Некоторые задачи, связанные с выходом процесса с независимыми приращениями на одностороннюю и двустороннюю прямолинейные границы

Э. С. Штатланд

Пусть $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, имеющий только положительные скачки и отрицательный снос:

$$\mathbf{M}e^{-s\xi(t)}=\exp\{tA(s)\},$$

$$A(s)=-\gamma s+\int_0^\infty\left(e^{-sx}-1+\frac{sx}{1+x^2}\right)dN(x),\qquad \mathrm{Re}\,(s)\geqslant 0,$$

$$\gamma-\int_0^\infty\frac{x}{1+x^2}\,dN(x)<0.$$

В статье рассматривается ряд вопросов, так или иначе связанных с распределением максимума этого процесса. В § 1, 2 изучаются распределения максимума и момента его достижения, в частности поведение этих распределений при $\mathbf{M}\xi(1)\uparrow 0$ (известно, что при $\mathbf{M}\xi(1)\uparrow 0$ оба распределения вырождаются на бесконечности). В § 3 рассматривается величина первого перескока процесса через неотрицательный уровень. При этом некоторые результаты Б. А. Рогозина [5] непосредственно переносятся на случай процессов с непрерывным временем. Отметим, что именно в непрерывной схеме все формулы приобретают наиболее простой вид. В § 4, используя результаты § 3, мы находим преобразование Лапласа момента первого выхода из прямолинейной полосы.

§ **1.** Введем следующие обозначения:

$$F(t,x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)<x\},\qquad \varphi(t,s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(t,x),$$

$$\Phi(x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t<\infty}\xi(t)<x\}.$$

Для $\varphi(t,s)$ известна формула [4]

$$\varphi(t,s)=e^{tA(s)}-s\int_0^t e^{(t-u)A(s)}F(u)\,du, \tag{1}$$

где функция $F(u)$ определяется своим преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du=\frac{1}{\eta(s)},\quad A(\eta(s))=s,\quad \mathrm{Re}\,(s)\geqslant 0$$

В работе [1] доказано, что при $\mathbf{M}\xi(1) < 0$ распределение $F(t, x)$ сходится к предельному распределению $\Phi(x)$, для которого

$$\int_0^\infty e^{-sx}\Phi(x)\,dx = -\frac{\mathbf{M}\xi(1)}{A(s)}. \tag{2}$$

Если $\mathbf{M}\xi(1) \geqslant 0$, то предельное распределение максимума вырождается на бесконечности ($\Phi(x) = 0$). Ясно, что при малых значениях $\mathbf{M}\xi(1)$ ($\mathbf{M}\xi(1) < 0$) распределение $F(t, x)$ будет медленно сходиться к $\Phi(x)$, и $\Phi(x) \to 0$ для любого x при $\delta = -\mathbf{M}\xi(1) \downarrow 0$.

В этом параграфе изучается поведение $F(t, x)$ при $t \to \infty$, $\delta \downarrow 0$ и $\Phi(x)$ при $\delta \downarrow 0$. Обобщаются результаты О. В. Вискова [2], касающиеся предельного поведения распределения времени ожидания в однолинейной системе обслуживания (известно, что время ожидания распределено как максимум некоторого процесса с независимыми приращениями пуассоновского типа с положительными скачками и отрицательным сносом, равным — 1). При этом удается упростить доказательство основной теоремы [2] и избавиться от жестких ограничений на $\xi(t)$: в [2] требовалось, например, чтобы существовали все моменты процесса $\xi(t)$, мы потребуем только существования дисперсии.

Теорема 1. *Если $t \to \infty$ и $\delta = -\mathbf{M}\xi(1) \downarrow 0$ так, что $t\delta^2 \to \tau$, $0 < \tau < \infty$, то*

$$\varphi(t, s\delta) = \mathbf{M}\exp\{-\delta s[\sup_{0 \leqslant u \leqslant t}\xi(u)]\} \to e^{s\tau(\sigma^2 s+1)}\left[1 - s\int_0^\tau e^{-s(\sigma^2 s+1)}f(u)\,du\right],$$

где σ^2 — дисперсия $\xi(1)$,

$$f(u) = 1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-\frac{v}{4\sigma^2}}v^{-\frac{3}{2}}\,dv.$$

