Численный метод решения задачи оптимального преследования по максимину времени

И. В. Бейко

Обозначим через $x(t, u)$, $y(t, v)$ решения задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)\,u + f(t), \qquad x(0) = x^0, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = C(t)\,y + D(t)\,v + h(t), \qquad y(0) = y^0, \tag{2}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $u=(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $v=(v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_p)$, а $f(t)$, $h(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — вектор-функции и матрицы соответствующих размерностей с кусочно-непрерывными по t элементами.

Первый момент времени t, при котором $x(t, u)=y(t, v)$, обозначим через $T_{v,u}(x^0 \neq y^0)$. Пусть U и V — замкнутые и ограниченные множества, заданные соответственно в пространстве E_r переменной $u=(u_1, \ldots, u_r)$ и в пространстве E_p переменной $v=(v_1, \ldots, v_p)$.

Задача 1. Найти управления $\bar{u}(t) \in U$, $\bar{v}(t) \in V$, удовлетворяющие соотношению

$$T_{\bar{v},\bar{u}} = \max_{v(t)\in V} \min_{u(t)\in U} T_{v,u}. \tag{3}$$

Предположим, что 1) существует такой момент времени $t'' > 0$, что для любого управления $v(t) \in V$ найдется управление $u(t) \in U$, удовлетворяющее равенству $y(t'', v)=x(t'', u)$, 2) множества $X(t)$, $Y(t)$ соответственно точек $x(t, u)$, $y(t, v)$, полученных при всевозможных управлениях $u(t) \in U$, $v(t) \in V$, являются строго выпуклыми в каждый момент времени $t > 0$.

При указанных предположениях из теоремы, доказанной в [1], следует, что если $u^*(t)$, $v^*(t)$ являются решением задачи 1, то существует такой ненулевой вектор ψ^*, что $u^*(t)=\bar{u}(t)$, $v^*(t)=\bar{v}(t)$, где $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ определяются соотношениями

$$(B(t)\bar{u}(t),\ \Psi(t, T)\psi^*)=\max_{u\in U}(B(t)u, \Psi(t, T)\psi^*), \tag{4}$$

$$(D(t)\bar{v}(t), \Phi(t, T)\psi^*)=\max_{v\in V}(D(t)v, \Phi(t, T)\psi^*) \tag{5}$$

$\Big($ $\Psi(t, \tau)$, $\Phi(t, \tau)$ — матрицы фундаментальных решений соответственно систем $\frac{d\psi}{dt}=-A^*(t)\psi$, $\frac{d\varphi}{dt}=-C^*(t)\varphi$, $\Psi(\tau, \tau)=\Phi(\tau, \tau)=E$; $T=T_{v^*,u^*}\Big)$.

Управления $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, сформулированным в упомянутой теореме, назовем экстремальными. Поэтому, если некоторый вектор $\bar{\psi} \neq 0$ удовлетворяет в некоторый момент времени $T > 0$ условию $x(T, \bar{u})=y(T, \bar{v})$, где $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ определены соотношениями (4), (5) при $\psi^*=\bar{\psi}$, то эти управления $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ являются экстремальными и, таким образом, отыскание экстремальных управлений эквивалентно отысканию указанного вектора $\bar{\psi}$.

Назовем A-алгоритмом следующий алгоритм вычисления вектора $\psi^{(k+1)}$ по известному вектору $\psi^{(k)}$, удовлетворяющему в момент времени $T^{(k-1)}$, $0 \leqslant T^{(k-1)} < t''$, неравенству

$$(y(T^{(k-1)}, v^{(k)})-x(T^{(k-1)}, u^{(k)}), \psi^{(k)}) > 0, \tag{6}$$

где $u^{(k)}(t)$, $v^{(k)}(t)$ равняются соответственно управлениям $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ определенным из (4), (5) при $\psi^*=\psi^{(k)}$, $T=T^{(k-1)}$.

В неравенстве

$$(y(t, v^{(k)})-x(t, u^{(k)}),\ \Psi(t, T^{(k-1)})\psi^{(k)}) > 0 \tag{7}$$

увеличиваем время t, начиная с момента $t=T^{(k-1)}$, до того момента времени $T^{(k)}$, при котором удовлетворяется хоть одно из условий 1), 2):

1) $x(T^{(k)}, u^{(k)})=y(T^{(k)}, v^{(k)})$, $\quad \Phi(T^{(k)}, T^{(k-1)})\psi^{(k)}=\Psi(T^{(k)}, T^{(k-1)})\psi^{(k)}$, (8)

2) $(y(T^{(k)}, v^{(k)})-x(T^{(k)}, u^{(k)}),\quad \Psi(T^{(k)}, T^{(k-1)})\psi^{(k)})=0.$ (9)

Покажем, что такой момент времени $T^{(k)}$ существует, причем $T^{(k)} \leqslant t''$. Действительно, если такого момента времени $T^{(k)}$ не найдется, то $(y(t^{''}, v^{(k)}) - x(t^{''}, u^{(k)}), \Psi(t^{''}, T^{(k-1)}) \psi^{(k)}) > 0$.

