Теорема искажения для ограниченных в единичном круге функций

И. М. Гальперин

Пусть $S(1)$ обозначает класс регулярных в круге $|z|<1$ функций

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

удовлетворяющих в нем условиям

$$0<|f(z)|\leqslant 1.$$

Известна [1] структурная формула

$$f(z)=a_0\left(\frac{1}{|a_0|}\right)^{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t)}, \tag{1}$$

$$\mu(t)\uparrow, \qquad \mu(\pi)-\mu(-\pi)=2\pi, \qquad z=re^{i\varphi},$$

выражающая необходимое и достаточное условие принадлежности определяемой ею функции $f(z)$ к классу $S(1)$.

В настоящей заметке, являющейся непосредственным продолжением [1], доказывается следующая теорема [2].

Теорема. *Пусть* $f(z)\in S(1)$ *и пусть* $\alpha_0=\ln\frac{1}{|a_0|}\in(0,\infty)$ *фиксировано. Тогда при* $0<\alpha_0<1$ $\left(\textit{т. е. } \frac{1}{e}<|a_0|<1\right)$, *полагая* $r_0=\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}$, *получаем в интервале* $0<r\leqslant r_0$ *оценку*

$$\left|\frac{f'(z)}{a_0}\right|\leqslant\frac{2\alpha_0}{(1-r)^2}\left(\frac{1}{|a_0|}\right)^{-\frac{2r}{1-r}},$$

а в интервале $r_0<r<1$ — *оценку*

$$|f'(z)|\leqslant\frac{2}{e(1-r^2)}. \tag{2}$$

Обе оценки точные и реализуются функцией (см. [1] формула (10))

$$f_0(z)=a_0\left(\frac{1}{|a_0|}\right)^{-\frac{2ze^{-it}}{1-ze^{-it}}}, \tag{3}$$

первая при $ze^{-it}=r$, а вторая, где

$$\frac{1}{\alpha_0}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2} \tag{4}$$

(отсюда определяется $\cos(t-\varphi)$ через α_0).

Если $1<\alpha_0<+\infty$ $\left(\text{т. е. } 0<|a_0|<\frac{1}{e}\right)$, то пусть $r_0=\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0+1}$.

Тогда в интервале $0 < r \leqslant r_0$ действует оценка

$$\left|\frac{f'(z)}{a_0}\right| \leqslant \frac{2\alpha_0}{(1+r)^2}\left(\frac{1}{|a_0|}\right)^{\frac{2r}{1+r}},$$

а в интервале $r_0 < r < 1$ — оценка (2).

Обе оценки реализуются функцией (3): первая при $ze^{-it} = -r$, а вторая при условии (4).

Наконец, при $\alpha_0 = 1$ $\left(\text{т. е. } |a_0| = \frac{1}{e}\right)$ всегда справедлива оценка (2), которая также реализуется функцией (3), где $\cos(t - \varphi) = r$.

Отсюда следует, что на любой окружности $|z| = r < 1$ вообще (в классе $S(1)$) справедлива оценка

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2}{e(1-r^2)}.$$

Это впервые было найдено Г. М. Голузиным [3].

Таким образом, настоящая теорема уточняет результат Г. М. Голузина в классе $S(1)$ с фиксированным α_0 в случаях $0 < \alpha_0 < 1$, $1 < \alpha_0 < \infty$, заменяя эту оценку более экономной в интервале $0 < r \leqslant r_0$ $\left(r_0 = \frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right.$ или $\left.\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0 + 1}\right)$, где r_0 может быть как угодно близким к 1.