Доказательство:

$$\varphi\left(\frac{\tau}{\delta^2}, \delta s\right) = e^{\frac{\tau}{\delta^2}A(s\delta)}\left[1 - s\delta\int_0^{\frac{\tau}{\delta^2}} e^{-uA(s\delta)}F(u)\,du\right].$$

Так как $A(s) = \delta s + \sigma^2 s^2 + o(s^2)$, то

$$\frac{\tau}{\delta^2}A(s\delta) = \frac{\tau}{\delta^2}(\delta^2 s + \sigma^2 s^2\delta^2 + o(\delta^2)) = \tau s(\sigma^2 s + 1) + o(1).$$

Изучим поведение $\delta\int_0^{\frac{\tau}{\delta^2}} e^{-uA(s\delta)}F(u)\,du$. Производя замену $v = \delta^2 u$, имеем

$$\delta\int_0^{\frac{\tau}{\delta^2}} e^{-uA(s\delta)}F(u)\,du = \frac{1}{\delta}\int_0^\tau e^{-\frac{v}{\delta^2}A(s\delta)}F\left(\frac{v}{\delta^2}\right)dv,$$

но $e^{-\frac{v}{\delta^2}A(s\delta)} \to e^{-vs(\sigma^2 s+1)}$ при $\delta \to 0$. Найдем $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}F\left(\frac{v}{\delta^2}\right)$:

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\infty e^{-sv}F\left(\frac{v}{\delta^2}\right)dv = \delta\int_0^\infty e^{-s\delta^2 u}F(u)\,du = \frac{\delta}{\eta(s\delta^2)}.$$

Так как $A(\eta(s)) = s$, то $\eta(s\delta^2) \sim \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\sigma^2 s\delta^2}}{2\sigma^2}$. Следовательно, $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\delta}{\eta(s\delta^2)} = \frac{2\sigma^2}{-1+\sqrt{1+4\sigma^2 s}}$. Отсюда следует, что существует

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} F\left(\frac{v}{\delta^2}\right) = f(v)$$

и

$$\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\, dv = \frac{2\sigma^2}{-1+\sqrt{1+4\sigma^2 s}}.$$

Итак, при $\delta \to 0$ и $t \to \infty$, так что $t\delta^2 \to \tau$, $0 < \tau < \infty$,

$$\varphi(t, s\delta) \to e^{s\tau(\sigma^2 s+1)} \left[1 - s\int_0^\tau e^{-s(\sigma^2 s+1)u} f(u)\, du\right] = \varphi_\tau(s). \tag{3}$$

Так же, как и в [2], легко показать, что

$$f(u) = 1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{v}{4\sigma^2}} v^{-\frac{3}{2}} dv.$$

В качестве простого следствия этой теоремы получаем следующее утверждение:

$\lim\limits_{\tau\to\infty} \varphi_\tau(s) = \frac{1}{\sigma^2 s+1}$, т. е. при $t\to\infty$, $\delta\to 0$ так, что $t\delta^2\to\infty$, имеем

$$\mathbf{P}\{\delta \sup_{0\leqslant u\leqslant t} \xi(u) < x\} \to 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}}. \tag{4}$$

Замечание 1. Пользуясь формулой $\int_0^\infty e^{-sx}\Phi(x)\, dx = -\frac{M\xi(1)}{A(s)} = \frac{\delta}{A(s)}$ легко показать, что $\Phi\left(\frac{x}{\delta}\right) = \mathbf{P}\left\{\sup\limits_{0\leqslant t<\infty} \xi(t) < \frac{x}{\delta}\right\} \to 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}}$ при $\delta \to 0$.

Замечание 2. Аналогичный результат можно получить и для минимума рассматриваемого процесса.

Пусть $\xi_1(t) = -\xi(t)$. В [1] доказано, что $\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant t<\infty} \xi_1(t) < x\} = 1 - e^{-cx}$, где c — наибольший неотрицательный корень уравнения $A_1(s) = 0$

$$(A_1(s) = \ln \mathbf{M} e^{s\xi_1(1)}).$$

Пусть $\mathbf{M}\xi_1(1) = \varrho < 0$ и $\mathbf{D}\xi_1(1) = \sigma^2 < \infty$, тогда $A_1(s) = \varrho s + \sigma^2 s^2 + o(s^2)$. Ясно, что при $\varrho \uparrow 0$ постоянная c также стремится к нулю. С точностью до $o(\varrho)$ постоянная c есть решение уравнения $-\varrho s = \sigma^2 s^2$, т. е. $c \sim -\frac{\varrho}{\sigma^2}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{-\varrho \sup_{0\leqslant t<\infty} \xi_1(t) < x\} \to 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}}.$$

§ 2. Итак, при $\mathbf{M}\xi(1) < 0$ с вероятностью 1 $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty} \xi(t) < \infty$. Представляет интерес изучение случайной величины τ_ξ — момента достижения абсолютного максимума.