Кроме того, в [2] доказано, что

$$(x(t^{''}, u^{(k)}), \Psi(t^{''}, T^{(k-1)}) \psi^{(k)}) = \max_{x \in X(t'')} (x, \Psi(t^{''}, T^{(k-1)}) \psi^{(k)}). \tag{10}$$

Это противоречит (в силу строгой выпуклости $X(t'')$) существованию t'' и, таким образом, доказывает существование момента $T^{(k)}$.

Если выполняется условие 1), то, очевидно, $\bar{\psi} = \Psi(T^{(k)}, T^{(k-1)}) \psi^{(k)}$. В случае, когда выполняется условие 2), вычисляем вектор $\psi^{(k+1)}$ по итерационной формуле

$$\psi^{(k+1)} = \Psi(T^{(k)}, T^{(k-1)}) \psi^{(k)} + s[y(T^{(k)}, v^{(k)}) - x(T^{(k)}, u^{(k)})]. \tag{11}$$

Из [2] следует существование такой непрерывной строго положительной при $\alpha > 0$ функции $s_1(\alpha) \left(\left. \frac{ds_1(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} > 0 \right)$, что для всех $s \in [0, s_1(\| y(T^{(k)}, v^{(k)}) - x(T^{(k)}, u^{(k)}) \|)]$

$$(y(T^{(k)}, v^{(k)}) - x(T^{(k)}, u^{(k+1)}), \psi^{(k+1)}) > 0 \tag{12}$$

и равенство

$$(y(T^{(k)}, v^{(k)}) - x(t, u^{(k+1)}), \Psi(t, T^{(k)}) \psi^{(k+1)}) = 0 \tag{13}$$

выполняется только при $t = t' > T^{(k)} + s^2$. В силу соотношения $(y(t', v^{(k+1)}), \Psi(t', T^{(k)}) \psi^{(k+1)}) = \max\limits_{y \in Y(t')} (y, \Psi(t', T^{(k)}) \psi^{(k+1)})$ из (13) имеем: $(y(t', v^{(k+1)}) - x(t', u^{(k+1)}), \Psi(t', T^{(k)}) \psi^{(k+1)}) \geqslant 0$ и, поэтому, $T^{(k+1)} > T^{(k)} + s^2$. Если же $x(T^{(k)}, u^{(k)}) = y(T^{(k)}, v^{(k)})$ и $\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} \neq \bar{\psi}$, то, очевидно, $x(T^{(k)}, u^{(k+1)}) \neq y(T^{(k)}, v^{(k+1)})$, и мы приходим к предыдущему случаю. Обозначим через $s^{(k)}$ наибольшее число, полученное последовательным делением числа $s^{(k-1)}$ пополам, которое удовлетворяет неравенству $T^{(k+1)} > T^{(k)} + \delta [s^{(k)}]^2$ при $s = s^{(k)}$ ($\delta > 0$ — произвольно выбранное достаточно малое число). Вектор $\psi^{(k+1)}$ будем вычислять по формуле (11) при $s = s^{(k)}$. Тогда, если произвольно выбранный вектор $\psi^{(1)}$ удовлетворяет неравенству (6) при $k = 1$, $0 < T^{(0)} \leqslant t^{''}$, то, выбрав произвольное число $s^{(1)} > 0$ и применяя последовательно A-алгоритм, мы будем вычислять такие векторы $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$, что если $\psi^{(k)}$ не удовлетворяет (8), т. е. $\psi^{(k)} \neq \bar{\psi}$, то $T^{(k+1)} > T^{(k)} + \delta [s^{(k)}]^2$. Это доказывает сходимость последовательности управлений $\{u^{(k)}(t)\}$, $\{v^{(k)}(t)\}$ к экстремальным управлениям $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Л. Келенджеридзе, К теории оптимального преследования, ДАН, СССР, т. 138, № 3, 1961.
2. Б. Н. Пшеничный, Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем, Ж. вычислит. матем. и матем. физики, № 1, 1964.

Поступила 26.II 1964 г.
Киев