# О вычислении отношения правдоподобия для гауссовских случайных процессов, удовлетворяющих некоторым линейным дифференциальным уравнениям

*Ю. М. Рыжов*

В заметке приводятся некоторые теоремы о свойствах мер $\mu_{\xi_1}$ и $\mu_{\xi_2}$, отвечающих определенным на отрезке $[0, T]$ вещественнозначным гауссовским случайным процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, соответственно, которые удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям

$$L_t^{(j)}[\xi_j(t)] = K_t^{(j)}[\dot{w}(t)], \tag{1}$$

где

$$L_t^{(j)}[x] = \sum_{k=0}^{m_j} a_{kj}(t) \frac{d^{m_j-k}x}{dt^{m_j-k}}, \qquad K_t^{(j)}[x] = \sum_{k=0}^{n_j} b_{kj}(t) \frac{d^{n_j-k}x}{dt^{n_j-k}}, \qquad j = 1, 2;$$

а $w(t)$ есть процесс броуновского движения. Уравнения (1) понимаем в смысле обобщенных функций, как и в работе [3].

Всюду ниже считаем выполненными следующие условия:

а) $m_j > n_j$, $j = 1, 2$;

б) коэффициенты $a_{kj}(t)$ имеют $m_j + k$ производных ($k = 0, 1, \ldots, m_j$); коэффициенты $b_{ij}(t)$ имеют $n_j + i$ производных ($i = 0, 1, \ldots, n_j$);

в) $a_{0j}(t) \neq 0$ и $b_{0j}(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, T]$ и $j = 1, 2$;

г) функции $K_s^{(j)*}[u(s)]$ интегрируемы с квадратом в области $s \in (0, t)$ для любого $t \in [0, T]$ и любого решения $u(s)$ однородного уравнения $L_s^{(j)*}[u(s)] = 0$.

Здесь $K_s^{(j)*}$ и $L_s^{(j)*}$ суть дифференциальные выражения, сопряженные $K_s^{(j)}$ и $L_s^{(j)}$, соответственно.

Условие г) обеспечивает в некотором смысле устойчивость решений уравнений (1).

Все встречающиеся ниже процессы имеют равное 0 математическое ожидание.

А. Я. Дороговцев [3, 4], обобщая результаты Долфа и Вудбэри [2], исследовал свойства таких процессов, свойства их корреляционных функций, а также (при некоторых дополнительных ограничениях) решил задачу о прогнозе. В частности, в [3] показано, что корреляционная функция $R_{\xi_j}(t, s)$ процесса $\xi_j(t)$, удовлетворяющего дифференциальному уравнению (1) при $t \neq s$, имеет $2m_j$ производных по $t$, причем корреляционная функция и ее производные до порядка $2m_j - 2n_j - 2$ включительно непрерывны по $t$ везде, включая точку $t = s$. Производная по $t$ порядка $2m_j - 2n_j - 1$ разрывна в точке $t = s$ и

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[ \frac{\partial^{2m_j - 2n_j - 1} R_{\xi_j}(t, s)}{\partial t^{2m_j - 2n_j - 1}} \right]_{t=s-\varepsilon}^{t=s+\varepsilon} = (-1)^{m_j - n_j} \frac{b_{0j}^2(s)}{a_{0j}^2(s)}. \tag{2}$$

Из этого утверждения, теоремы Бэкстера [1], а также из того факта, что меры в функциональном пространстве, отвечающие гауссовским процессам, могут быть только либо абсолютно непрерывными, либо сингулярными друг относительно друга, следует теорема.

Теорема 1. *Условия*

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \quad и \quad \int_0^T \frac{b_{01}^2(s)}{a_{01}^2(s)} ds = \int_0^T \frac{b_{02}^2(s)}{a_{02}^2(s)} ds \tag{3}$$

*необходимы для абсолютной непрерывности друг относительно друга мер* $\mu_{\xi_1}$ *и* $\mu_{\xi_2}$, *отвечающих гауссовским процессам* $\xi_1(t)$ *и* $\xi_2(t)$, *которые удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям* (1).