Рассмотрим дискретную схему.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\mathbf{M}\xi_k < 0$; $S_0 = 0$, $S_1 = \xi_1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Известно [3], что в этом случае $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} S_n < \infty$ с вероятностью 1, и для случайной величины T — номера частной суммы, которая принимает наибольшее значение, — справедливо соотношение

$$\mathbf{M}p^T = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_k > 0\}}{k}(p^k - 1)\right], \qquad |p| \leqslant 1. \tag{5}$$

Заметим, что при $\mathbf{M}\xi_k < 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\mathbf{P}\{S_k > 0\}}{k}$ сходится. В работе [3] устанавливается также, что

$$\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_k > 0\}}{k}\right] = \mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant k < \infty} S_k \leqslant 0\} \qquad \text{и}$$

$$(1 - p)\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{\sup_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k \leqslant 0\}\, p^n = \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_k > 0\}}{k}\, p^k\right].$$

Поэтому формуле (5) можно придать вид

$$\mathbf{M}p^T = \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_{1 \leqslant k < \infty} S_k = 0\}}{(1 - p)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\sup\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k = 0\}\, p^n}. \tag{6}$$

Пусть теперь $\xi_1 = \xi(h)$, $\xi_2 = \xi(2h) - \xi(h), \ldots,$ тогда

$$S_n = \xi(nh)\,(h > 0).$$

Положим $p = e^{-sh}$, $s > 0$, тогда

$$\mathbf{M}e^{-shT} = \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_{1 \leqslant k < \infty} \xi(kh) = 0\}}{\dfrac{1 - e^{-sh}}{h}\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-shn}\, \mathbf{P}\{\sup\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \xi(kh) = 0\}\, h}.$$

Так как $\lim\limits_{h \to 0} hT = \tau_\xi$ с вероятностью 1, то, переходя к пределу при $h \to 0$, получаем

$$\mathbf{M}e^{-s\tau_\xi} = \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} \xi(t) = 0\}}{s\int\limits_0^{\infty} e^{-st}\, \mathbf{P}\{\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) = 0\}\, dt}.$$

Будем рассматривать вначале только процессы с ограниченной вариацией, для которых, как известно [4], $\mathbf{P}\{\sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} \xi(t) = 0\} > 0$. Умножив числитель и знаменатель в последней формуле на k — снос процесса с обратным знаком

$$\left(k = -\gamma + \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dN(x) < \infty\right),$$

получаем ([4])

$$\mathbf{M} e^{-s\tau_\xi} = \frac{\mathbf{M}\xi(1)}{s\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt},$$

где $\qquad M\xi(1) = -k\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant t<\infty} \xi(t) = 0\}, \qquad F(t) = k\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} \xi(u) = 0\}.$

Так как

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = \frac{1}{\eta(s)},$$

то

$$\mathbf{M} e^{-s\tau_\xi} = -\mathbf{M}\xi(1)\frac{\eta(s)}{s}. \tag{7}$$

Ясно, что формула (7) справедлива и для процессов, имеющих с вероятностью 1 неограниченную вариацию.

Напомним, что $\varphi(s) = \mathbf{M} e^{-s[\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\xi(t)]} = -\mathbf{M}\xi(1)\frac{s}{\mathrm{A}(s)}$. Следовательно, функции $\varphi(s)$ и $\psi(s) = \mathbf{M} e^{-s\tau_\xi}$ связаны функциональными соотношениями

$$\varphi(\eta(s)) = \psi(s), \qquad \psi(\mathrm{A}(s)) = \varphi(s). \tag{8}$$

Пользуясь формулой (7) и теоремами тауберова типа, можно изучить асимптотику $\mathbf{P}\{\tau_\xi < x\}$ при $x \downarrow 0$ и $x \uparrow \infty$ (см. [1]).

