Об оценках решений дифференциальных уравнений второго порядка

М. А. Красносельский, А. Ю. Левин, Я. Д. Мамедов

1. Пусть $v(t)$ — скалярная функция. Говорят (см. [1]), что $D^{('')}v(t_0)$ является вторым производным числом Шварца функции $v(t)$ в точке t_0, если существует такая последовательность $h_n \to 0$ $(h_n \neq 0)$, что

$$D^{('')}v(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{v(t_0+h_n) - 2v(t_0) + v(t_0-h_n)}{h_n^2}.$$

Через $D_{\text{в}}^{('')}v(t_0)$, $D_{\text{н}}^{('')}v(t_0)$ будем обозначать соответственно верхнее и нижнее вторые производные числа Шварца (разумеется, они могут быть и бесконечными).

Нам потребуются обобщения известных теорем о дифференциальных неравенствах второго порядка (см., например, [2]) на неравенства с производными числами Шварца.

Теорема 1. *Пусть уравнение*

$$u''(t) + \lambda_1(t)\,u'(t) + \lambda_2(t)\,u(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1}$$

имеет положительное на отрезке $[0, T]$ решение $u_0(t)$. Пусть непрерывная на $[0, T]$ функция $v(t)$ удовлетворяет условиям $v(0) \leqslant 0$, $v(T) \leqslant 0$ и дифференциальному неравенству

$$D_{\text{в}}^{('')}v(t) + \lambda_1(t)\,Dv(t) + \lambda_2(t)\,v(t) \geqslant 0 \qquad (0 < t < T), \tag{2}$$

где $Dv(t)$ — любое первое производное число.

Тогда справедливо неравенство

$$v(t) \leqslant 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $w_0(t)$ — некоторое отрицательное решение уравнения

$$w''(t) + \lambda_1(t)\,w'(t) + \lambda_2(t)\,w(t) = 1.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функции

$$v(t;\varepsilon) = v(t) + \varepsilon w_0(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

неположительны при $\varepsilon > 0$. Предположим противное. Тогда найдутся такое $\varepsilon_0 > 0$ и такой интервал $(\alpha, \beta) \subset (0, T)$, что $v(t;\varepsilon_0)$ положительна на (α,β) и

$$v(\alpha;\varepsilon_0) = v(\beta;\varepsilon_0) = 0.$$

Положим

$$c = \max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} \frac{v(t,\varepsilon_0)}{u_0(t)}, \qquad z(t) = v(t,\varepsilon_0) - cu_0(t).$$

Функция $z(t)$ неположительна на $[\alpha, \beta]$, отрицательна на концах этого промежутка и обращается в нуль в некоторой его внутренней точке τ, которая, таким образом, является для $z(t)$ точкой максимума. Используя (2), находим

$$D_{\text{в}}^{('')}z(\tau) + \lambda_1(\tau)\,Dz(\tau) = D_{\text{в}}^{('')}z(\tau) + \lambda_1(\tau)\,Dz(\tau) + \lambda_2(\tau)\,z(\tau) =$$

$$= D_{\text{в}}^{('')}v(\tau) + \lambda_1(\tau)\,Dv(\tau) + \lambda_2(\tau)\,v(\tau) + \varepsilon_0 > 0. \tag{4}$$

Правые производные числа $Dz(t)$ в точке τ, очевидно, неположительны, а левые — неотрицательны, поэтому найдется $Dz(\tau)$ такое, что $\lambda_1(\tau)\,Dz(\tau) \leqslant 0$.

Поскольку (4) должно выполняться и для этого $Dz(\tau)$, то $D_{\text{в}}^{('')}z(\tau) > 0$, что невозможно, так как τ — точка максимума для $z(t)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что утверждение теоремы 1 сохраняется, если вместо (2) потребовать выполнения неравенства

$$D_{\text{н}}^{('')}v(t) + \lambda_1(t)\,Dv(t) + \lambda_2(t)\,v(t) \geqslant 0 \qquad (0 < t < T) \tag{5}$$

для некоторого $Dv(t)$ при каждом t (если левая часть обращается в неопределенность вида $\infty - \infty$, ей приписывается знак $D_{\text{н}}^{('')}v(t)$). Доказательство аналогично предыдущему со следующим замечанием: если τ — точка максимума $z(t)$ и $D_{\text{н}}^{('')}z(\tau) > -\infty$, то $z(t)$ дифференцируема в τ. Достаточно также, чтобы при каждом t из $(0, T)$ выполнялось хотя бы одно из неравенств (2), (5).

