По поводу одной теоремы о характеристических подгруппах конечной группы

С. П. Азлецкий

В статье [1] была приведена теорема 3, требующая некоторого уточнения. В настоящей заметке наряду с уточнением этой теоремы выявляются свойства конечной группы в зависимости от особенностей ее характеристической подгруппы, порожденной коммутантами всех силовских подгрупп группы.

1. Приведем основные определения и обозначения, которыми будем пользоваться.

Пусть G — группа порядка $\mathrm{Ord}(G) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа и $k > 1$. Пусть $P_i^{(j)}$ — некоторая силовская подгруппа порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы G, $j = 1, 2, \dots, t_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ — некоторое множество простых чисел, $1 \leqslant m \leqslant k$, а $K_i^{(j)} = K(P_i^{(j)})$ — коммутант подгруппы $P_i^{(j)}$.

а) Обозначим через $K_\pi^0(G)$ подгруппу, порожденную всеми подгруппами $P_i^{(j)}$ при $j = 1, 2, \dots, t_i$ и $i = 1, 2, \dots, m$ и назовем ее K_π^0-подгруппой группы G [2]; при этом в случае $m = k$ она обращается в K^0-подгруппу группы G, обозначаемую через $K^0(G)$ [1].

б) Множество всех силовских подгрупп $P_i^{(j)}$ данного порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы G называется силовским классом по числу p_i группы G и обозначается через $< P_i >$. Множество силовских классов группы G, порождающее G и состоящее из наименьшего числа силовских классов, называется минимальной системой силовских классов группы G (м. с. с. к), а число классов в м. с. с. к — силовским рангом группы G, который обозначается через $r(G)$ [3].

в) Группа G называется π-специальной, если силовская подгруппа ее по всякому числу из множества простых чисел π инвариантна в G.

г) $N(P, G)$ — нормализатор подгруппы P в группе G.

д) E — единичная группа, $\bar{E}$ — единичная фактор-группа.

2. Теорема 1. *Если группа G отлична от своего коммутанта и ее K^0-подгруппа отлична от E и является холловской подгруппой группы G, то:*

1) *все силовские подгруппы группы G отличны от своих нормализаторов в G или*

2) *лишь одна силовская подгруппа P группы G и сопряженные с ней совпадают со своими нормализаторами в G, причем тогда: а) $\mathrm{Ord}(P)$ делит индекс K^0-подгруппы группы G в G, б) $r(G) = 1$, в) фактор-группа $G/K(G)$ является p-группой, где p делит $\mathrm{Ord}(P)$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ord}(G) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа и $k > 1$. Пусть $K(G) \neq G$, а $\mathrm{Ord}(K^0(G)) =$

$= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$, при этом $1 \leqslant m < k$, так как при $m = k$ $K(G) = G$. Пусть еще $\pi = \{p_1, \ldots, p_m\}$.

1. Докажем, что подгруппа $K^0(G)$ не может быть специальной группой. Допустим, что $K^0(G)$ — холловская и при том специальная подгруппа группы G. Тогда $K^0(G) = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_m$, где P_i — силовская подгруппа группы G по числу p_i. С другой стороны, по определению K^0-подгруппы, $K^0(G) = \{K(P_1); K(P_2); \ldots; K(P_m); K^0_{m+1}; \ldots; K^0_k\}$, где K^0_i — подгруппа, порожденная коммутантами всех силовских подгрупп порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы G. Но так как $\mathrm{Ord}(K^0(G))$ не делится на число p_i при $i = m+1, \ldots, k$, то подгруппы K^0_i при указанных значениях i являются единичными группами, а потому $K^0(G) = \{K(P_1); K(P_2); \ldots; K(P_m)\} = K(P_1) \times K(P_2) \times \ldots \times K(P_m) = K(K^0(G))$, что невозможно для специальной группы.

2. Пусть силовская подгруппа P_1 порядка $p_1^{\alpha_1}$ группы G, содержащаяся в $K^0(G)$, не инвариантна в $K^0(G)$ (по крайней мере одна такая подгруппа имеется). Тогда P_1 не инвариантна и в группе G. Допустим, что $N(P_1, G) = P_1$. Тогда ([4], лемма на стр. 24) силовский класс $< P_1 >$ группы G порождает G. Но группа G отлична от своего коммутанта, а потому всякий ее силовский класс, не содержащийся в $K(G)$, входит в любую м. с. с. к. группы G. Следовательно, силовский класс $< P_1 >$ не может содержаться в $K(G)$, а значит, и в $K^0(G)$, что противоречит условию. Итак, $N(P_1, G) \neq P_1$. Отсюда следует, что все силовские подгруппы P_i группы G при $i = 1, 2, \ldots, m$ отличны от своих нормализаторов в G. Если к тому же силовская подгруппа по любому числу p_i при $i = m+1, \ldots, k$ группы G отлична от своего нормализатора в G, то имеет место случай 1), приведенный в формулировке теоремы.