Рассмотрим $\mathbf{P}\{\tau_\xi < x\}$ при $\delta = -\mathbf{M}\xi(1) \downarrow 0$. Ясно, что $\mathbf{P}\{\tau_\xi < x\} \to 0$ при $\delta \downarrow 0$ для любого $x > 0$. Пусть $\mathbf{D}\xi(1) = \sigma^2 < \infty$, тогда

$$\mathrm{A}(s) = \delta s + \sigma^2 s^2 + o(s^2), \qquad \eta(s) \sim \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\sigma^2 s}}{2\sigma^2}$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbf{M} e^{-s\delta^2\tau_\xi} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sigma^2 s}}{2\sigma^2 s}. \tag{9}$$

Это означает, грубо говоря, что при малых δ случайная величина τ_ξ имеет порядок $\frac{1}{\delta^2}$.

Напомним, что $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty} \xi(t)$ есть величина порядка $\frac{1}{\delta}$.

§ 3. Сформулируем необходимые для дальнейшего результаты работы [5]. По-прежнему $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины; $S_0 = 0$, $S_1 = \xi_1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k, \ldots$ Пусть $\eta^+ = \sup\limits_{0\leqslant k<\infty} S_k$; χ^+ — величина первой положительной суммы; χ_x^+ — величина первого перескока через уровень $x\, (x > 0)$. Аналогично определяется η^-, χ^-, χ_x^- (обозначения работы [5]).

Ф а к т о р и з а ц и о н н а я л е м м а (Б. А. Рогозин [5]). *Пусть* $f(v) =$

$= \mathbf{M}e^{iv\xi_1}$ *(v — действительное число), тогда*

$$1 - f(v) = [1 - \mathbf{M}\{e^{iv\chi^-};\ \eta^- < 0\}][1 - \mathbf{M}\{e^{iv\chi^+};$$

$$\eta^+ > 0\}]\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k = 0\}}{k}\right\}. \tag{10}$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k \leqslant 0\}}{k} < \infty$, *то*

$$1 - f(v) = \frac{1}{\mathbf{M}e^{iv\eta}}[1 - \mathbf{M}e^{iv\chi^+}]\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k \leqslant 0\}}{k}\right\}. \tag{11}$$

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k \leqslant 0\}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k \geqslant 0\}}{k} = \infty,$$

то

$$1 - f(v) = [1 - \mathbf{M}e^{iv\chi^-}][1 - \mathbf{M}e^{iv\chi^+}]\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k = 0\}}{k}\right\}. \tag{12}$$

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k \geqslant 0\}}{k} < \infty,$$

то

$$1 - f(v) = [1 - \mathbf{M}e^{iv\chi^-}]\frac{1}{\mathbf{M}e^{iv\eta^+}}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{S_k \geqslant 0\}}{k}\right\}. \tag{13}$$

Заметим, что если $\mathbf{M}\xi_1$ существует, то (11) имеет место при $\mathbf{M}\xi_1 > 0$, (12) — при $M\xi_1 = 0$, (13) — при $\mathbf{M}\xi_1 < 0$.

Факторизационная лемма дает возможность выразить $\mathbf{M}\{e^{iv\chi^{\pm}}\}, \mathbf{M}\{e^{iv\eta^{\pm}}\}$ через компоненты факторизации функции $1 - f(v)$.

Теорема 2 (Б. А. Рогозин [5]). *Если* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k \geqslant 0\} = \infty$,

то

$$\mathbf{P}\{\chi_x^+ > y\} = 1 + \int_0^y \mathbf{P}\{\chi^+ \geqslant t\}\, dR(x + y - t), \quad x > 0, \quad y > 0, \tag{14}$$

где

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dR(x) = \frac{1}{1 - \mathbf{M}e^{-s\chi^+}} \quad \textit{при}\ \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Укажем, что $R(x)$ — математическое ожидание числа точек последовательности $S_0', S_1', \ldots, S_k', \ldots$, содержащихся в отрезке $[0, x)$, где S_k' — сумма k независимых случайных величин, имеющих то же распределение, что и χ^+.