Из теоремы 1 легко вывести аналогичные утверждения о нелинейных дифференциальных неравенствах. Приведем одно из них.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет положительное на* $[0, T]$ *решение. Пусть* $u^*(t)$ *— определенное на* $[0, T]$ *решение уравнения*

$$u''(t) + \lambda_1(t)\,u'(t) = \varphi[t, u(t)], \tag{6}$$

где $\varphi(t, u)$ *обобщенно монотонна в том смысле, что при* $u > u^*(t)$

$$\varphi(t, u) - \varphi[t, u^*(t)] \geqslant -\lambda_2(t)\,[u - u^*(t)] \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{7}$$

Пусть, наконец, непрерывная на $[0, T]$ *функция* $v(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$v(0) \leqslant u^*(0), \qquad v(T) \leqslant u^*(T) \tag{8}$$

и дифференциальному неравенству

$$\overline{D}_{\text{в}}^{('')}v(t) + \lambda_1(t)\,Dv(t) \geqslant \varphi[t, v(t)] \qquad (0 < t < T). \tag{9}$$

Тогда справедливо неравенство

$$v(t) \leqslant u^*(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) - u^*(t), & \text{если } v(t) \geqslant u^*(t), \\ \quad 0 & , \text{если } v(t) \leqslant u^*(t). \end{cases} \tag{11}$$

Нужно показать, что она тождественно равна нулю. В предположении противного найдется интеграл (t_1, t_2), на концах которого $v_1(t)$ обращается в нуль и на котором она положительна. В то же время, на промежутке $[t_1, t_2]$ функция $v_1(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому неположительна. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Вместо функции (11) можно рассмотреть функцию $v_1(t) = v(t) - u^*(t)$, если условие (7) заменить более простым (но и более ограничительным) предположением о том, что из $-\infty < u_1 < u_2 < \infty$ вытекает неравенство

$$\varphi(t, u_2) - \varphi(t, u_1) \geqslant -\lambda_2(t)\,(u_2 - u_1) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{12}$$

Теоремы 1 и 2 могут быть применены к оценке решений дифференциальных уравнений второго порядка в функциональных пространствах по схеме, обычно применяемой при изучении уравнений первого порядка (см., например, [3]). Особо интересна возможность получения различных односторонних оценок.

2. Рассмотрим теперь абстрактную функцию $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ со значениями в вещественном банаховом пространстве E. Для получения оценок этой абстрактной функции удобно рассматривать скалярные функции

$$v(t) = \Phi[x(t)] \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{13}$$

где $\Phi(x)$ — определенные на E функционалы.

Ниже мы будем предполагать, что функционал $\Phi(x)$ непрерывный и выпуклый. Выпуклость означает, что

$$\Phi[\alpha x + (1-\alpha) y] \leqslant \alpha\Phi(x) + (1-\alpha)\Phi(y) \qquad (x, y \in E; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{14}$$

Линейный (относительно h) функционал $M(x_0; h)$ будем называть опорным к функционалу $\Phi(x)$ в точке x_0, если

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \geqslant M(x_0; h) \qquad (h \in E). \tag{15}$$

Если функционал $\Phi(x)$ выпуклый, то существование опорных линейных функционалов непосредственно вытекает из теоремы М. Г. Крейна о продолжении положительного функционала (см. [4]).