Доказательство. Из (1) находим

$$\ln f(z) = i \arg a_0 - \alpha_0 p(z), \tag{5}$$

где

$$p(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\, d\mu(t),$$

откуда

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -\alpha_0 z p'(z). \tag{6}$$

Так как областью значений $zp'(z)$ при фиксированном значении $p(z)$ (т. е. на основании (5) при фиксированном $f(z)$) является круг [4]:

$$\left|zp' - \frac{1}{2}(p^2 - 1)\right| \leqslant \frac{1}{2}(\varrho^2 - \varrho_0^2), \tag{7}$$

где

$$\varrho = \frac{2r}{1 - r^2}, \qquad \varrho_0 = |p - a|, \qquad a = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}, \qquad |z| = r,$$

то из (6) и (7) следует

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{1}{2}\alpha_0(p^2 - 1)\right| \leqslant \frac{1}{2}\alpha_0(\varrho^2 - \varrho_0^2), \tag{8}$$

причем для функции

$$p(z) = \mu_1 \frac{1 + ze^{-it_1}}{1 - ze^{-it_1}} + \mu_2 \frac{1 + ze^{-it_2}}{1 - ze^{-it_2}}, \qquad \mu_1 + \mu_2 = 1,$$

имеем [4]:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{2}\alpha_0(p^2 - 1) + \frac{1}{2}\alpha_0(\varrho^2 - \varrho_0^2)e^{i\theta}.$$

Далее, из (8) и (5) находим

$$|zf'(z)| \leqslant \frac{1}{2}\alpha_0 |f(z)| (|p^2 - 1| + \varrho^2 - \varrho_0^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_0 \exp\{-\alpha_0 \operatorname{Re} p\} (|p^2 - 1| + \varrho^2 - \varrho_0^2),$$

$$|p - a| = \varrho_0 \leqslant \varrho, \qquad p = a + \xi + i\eta, \qquad \xi^2 + \eta^2 = \varrho_0^2.$$

Доказательство теоремы сводится к отысканию наибольщего значения функции

$$\varphi(\xi, \eta) = e^{-\alpha_0\xi}\left(\sqrt{[(a+\xi)^2 - \eta^2 - 1]^2 + 4(a+\xi)^2\eta^2} + \varrho^2 - \xi^2 - \eta^2\right)$$

в круге $\xi^2 + \eta^2 \leqslant \varrho^2$.

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \eta\Phi,$$

$$\Phi = 2e^{-\alpha_0\xi}\frac{(a+\xi)^2 + \eta^2 + 1 - \sqrt{[(a+\xi)^2 + \eta^2 + 1]^2 - 4(a+\xi)^2}}{\sqrt{[(a+\xi)^2 - \eta^2 - 1]^2 + 4(a+\xi)^2\eta^2}} > 0,$$

то это наибольшее значение может достигаться только на окружности $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2$. Поэтому задача сводится к нахождению наибольщего значения функции

$$\psi(\xi) = 2\varrho e^{-\alpha_0\xi}(a + \xi)$$

на интервале $-\varrho \leqslant \xi \leqslant \varrho$.

Из того, что

$$\frac{d\psi}{d\xi} = 2\varrho e^{-\alpha_0\xi}[1 - \alpha_0(a + \xi)],$$

имеем для максимума

$$a + \xi = \frac{1}{\alpha_0}, \qquad \frac{1-r}{1+r} \leqslant a + \xi \leqslant \frac{1+r}{1-r}.$$

Рассматривая отдельно случаи, когда

$$\frac{1}{\alpha_0} \leqslant \frac{1-r}{1+r}, \qquad \frac{1-r}{1+r} < \frac{1}{\alpha_0} < \frac{1+r}{1-r}; \qquad \frac{1+r}{1-r} \leqslant \frac{1}{\alpha_0},$$

с помощью простых вычислений, приходим к требуемым оценкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гальперин, Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций, УМН, т. XX, вып. 1 (121), 1965.
2. И. М. Гальперин, Теорема искажения для ограниченных в единичном круге функций, Тез. докл. XXI научн. конференц. проф.-преподават. состава Киевск. автодорожн. ин-та, 1965.
3. Г. М. Голузин, Оценка производной для функций, регулярных и ограниченных в круге, Матем. сб., т. 16 (58) : 3, 1965.
4. В. А. Зморович, Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій, ДАН УРСР, № 8, 1965.

Поступила 16.VI 1965 г.
Киев