Теорема 3 (Б. А. Рогозин [5]). *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}\{S_k > 0\} < \infty,$$

то

$$\mathbf{P}\{\chi_x^+ \geqslant y;\ \eta^+ \geqslant x\} = \mathbf{P}\{\eta^+ \geqslant x\} + \int_0^y b(t)\, d\mathbf{P}\{\eta^+ < x + y - t\}, \qquad (15)$$

где

$$\int_0^\infty e^{ivx}\, db(x) = \frac{1}{\mathbf{M} e^{iv\eta^+}}.$$

Перейдем теперь к непрерывной схеме:

$$\xi_1 = \xi(h), \quad \xi_2 = \xi(2h) - \xi(h), \ldots; \quad S_k = \xi(kh), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Устремляя h к нулю, получаем из факторизационной леммы разложение $\ln \mathbf{M} e^{iv\xi(1)}$ $(\operatorname{Im} v = 0)$ на множители.

Через χ_ξ обозначим величину первого перескока через нулевой уровень процесса $\xi(t)$.

Теорема 4. *Если $\xi(t)$ имеет с вероятностью 1 неограниченную вариацию, то $\chi_\xi = 0$ с вероятностью 1.*

Если вариация процесса $\xi(t)$ конечна, то при $\mathbf{M}\xi(1) < 0$

$$\mathbf{M}\{e^{-s\chi_\xi};\ \sup_{0 \leqslant t < \infty} \xi(t)\} = 1 - \frac{A(s)}{ks},$$

при $\mathbf{M}\xi(1) = 0$

$$\mathbf{M}\{e^{-s\chi_\xi}\} = 1 - \frac{A(s)}{ks},$$

при $\mathbf{M}\xi(1) > 0$

$$\mathbf{M}\{e^{-s\chi_\xi}\} = 1 - \frac{A(s)}{k(s - c)},$$

где c — наибольший положительный корень уравнения $A(s) = 0$ (здесь $k = -\gamma + \int_0^\infty \frac{x}{1 + x^2}\, dN(x) < \infty$ и $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$).

Доказательство. Тот факт, что $\chi_\xi = 0$ с вероятностью 1, если $\xi(t)$ имеет неограниченную вариацию, следует из характера локального поведения траекторий процесса $\xi(t)$ [6]. Пусть вариация $\xi(t)$ конечна. Рассмотрим три случая.

1) $\mathbf{M}\xi(1) < 0$. Применяя факторизационную лемму к последовательности $\xi_1 = \xi(h)$, $\xi_2 = \xi(2h) - \xi(h), \ldots$, получаем

$$1 - \mathbf{M}\{e^{iv\chi^+};\ \eta^+ > 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta^+ = 0\}}{\mathbf{M} e^{iv\eta^+}}$$

или в терминах преобразований Лапласа

$$1 - \mathbf{M}\{e^{-s\chi^+};\ \eta^+ > 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta^+ = 0\}}{\mathbf{M} e^{-s\eta^+}} \quad (s = u + iv, \quad u \geqslant 0).$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, имеем

$$1 - \mathbf{M}\{e^{-s\chi_\xi}; \sup_{0\leq t<\infty} \xi(t) > 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\sup_{0\leq t<\infty} \xi(t) = 0\}}{\mathbf{M}e^{-s[\sup_{0\leq t<\infty} \xi(t)]}} = \frac{\mathbf{P}\{\sup_{0\leq t<\infty} \xi(t) = 0\}}{-\mathbf{M}\xi(1)} \frac{\mathrm{A}(s)}{s} = \frac{\mathrm{A}(s)}{ks}$$

(мы воспользовались равенством $\mathbf{M}\xi(1) = -k\mathbf{P}\{\sup_{0\leq t<\infty} \xi(t) = 0\}$).

Итак,

$$\mathbf{M}\{e^{-s\chi_\xi}; \sup_{0\leq t<\infty} \xi(t) > 0\} = 1 - \frac{\mathrm{A}(s)}{ks}. \tag{16}$$

2) $\mathbf{M}\xi(1) = 0$. Если в формуле (16) устремим $\mathbf{M}\xi(1)$ к нулю, то получим

$$\mathbf{M}\{e^{-s\chi_\xi}\} = 1 - \frac{\mathrm{A}(s)}{ks} \tag{17}$$

(при $\mathbf{M}\xi(1) = 0$, как известно, $\sup_{0\leq t<\infty} \xi(t) = +\infty$ с вероятностью 1).