Л е м м а 1. *Пусть абстрактная функция $x(t)$ дважды дифференцируема в точке t_0.*

Тогда справедливы неравенства

$$D^{('')} v(t_0) \geqslant M[x(t_0); x''(t_0)]. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из существования $x''(t_0)$ вытекает, что

$$x(t_0 + \Delta t) + x(t_0 - \Delta t) = 2x(t_0) + x''(t_0)\Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Из (14) и (15) следует очевидная цепочка неравенств

$$\Phi[x(t_0 + \Delta t)] - 2\Phi[x(t_0)] + \Phi[x(t_0 - \Delta t)] \geqslant$$
$$\geqslant 2\left\{\Phi\left[\frac{x(t_0 + \Delta t) + x(t_0 - \Delta t)}{2}\right] - \Phi[x(t_0)]\right\} \geqslant$$
$$\geqslant M[x(t_0);\ x(t_0 + \Delta t) + x(t_0 - \Delta t) - 2x(t_0)],$$

т. е.

$$v(t_0 + \Delta t) - 2v(t_0) + v(t_0 - \Delta t) \geqslant M[x(t_0);\ x''(t_0)\Delta t^2 + o(\Delta t^2)].$$

Следовательно,

$$\frac{v(t_0 + \Delta t) - 2v(t_0) + v(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2} \geqslant M[x(t_0); x''(t_0)] + o(1),$$

откуда вытекает, что все производные числа Шварца удовлетворяют неравенству

$$D^{('')} v(t_0) \geqslant M[x(t_0); x''(t_0)].$$

Лемма доказана.

Будем в дальнейшем считать, что приращения функционала $\Phi(x)$ допускают оценки

$$N_-(x; h) + o(h) \leqslant \Phi(x + h) - \Phi(x) \leqslant N_+(x; h) + o(h), \tag{17}$$

где функционалы $N_-(x; h)$ и $N_+(x; h)$ при фиксированных x полуоднородны по h:

$$N_-(x; \alpha h) = \alpha N_-(x; h), \ N_+(x; \alpha h) = \alpha N_+(x; h) \qquad (\alpha \geqslant 0) \tag{18}$$

и непрерывны по h. Функционалы $N_-(x; h)$ и $N_+(x; h)$ естественно называть нижним и верхним полудифференциалами функционала $\Phi(x)$.

Если $\Phi(x)$ — выпуклый функционал, то из (15) вытекает, что в качестве нижнего полудифференциала можно рассматривать линейный опорный функционал.

Ниже используется очевидная

Лемма 2. *Пусть абстрактная функция $x(t)$ дифференцируема в точке t_0.*

Тогда все правые производные числа функции $v(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$N_{-}[x(t_0); x'(t_0)] \leqslant Dv(t_0) \leqslant N_{+}[x(t_0); x'(t_0)]. \qquad (19)$$

Доказанные леммы позволяют применить теоремы 1 и 2 для получения оценок решений дифференциальных уравнений второго порядка в банаховых пространствах. Приводимые ниже утверждения можно по обычным схемам перевести в теоремы об оценках решений краевых задач для уравнений с частными производными, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для некоторых интегро-дифференциальных уравнений и др.

Ниже предполагается, что выпуклый функционал $\Phi(x)$ неотрицателен и принимает нулевое значение лишь в нулевой точке. Получаемые ниже оценки удобны при дополнительном предположении о том, что из $\Phi(x) \to 0$ вытекает $\|x\| \to 0$.

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \qquad (20)$$

с неограниченным, вообще говоря, оператором $f(t, x, y)$. Предположим, что $f(t, x, y)$ на своей области определения удовлетворяет неравенству

$$M[x, f(t, x, y)] \leqslant \lambda_1(t) N_t(x, y) + \lambda_2(t)\Phi(x) + \alpha(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \quad (21)$$

где

$$N_t(x, y) = \begin{cases} N_{-}(x, y) \text{ при тех } t, \text{ при которых } \lambda_1(t) \geqslant 0, \\ N_{+}(x, y) \text{ при тех } t, \text{ при которых } \lambda_1(t) \leqslant 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (20). Из лемм 1 и 2 тогда вытекает, что

$$D_{\text{в}}^{(\cdot)} v(t) \geqslant -\lambda_1(t) Dv(t) - \lambda_2(t) v(t) - \alpha(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $v(t)$ — функция (13). Предположим, что уравнение (1) имеет положительное решение. Тогда из теоремы 2 вытекает оценка

$$\Phi[x(t)] \leqslant u^*(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \qquad (23)$$

