклую область. Множество T_n непусто, так как оно содержит тождественное преобразование и все преобразования шара, являющиеся произведениями четного числа симметрий относительно плоскостей и сфер пространства E_n.

Рассмотрим пространство E_3. Назовем орисферами шара Q_3 все сферы, содержащиеся в Q_3 и касающиеся поверхности этого шара. Если M — какая-нибудь внутренняя точка шара Q_3, а α_M — какая-нибудь плоскость, проходящая через точку M, то в шаре Q_3 существуют, как нетрудно показать, только две орисферы, которые касаются плоскости α_M в точке M и расположены по разные стороны от α_M.

Предположим теперь, что D — некоторая выпуклая область в шаре Q_3. Если эта область обладает T_3-устойчивой выпуклостью, то она должна иметь такое свойство.

Ни одна орисфера, проходящая через внутренние точки области D, не может содержать односвязного своего участка, который не лежит внутри D, но граница которого принадлежит поверхности области D; причем на этом участке нет точки касания орисферы с поверхностью шара Q_3. Это свойство легко обосновать рассуждением от противного. Допустим, что орисфера Γ пересекается с поверхностью C области D по некоторой простой замкнутой кривой L, и пусть часть Γ, ограниченная L, лежит вне D. Обозначим эту часть Γ через Δ и предположим, что точка P касания Γ с поверхностью шара Q_3 не содержится в Δ. Подвергнем шар Q_3 такому преобразованию $q \in T_3$, которое переводит P в бесконечно удаленную точку, поверхность шара в плоскость, а орисферу — в плоскость, параллельную первой плоскости. При этом шар Q_3 превращается в полупространство, а область D — в некоторую область qD этого полупространства. Пусть qL — образ кривой L. Возьмем на qL какие-нибудь две точки M_1' и M_2', и пусть M_1 и M_2 — прообразы этих точек, расположенные на L. Поскольку образ Δ — плоская фигура с контуром qL и поскольку образ Δ не принадлежит области qD и не является частью границы области qD, то отрезок $M_1'M_2'$ не может принадлежать замкнутой области qD, т. е. область qD не является выпуклой. Но тогда D не является T_3-устойчиво выпуклой вопреки предположению.

Доказанное свойство T_3-устойчиво выпуклых областей в Q_3 (назовем его *W-свойством*) является не только их необходимым, но и достаточным признаком. Чтобы это обнаружить, докажем, что из W-свойства вытекает другое свойство, аналогичное H-свойству в случае плоскости. Для этого, взяв точку M на поверхности C области D и проведя через эту точку какую-нибудь опорную плоскость S_M к поверхности C, вводим, по аналогии с понятием соприкасательного орицикла, понятие соприкасательной орисферы области D, ассоциированной с опорной плоскостью S_M. Легко доказать необходимость H-свойства, т. е. что область D содержится внутри каждой своей соприкасательной орисферы. Это вытекает из W-свойства области D.

Если теперь P — какая-нибудь внешняя относительно D точка, то она не может, как нетрудно убедиться, лежать внутри всех соприкасательных орисфер области D. Поэтому область D можно рассматривать как пересечение системы шаров, ограниченных соприкасательными орисферами области D. Поскольку любое преобразование $q \in T_3$ переводит каждую орисферу в выпуклую поверхность, то область qD тоже выпукла, как пересечение семейства выпуклых областей. Следовательно, H-свойство является и достаточным для T_3-устойчивой выпуклости области D. А потому и само W-свойство есть тоже достаточный признак T_3-устойчивой выпуклости.

Итак, мы имеем два эквивалентных признака T_3-устойчивой выпуклости: W-свойство и H-свойство. Одно — внутреннее, другое — граничное. Получается аналогия с плоскостью.

Проведенные выше рассуждения, как нетрудно понять, допускают прямое обобщение на $E_n (n > 3)$, поскольку они не зависят по существу от n. Что касается признака T_3-устойчивой выпуклости, аналогичного K-свойству, рассмотренному в п. 4, то исследования возможности его обобщения на пространство E_n $(n \geqslant 3)$ мы здесь производить не будем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Pommerenke, Images of convex domains under conformal mappings, Mich. Math. J., 9, N 3, 1962.
2. И. А. Александров, Об условиях выпуклости образов области при отображении ее регулярными однолистными в единичном круге функциями, Изв. высш. уч. завед., Математика, № 6, 1958.
3. В. А. Зморович, Про границі коливання кривизни образу плоскої кривої при однолистих конформних відображеннях, Доп. АН УРСР, 4, 1959.

Поступила 26.VI 1965 г.
Киев