3) $\mathbf{M}\xi(1) > 0$. Перепишем (11) для нашего случая:

$$1 - f(v) = 1 - e^{h\left[i\gamma v + \int\limits_0^\infty \left(e^{ivx} - 1 - \frac{ivx}{1+x^2}\right) dN(x)\right]} = \frac{1}{\mathbf{M}e^{iv\eta^-}} \times$$
$$\times [1 - \mathbf{M}e^{iv\chi^+}] \exp\left\{-\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbf{P}\{S_k \leq 0\}}{k}\right\}.$$

При $h \downarrow 0$ с вероятностью 1 $\chi^+ \to \chi_\xi$, $\eta^- \to \inf_{0\leq t<\infty} \xi(t)$; $\mathbf{P}\{\inf_{0\leq t<\infty} \xi(t) < x\} = e^{cx}$ $(x < 0)$, где постоянная c — наибольший положительный корень уравнения $\mathrm{A}(s) = 0$ $(s > 0)$.

Так как $1 - f(v)$ при $h \to 0$ — величина порядка h, то $\exp\left\{-\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbf{P}\{S_k \leq 0\}}{k}\right\}$ также стремится к нулю, имея порядок h.

Следовательно,

$$\beta\left[i\gamma v + \int\limits_0^\infty \left(e^{ivx} - 1 - \frac{ivx}{1+x^2}\right) dN(x)\right] = \frac{1}{\mathbf{M}e^{iv[\inf_{0\leq t<\infty} \xi(t)]}} [1 - \mathbf{M}e^{iv\chi_\xi}],$$

где β — некоторая постоянная, относительно которой заметим, что $\beta > 0$. Аналитически продолжая это соотношение в полуплоскость $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ $(s = u + iv)$, получаем

$$\beta\mathrm{A}(s) = (s - c)[1 - \mathbf{M}e^{-s\chi_\xi}].$$

Ясно, что $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{\mathrm{A}(s)}{s} = k$, поэтому $\beta = \frac{1}{k}$ и

$$\mathbf{M}e^{-s\chi_\xi} = 1 - \frac{\mathrm{A}(s)}{k(s-c)}. \tag{18}$$

Доказательство закончено.

Если в формулах (16), (17), (18) положить $k = \infty$ (это соответствует случаю, когда $\xi(t)$ имеет неограниченную вариацию), то $\mathbf{M}e^{-s\chi_\xi} = 1$, т. е. $\chi_\xi = 0$ с вероятностью 1, как и следовало ожидать.

Переходя к пределу при $h \to 0$ в формулах (14), (15), получаем распределение величины перескока процесса $\xi(t)$ через положительный уровень.

Отметим, что монотонно возрастающая функция $R_\xi(t)$, определяемая как и в теореме 2 соотношением

$$\int_0^\infty e^{-sx} dR_\xi x = \frac{1}{1 - \mathbf{M} e^{-s\chi_\xi}}, \qquad \operatorname{Re}(s) > 0, \tag{19}$$

имеет смысл, аналогичный вероятностному смыслу функции $R(x)$.

§ 4. Пусть $a > 0$ и $\xi(0) = x$, $0 < x \leqslant a$. Если через $P(x, t)$ обозначить вероятность события $\{\xi(u)$ к моменту времени t выйдет из полосы $[0, a]\}$, а через $\Gamma(x, t)$ — вероятность того, что этот выход совершится через нижнюю границу полосы, то

$$P(x, t) = \Gamma(x, t) + P\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) > a - x / \xi(0) = 0\} -$$

$$- \int_0^t \frac{\partial \Gamma(x, u)}{\partial u} \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant v \leqslant t-u} \xi(v) > a / \xi(0) = 0\} \, du.$$

Так как для рассматриваемых процессов распределение максимума известно [4], то для определения $P(x, t)$ достаточно найти $\Gamma(x, t)$.