где $u^*(t)$ — решение уравнения

$$u''(t) + \lambda_1(t) u'(t) + \lambda_2(t) u(t) + \alpha(t) = 0, \qquad (24)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0) = \Phi[x(0)], \qquad u(T) = \Phi[x(T)]. \qquad (25)$$

Пусть, в частности,

$$f(t, x, y) = A(t)x + g(t, x, y),$$

где $A(t)$ удовлетворяет условию (см. [3])

$$M[x, A(t)x] \leqslant \alpha\Phi(x)$$

и

$$M[x, g(t, x, y)] \leqslant \beta\Phi(x).$$

Тогда оценка (23) имеет вид

$$\Phi[x(t)] \leqslant \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha+\beta}\,(T-t)}{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha+\beta}\,T}\,\Phi[x(0)] + \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha+\beta}\,t}{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha+\beta}\,T}\,\Phi[x(T)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \alpha+\beta>0,\ T>0, \\ \dfrac{T-t}{T}\,\Phi[x(0)] + \dfrac{t}{T}\,\Phi[x(T)], \text{ если } \alpha+\beta=0,\ T>0, \\ \dfrac{\sin\sqrt{|\alpha+\beta|}\,(T-t)}{\sin\sqrt{|\alpha+\beta|}\,T}\,\Phi[x(0)] + \dfrac{\sin\sqrt{|\alpha+\beta|}\,t}{\sin\sqrt{|\alpha+\beta|}\,T}\,\Phi[x(T)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \alpha+\beta<0,\ 0<T<\dfrac{\pi}{\sqrt{|\alpha+\beta|}}. \end{cases}$$

Из этой оценки вытекает, что при $\alpha+\beta \geqslant 0$ функция (13) принимает максимальное значение либо при $t=0$, либо при $t=T$ (ср. [5, 6]).

Оценки типа (23) могут быть применены для получения априорных оценок решений краевых задач для уравнений второго порядка в банаховых пространствах (для конечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для интегро-дифференциальных уравнений, для уравнений с частными производными и т. д.).

Оценки типа (23) можно применить и для оценки разности двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ одного уравнения второго порядка или двух различных уравнений. Для этого нужно составить уравнение, которому удовлетворяет разность

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

и затем получить для $\Phi[x(t)]$ оценку типа (23). На этом пути можно получить разнообразные теоремы единственности решений уравнения (20) при фиксированных краевых условиях, теоремы о корректности краевых задач по отношению к «малым» возмущениям краевых условий или по отношению к «малым» возмущениям уравнения и т. д. Мы не выписываем соответствующих утверждений, так как они по существу не отличаются ни формулировкой, ни доказательством от аналогичных теорем (см., например, [3]) для уравнений первого порядка. Отметим лишь, что при исследовании решений уравнения (20) ограничения на $f(t, x, y)$ обычно имеют вид

$$M[x_1 - x_2; f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)] \leqslant \lambda_1(t)\, N_t(x_1 - x_2; y_1 - y_2) + \\ + \lambda_2(t)\,\Phi(x_1 - x_2) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{26}$$

где $N_t(x, y)$ — функционал (22).

4. Теоремы 1 и 2 могут быть применены для доказательства сходимости некоторых приближенных методов и для доказательства существования решений у уравнения (20).

