О множествах сходимости одномерных итераций

Е. И. Минаев

Пусть $f(x)$, $x \in R$, $R = (-\infty, \infty)$, — вещественная непрерывная функция. Рассмотрим последовательность ее итераций

$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad f_0(x) = f(x). \tag{1}$$

Множество тех x, для которых последовательность (1) сходится, обозначим через C_f. Множество C_f, будучи множеством сходимости последовательности непрерывных функций, принадлежит классу $F_{\sigma\delta}$, согласно одной теореме Хана (см., например, [1], стр. 259). Однако последовательность (1) имеет специальную структуру и это, очевидно, должно привести к дополнительным ограничениям на топологию множества C_f.

Назовем множество $M \subseteq (-\infty, \infty)$ I-множеством, если существует такая функция $f(x)$, что $C_f = M$. Очевидно, R является I-множеством.

Настоящая заметка посвящена исследованию топологических свойств I-множеств. В ней устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы открытое множество $G \neq R$ было I-множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно имело ограниченную компоненту.*

Теорема 2. *Для того чтобы замкнутое множество $F \neq R$ было I-множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно имело изолированную точку или было ограниченным хотя бы с одной стороны.*

Теорема 3. *Объединение открытого множества G и замкнутого множества F, расстояние* $\varrho(GF)$ между которыми положительно, не является I-множеством.*

Напомним некоторые определения (см., например, [2]).

Множество A называется инвариантным относительно f, если $f(A) \subseteq A$. Множество A называется вполне инвариантным относительно f, если $f(A) \subseteq A$ и $f^{-1}(A) \subseteq A$.

Множество C_f, очевидно, вполне инвариантно относительно f. Система вполне инвариантных относительно множеств является σ-алгеброй.

Подчеркнем, что множество C_f, если оно непусто, обязательно содержит неподвижные точки (т. е. решения уравнения $x = f(x)$) и все неподвижные точки содержатся в C_f.

Наметим доказательства перечисленных теорем. Для этого нам понадобятся следующие непосредственно проверяемые леммы.

* Определения расстояния между множествами и границы смотри, например, в [1].

Л е м м а 1. *Замыкание инвариантного множества инвариантно.*

Л е м м а 2. *Пересечение вполне инвариантного множества с его границей* [1] *инвариантно.*

Граничная точка множества M, которая не является двусторонним пределом точек из множества M, называется односторонней.

Л е м м а 3. *Множество односторонних точек вполне инвариантного множества инвариантно.*

Перейдем к доказательству теоремы 1. Покажем, что открытое множество, не имеющее ограниченной компоненты и не совпадающее с R, не является I-множеством. Очевидно, не существует такой f, что $C_f = (a, \infty)$ или $C_f = (-\infty, a)$, так как по лемме 2 точка a должна быть неподвижной, но $a \bar{\in} C_f$.

Если предположить, что $C_f = R \setminus [a, b]$, то по лемме 2 должно быть $f(a) = b$, $f(b) = a$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - x$. Так как $\varphi(a) > 0$, $\varphi(b) < 0$, то найдется такое $\xi \in (a, b)$, что $\varphi(\xi) = 0$, т. е. (a, b) будет содержать неподвижную точку.

Для произвольного открытого множества G, имеющего ограниченную компоненту (a_0, b_0), укажем пример конструкции функции f, для которой $C_f = G$. Перенумеруем компоненты множества G:

$$G = (a_0, b_0) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right).$$

Пусть $\xi \in (a_0, b_0)$. Определим функцию $f(x)$ следующим образом.

Положим $f(\xi) = \xi, f(a_0) = b_0$, $f(b_0) = a_0$. На интервалах (a_0, ξ), (ξ, b_0) произведем квадратичное интерполирование со старшими коэффициентами 1, -1, соответственно. На части множества $F = R \setminus G$, лежащей левее точки a_0, положим $f(x) = b_0$. В остальных точках множества F положим $f(x) = a_0$. Таким образом, на концах каждого интервала (a_i, b_i) $(i \geqslant 1)$ функция $f(x)$ будет принимать одно и то же значение, равное a_0 или b_0. Положим, наконец,

$$f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) = \begin{cases} b_0 - \dfrac{1}{2i}(b_0 - a_0), & (b_i < a_0) \\ a_0 + \dfrac{1}{2i}(b_0 - a_0), & (a_i > b_0) \end{cases}$$

и произведем линейное интерполирование на интервалах $\left(a_i, \dfrac{a_i + b_i}{2}\right)$, $\left(\dfrac{a_i + b_i}{2}, b_i\right)$. Если среди интервалов (a_i, b_i) есть бесконечный интервал, то полагаем, например, на (c, ∞)

$$f(x) = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2} \operatorname{arc\,tg}(x - c).$$

Для построенной непрерывной функции $f(x)$ множество $f(F)$ состоит из двух точек a_0, b_0, а $f(G) = (a_0, b_0)$. Так как $f(a_0) = b_0 f(b_0) = a_0$, то $F \cap C_f = \varnothing$. Вместе с тем $(a_0, b_0) \subset C_f$ и, следовательно, $G \subset C_f$. Поэтому $C_f = G$. Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Покажем, что совершенное двустороннее неограниченное множество M не является I-множеством. Допустим противное. Пусть непрерывная функция f такова, что $C_f = M$.

Пусть ξ — односторонняя точка из M (т. е. конец одного из смежных интервалов). Положим $\xi_0 = \xi$, $\xi_n = f(\xi_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть $\lim \xi_n = \eta$. Согласно лемме 3 все точки ξ_n являются односторонними в M. Обозначим смежный интервал, примыкающий к точке ξ_n, через J_n. Положим $I_0 = J_0$,

$I_n = f(I_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $I_n \subseteq J_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Последовательность интервалов (или полуинтервалов) I_n стремится к точке η. Поэтому оказывается $J_0 \subseteq C_f$, что невозможно.