В статье [8] стандартным методом устанавливается, что $\Gamma(x, t)$ является единственным решением уравнения

$$\frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} = -\lambda \Gamma(x, t) + \lambda \int_0^a d(x - x') \Gamma(x', t) \, dx' \tag{20}$$

с граничными условиями $\Gamma(0, t) = 1$, $\Gamma(x, 0) = 0$ (здесь $\xi(t)$ имеет снос -1; $d(x)$ — плотность распределения величины скачка; $\frac{1}{\lambda}$ — среднее время между двумя последовательными скачками). Отсюда сразу получаем для $\Gamma(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \Gamma(x, t) \, dt$ $(p > 0)$ выражение

$$\Gamma(x, p) = \frac{K(a - x, p)}{pK(a, p)},$$

$$K(y, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{X - i\infty}^{X + i\infty} \frac{e^{sy} ds}{A(s) - p}, \tag{21}$$

где $X > \eta(p)$, а $\eta(p)$, — как и прежде, единственный корень уравнения $A(s) = p$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Ясно, что предположения [8] относительно сноса процесса и плотности распределения величины скачка несущественны, уравнение типа (20), и, следовательно, формула для $\Gamma(x, p)$ имеют место для обобщенных пуассоновских процессов без отрицательных скачков. Предельным переходом можно установить справедливость соотношений (21) в общем случае. Мы ограничимся рассмотрением процессов, имеющих с вероятностью 1 ограниченную вариацию, так как только для таких процессов можно получить $\Gamma(x, p)$ в явном виде. В этом случае $A(s) = ks + \int_0^\infty (e^{-sx} - 1) \, dN(x)$.

Легко показать, что если постоянную X $(X > \eta(p))$ выбрать достаточно большой, то на всей прямой $(X - i\infty, X + i\infty)$ будет выполняться неравенство $|A(s)| > p$. Следовательно, преобразование Лапласа функции $K(y, p)$ в (21) можно переписать в виде

$$\frac{1}{A(s)-p}=\frac{1}{A(s)\left(1-\frac{p}{A(s)}\right)}=\frac{1}{A(s)}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{p}{A(s)}\right|^{n} \qquad (22)$$

Но $\frac{1}{A(s)}$ — преобразование Лапласа некоторой функции $G(x)$. Действительно, если $\mathbf{M}\xi(1)<0$, то $\sup\limits_{0\leq t<\infty}\xi(t)<\infty$ и

$$\frac{1}{A(s)}=\frac{1}{-\mathbf{M}\xi(1)}\int_0^{\infty}e^{-sx}\Phi(x)\,dx=\frac{1}{\delta}\int_0^{\infty}e^{-sx}\Phi(x)\,dx.$$

Если $\mathbf{M}\xi(1)=0$, то из (17), (19) получаем

$$\frac{1}{A(s)}=\frac{1}{k}\int_0^{\infty}e^{-sx}\left[R_{\xi}(x)-1\right]dx.$$

Если $\mathbf{M}\xi(1)>0$, то

$$\frac{1}{A(s)}=\frac{s}{k(s-c)}\int_0^{\infty}e^{-sx}R_{\xi}(x)\,dx-\frac{1}{k(s-c)}.$$

Из (22) следует, что

$$K(y,p)=G(y)+pG^{(2)}(y)+\ldots+p^{n-1}G^{(n)}(y)+\ldots,$$

где $G^{(n)}(y)$ — n-я свертка функции $G(y)$. Отсюда получаем выражение для $\Gamma(x,p)$. Например, при $\mathbf{M}\xi(1)<0$ имеем

$$\Gamma(x,p)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n-1}}{\delta^n}\Phi^{(n)}(a-x)}{p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n-1}}{\delta^n}\Phi^{(n)}(a)}.$$

Так же, как и в [1], легко представить $G(x)$ в виде ряда из сверток функции $N(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Золотарев, Момент первого прохождения уровня..., Теор. вероят. и ее примен., т. IX, 4, 1964, 724—733.
2. О. В. Висков, О времени ожидания..., Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. XXI, 1964, 26—34.
3. Ф. Спитцер, Комбинаторная лемма и ее приложение к теории вероятностей, Математика, 8 : 4, 1964, 135—150.
4. Э. С. Штатланд, О распределении максимума процесса с независимыми приращениями, Теор. вероятн. и ее примен., X, 3, 1965, 531—535.
5. Б. А. Рогозин, О распределении величины первого перескока, Теор. вероятн. и ее примен., т. IX, 3, 1964, 498—516.
6. Э. С. Штатланд, О локальных свойствах процессов с независимыми приращениями, Теор. вероят. и ее примен., т. X, 2, 1965, 344—350.
7. Э. С. Штатланд, Некоторые свойства процесса с независимыми приращениями..., Кибернетика, № 4, 1965, 61—63.
8. I. Keilson A gambler's ruin type problem in queueing theory, Operations research, 11, 4, 1963.

Поступила 4.VI 1965 г.
Киев