Допустим, что $f(t, x, y)$ удовлетворяет условию (26), причем коэффициенты $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ обладают тем свойством, что уравнение (1) имеет положительное на $[0, T]$ решение. Далее, будем считать, что построена последовательность

$$x_n(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T; \qquad n = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

таких дважды дифференцируемых на $[0, T]$ функций, которая обладает следующими свойствами:

1°. Определены функции

$$\varepsilon_n(t) = \frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} + f\left[t, x_n(t), \frac{dx_n(t)}{dt}\right] \qquad (0 \leqslant t \leqslant T;\ n = 1, 2, \ldots).$$

2°. Имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{0\le t\le T}\|\varepsilon_n(t)\|\}=0,$$

3°. Существуют и конечны пределы

$$\lim_{n\to\infty}x_n(0)=x_0,\qquad \lim_{n\to\infty}x_n(T)=x_T.$$

4°. Существует такая постоянная ϱ, что

$$\|x_n(t)\|\leqslant\varrho\qquad (0\leqslant t\leqslant T;\qquad n=1,2,\ldots).$$

Наконец, будем предполагать, что выпуклый функционал $\Phi(x)$ удовлетворяет условию

$$M(x;h)\geqslant a\cdot\|h\|\qquad (\|x\|\leqslant 2\varrho). \tag{28}$$

Введем обозначение

$$v_{n,m}(t)=\Phi[x_n(t)-x_m(t)]\qquad (n,m=1,2,\ldots).$$

Из лемм 1 и 2 и из условия (26) вытекает, что

$$D_{\text{в}}^{('')}v_{n,m}(t)+\lambda_1(t)Dv_{n,m}(t)+\lambda_2(t)v_{n,m}(t)\geqslant M[x_n(t)-x_m(t);\varepsilon_n(t)-\varepsilon_m(t)]$$

и в силу (28)

$$D_{\text{в}}^{('')}v_{n,m}(t)+\lambda_1(t)Dv_{n,m}(t)+\lambda_2(t)v_{n,m}(t)\geqslant\varepsilon_{n,m},$$

где

$$\varepsilon_{n,m}=a\|\varepsilon_n(t)-\varepsilon_m(t)\|.$$

Из теоремы 2 вытекает, что

$$v_{n,m}(t)\leqslant u_{n,m}(t)\qquad (0\leqslant t\leqslant T;\qquad n,m=1,2,\ldots), \tag{29}$$

где $u_{n,m}(t)$ — решение уравнения

$$u''(t)+\lambda_1(t)u'(t)+\lambda_2(t)u(t)=\varepsilon_{n,m},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0)=\Phi[x_n(0)-x_m(0)],\qquad u(T)=\Phi[x_n(T)-x_m(T)].$$

Из 2° и 3° вытекает равенство

$$\lim_{n,m\to\infty}\{\max_{0\le t\le T}u_{n,m}(t)\}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{n,m\to\infty}\{\max_{0\le t\le T}\Phi[x_n(t)-x_m(t)]\}=0. \tag{30}$$

Равенство (30) означает, что последовательность (27) фундаментальна в равномерной метрике.

Допустим, что уравнение (20) имеет решение $x^*(t)$, удовлетворяющее условиям

$$x^*(0)=x_0,\quad x^*(T)=x_T. \tag{31}$$

В силу (26) такое решение единственно. Равенство (30) можно тогда рассматривать как доказательство равномерной сходимости «приближенных» решений (27) к точному решению $x^*(t)$.

В проведенных рассуждениях оператор $f(t, x, y)$ мог быть как ограниченным, так и неограниченным.

Предположим теперь, что неизвестно, есть ли у уравнения (20) решение, удовлетворяющее условиям (31). В этом случае предел последовательности (27) естественно считать обобщенным решением. Обобщенное решение совпадает с «настоящим» классическим решением, если такое классическое решение существует. Если классического решения нет, то обобщенное решение единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон, Теория функций вещественного переменного, Гостехиздат, М., 1957.
2. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, ИЛ, М., 1954.
3. М. А. Красносельский, Я. Д. Мамедов, Замечание о применении дифференциальных и интегральных неравенств..., НДВШ, сер. физ.-матем. наук, № 2, 1959.
4. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, т. 3, № 1(23), 1948.
5. М. М. Лаврентьев, О принципе максимума решения сильно эллиптических систем второго порядка, ДАН СССР, т. 116, № 2, 1957.
6. В. Г. Мазья, О принципе максимума для одного класса операторов в пространстве Банаха, Вестн. Ленинград. ун-та, № 1, 1963.

Поступила 3.IV. 1965 г.
Воронеж