Для произвольного замкнутого множества F, имеющего изолированную точку ξ, укажем пример функции f, для которой $C_f = F$.

Перенумеруем компоненты множества $G = R \setminus F$:

$$G = (a_0, \xi) \cup (\xi, b_0) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right).$$

Выберем произвольные $\delta > 0$, лишь бы $\delta < \min\{\xi - a_0, b_0 - \xi\}$. Положим

$$f(\xi) = \xi, \ f(\xi - \delta) = \xi + \delta, \ f(\xi + \delta) = \xi - \delta, \ f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) = \frac{\delta}{2i}.$$

На F положим $f(x) = \xi$. Произведем линейное интерполирование на интервалах $(a_0, \xi - \delta)$, $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, $(\xi + \delta, b_0)$ и $\left(a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right)$, $\left(\frac{a_i + b_i}{2}, b_i\right)$.

Для построенной непрерывной функции $f(F) = \xi$, а $f(G) = (\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus (\xi)$. Так как $\xi \in C_f$ а $f(G) \cap C_f = \varnothing$, то $F = C_f$.

Рассмотрим теперь замкнутое множество F, ограниченное хотя бы с одной стороны, например, справа. Пусть ξ — крайняя правая граничная точка множества F. Перенумеруем компоненты множества $G = R \setminus F$:

$$G = (\xi, \infty) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right).$$

Пусть

$$f(\xi) = \xi, \ f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) = \frac{1}{i}.$$

На F положим $f(x) = \xi$, на интервале (ξ, ∞) положим $f(x) = 2x - \xi$.

Произведем линейное интерполирование на интервалах $\left(a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right)$, $\left(\frac{a_i + b_i}{2}, b_i\right)$.

Для построенной непрерывной функции $f(F) = \xi_n f(G) = (\xi, \infty)$. Так как $\xi \in C_f$, а $(\xi, \infty) \cap C_f = \varnothing$, то $C_f = F$. Теорема 2 доказана.

Теорему 3 докажем от противного. Пусть f такова, что $C_f = F \cup G = M$. Рассмотрим два случая.

1. Множество F или множество G не инвариантно. Пусть не инвариантно множество G. Тогда для некоторого $\xi \in G$, $f(\xi) \in F$ (ибо $G \cup F$ инвариантно). Пусть $J = (a, b)$ — компонента множества G, содержащая точку ξ. Предположим для определенности, что a конечно. Тогда $f(a) \overline{\in} M$. Так как $f(\xi) \in F$, то $f(J) \subseteq F$, ибо $\varrho(G, F) > 0$. Но тогда $f(\overline{J}) \subseteq F$ и, следовательно, $f(a) \in F$, т. е. $f(a) \in M$. Противоречие. Пусть теперь F не инвариантно. Тогда $f(\xi) \in G$ для некоторого $\xi \in F$. В силу леммы 2 точка ξ не может быть граничной. Поэтому она является внутренней точкой некоторого сегмента $[a, b] \subseteq F$. Теперь рассуждение может быть закончено аналогично предыдущему.

2. Оба множества G и F инвариантны. Множества G и F будут даже вполне инвариантны. При этом они должны иметь собственные неподвижные точки, так как итерационная последовательность, начинающаяся в одном из этих множеств, полностью ему принадлежит и $\varrho(G, F) > 0$. Пусть

ξ — неподвижная точка множества G, $J=(a,\ b)$ — компонента, содержащая ξ. Вследствие $f(\xi)=\xi$ $f(J)\subset J$. Интервал J не может быть бесконечным, так как если, например, $b=\infty$, то $f(a)=a$, ибо $f(a)$ должна быть граничной для G, в силу леммы 2. Но $a\overline{\in} M$ и, следовательно, не может быть неподвижной точкой. Теперь $f(a)=b$, $f(b)=a$ по лемме 2.

Рассмотрим неподвижные точки, лежащие вне J. Выберем из них ближайшую к ξ с какой-нибудь стороны. Пусть это будет точка $\eta>b$.

По теореме Больцано—Коши значения $f(x)$ из $[b,\ \eta]$ сплошь заполняют $[a,\ \eta]$. Пусть a_1 — крайняя правая точка из интервала $(b,\ \eta)$, где значение функции равно a. Точка a_1 является левым концом интервала $(a_1,\ b_1)$, входящего в G, причем $f(b_1)=b$. Применим теперь это же рассуждение к $(a_1,\ b_1)$. Получим $(a_2,\ b_2)\subset G$, $a_1<a_2<b_2<\eta$, $f(a_2)=a_1$, $f(b_2)=b_1$. Итерируя эту схему рассуждений, получим последовательность интервалов $\{(a_k,\ b_k)\}$, сходящуюся к η. Таким образом, $\eta\in\bar{G}$ и $\eta\overline{\in} G$, но так как $\varrho(F,\ G)=0$, то $\eta\overline{\in} F$. Противоречие. Теорема 3 доказана.

Заметим в заключение, что множества вида $M=F\cup G$, где $\varrho(F,\ G)=0$, в одних случаях являются I-множествами (например, $M=G\cup a$, $\varrho(G,\ a)=0$, $x\in G$, $x<a$), в других не являются (например, $M=G\cup a\cup b$, $x\in G$, $x<a<b$, $\varrho(G,\ a)=0$).

Приношу благодарность Ю. И. Любичу за постановку задачи и общее руководство работой и В. С. Гринбергу за ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
2. Х. К. Кенжегулов, Тр. II Научн. конференции матем. кафедр пед. ин-тов Поволжья, вып. I, Куйбышев, 1962.

Поступила 13.II 1965 г.
Харьков