3. Допустим теперь, что какая-нибудь силовская подгруппа группы G, не содержащаяся в подгруппе $K^0(G)$, например подгруппа P_{m+1} порядка $p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$, совпадает со своим нормализатором в G. Тогда силовский класс по числу p_{m+1} группы G порождает G:

$$\{\langle P_{m+1} \rangle\} = G. \tag{1}$$

Но $K(G) \neq G$, а потому силовский класс $\langle P_{m+1} \rangle$ не должен содержаться в $K(G)$, а значит, индекс $K(G)$ делится на p_{m+1}.

4. Если допустить, что две силовские подгруппы различного порядка группы G, не содержащиеся в $K^0(G)$, совпадают со своими нормализаторами в G, например

$$N(P_{m+1}; G) = P_{m+1}, \tag{2}$$

и в то же время

$$N(P_{m+2}; G) = P_{m+2}, \tag{3}$$

то отсюда последует, что

$$\{\langle P_{m+1} \rangle\} = G \tag{4}$$

и

$$\{\langle P_{m+2} \rangle\} = G. \tag{5}$$

Но тогда по крайней мере один из силовских классов $\langle P_{m+1} \rangle$ или $\langle P_{m+2} \rangle$ не содержится в $K(G)$. Если, например, $\langle P_{m+1} \rangle$ не содержится в $K(G)$, то силовский класс $\langle P_{m+1} \rangle$ должен входить в любую м.с.с.к. группы G, что противоречит (5). Итак, не может быть двух силовских подгрупп различного порядка, совпадающих со своими нормализаторами в G.

5. С другой стороны, ясно, что если бы индекс $K(G)$ в G делился не только на p_{m+1}, как указано в пункте 3, но еще и на другое простое число, то тогда силовский ранг $r(G)$ был бы больше единицы, что противоречит (1). Следовательно, фактор-группа $G/K(G)$ в пункте 3 является p_{m+1}-группой.

Этим теорема 1 доказана.

3. Пусть π — множество (непустое или пустое) всех тех простых делителей $\mathrm{Ord}(G)$, силовские подгруппы группы G по которым содержатся в K^0 (G), а π^0 множество (непустое) всех тех простых делителей $\mathrm{Ord}(G)$, которые не делят $\mathrm{Ord}(K^0(G))$.

Имея в виду эти определения множеств π и π^0, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть K^0-подгруппа группы G отлична от E и является специальной группой. Тогда G — π-специальная группа и $K^0_{\pi^0}(G/K^0(G)) = E$.*

Доказательство. Как следует из рассуждений, приведенных в пункте 1 доказательства теоремы 1, $K^0(G)$, являясь специальной группой, не может быть холловской подгруппой группы G, а потому $\mathrm{Ord}(K^0(G)) = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, где по крайней мере для одного значения i выполняется условие $0 < \beta_i < \alpha_i$.

1. Если бы $K^0(G) = G$, то и $K(G) = G$, что невозможно для специальной группы. Так как $K^0(G)$ — характеристическая подгруппа группы G, то всякая силовская подгруппа P_i группы G, содержащаяся в $K^0(G)$, инвариантна в G. Отсюда следует, что G — π-специальная группа.

2. Если $\mathrm{Ord}(K^0(G))$ не делится на некоторое число p_j, то из определения K^0-подгруппы следует, что силовская подгруппа P_j порядка $p_j^{\alpha_j}$ группы G абелева. В то же время силовская подгруппа $\overline{P}_j$ по числу p_j фактор-группы $\overline{G} = G/K^0(G)$ изоморфна силовской подгруппе P_j группы G, а потому и $\overline{P}_j$ — абелева группа. Но тогда, очевидно, $K^0_{\pi^0}(\overline{G}) = \overline{E}$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2, описывающие группы, у которых K^0-подгруппа является подгруппой Холла (теорема 1) или специальной группой (теорема 2), уточняют теорему 3 статьи [1], которая практически относится лишь к случаю единичной K^0-подгруппы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Азлецкий, О некоторых характеристических подгруппах конечной группы, Укр. матем. ж., т. XVI, № 2, 1964, 220—225.
2. С. П. Азлецкий, К теории π-специальных групп, Сиб. матем. ж., т. V, № 5, 1964, 969—975.
3. С. П. Азлецкий, О порождении конечной группы системой силовских классов, Матем. сб., т. 28 (70) : 2, 1951, 461—466.
4. С. П. Азлецкий, О группах, силовские подгруппы которых совпадают со своими нормализаторами, Тр. Уральск. электромех. ин-та инж. жел-дор. трансп., вып. II, 1959, 24—28.

Поступила 17.XII 1964 г.
Свердловск