Это есть обобщение хорошо известного результата [6, 7], полученного в случае стационарных гауссовских процессов. Если процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ гауссовские и имеют дробно-рациональные спектральные плотности (т. е. коэффициенты в уравнениях (1) не зависят от $t$) условия вида (3) являются также и достаточными. В общем случае таких простых достаточных условий не удается получить, однако, при некоторых дополнительных ограничениях на дифференциальные выражения $L_t^{(j)}$ и $K_t^{(j)}$ можно доказать абсолютную непрерывность мер $\mu_{\xi_1}$, и $\mu_{\xi_2}$ друг относительно друга и получить явное выражение для отношения правдоподобия $\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(t))$.

Теорема 2. *Пусть гауссовские случайные процессы* $\eta_j(t)$, $t \in [0, T]$ $(j = 1, 2)$ *удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$M_t^{(j)}[\eta_j(t)] = \dot{w}(t), \tag{4}$$

*где дифференциальные выражения*

$$M_t^{(j)}[x] = \sum_{k=1}^{N_j} c_{kj}(t) \frac{d^{N_j - k} x}{dt^{N_j - k}}, \qquad j = 1, 2,$$

*удовлетворяют условиям типа* а) — г). *Если* $N_1 = N_2 = N$ *и, кроме того,* $c_{01}(t) = c_{02}(t)$ *при любом* $t \in [0, T]$, *то мера* $\mu_{\eta_2}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{\eta_1}$ и

$$\log \frac{d\mu_{\eta_2}}{d\mu_{\eta_1}} (\eta_1(t)) = \log p_0 (\eta_1(0), \eta_1'(0), \ldots, \eta_1^{(N-1)}(0)) -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^T \{(M_t^{(1)} - M_t^{(2)}) [\eta_1(t)]\}^2 dt + \int\limits_0^T (M_t^{(1)} - M_t^{(2)}) [\eta_1(t)]\, dw(t), \tag{5}$$

*где* $p_0(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ *есть плотность распределения вектора* $\{\eta_2(0), \eta_2'(0), \ldots$ $\ldots, \eta_2^{(N-1)}(0)\}$ *относительно распределения вектора* $\{\eta_1(0), \eta_1'(0), \ldots, \eta_1^{(N-1)}(0)\}$.

Это утверждение легко следует из результатов А. В. Скорохода ([5], гл. 4), касающихся дифференцируемости мер, отвечающих марковским процессам, и следующей леммы [5].

Лемма. *Пусть* $\xi_1(t)$ *и* $\xi_2(t)$ *суть процессы определенные на* $[0, T]$, *а* $\eta_1(t) = \mathbf{A}\xi_1(t)$ *и* $\eta_2(t) = \mathbf{A}\xi_2(t)$, *где* $\mathbf{A}$ *есть измеримое отображение вероятностного пространства* $\mathbf{F}_\xi$, *связанного с процессами* $\xi_j(t)$ *в вероятностное пространство* $\mathbf{F}_\eta$, *связанное с процессами* $\eta_j(t)$, $j = 1, 2$. *Тогда, если мера* $\mu_{\xi_2}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{\xi_1}$, *то мера* $\mu_{\eta_2}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{\eta_1}$ *и*

$$\frac{d\mu_{\eta_2}}{d\mu_{\eta_1}} (\eta_1(t)) = \mathbf{M} \left\{ \frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}} (\xi_1(t)) / \xi_1(t), t \in [0, T] \right\}. \tag{6}$$

Пусть процессы $\xi_j(t)$, $t \in [0, T]$, $j = 1, 2$ удовлетворяют уравнениям (1). Если операторы $K_t^{(1)}$ и $L_t^{(1)}$ коммутируют и также коммутируют операторы $L_t^{(2)}$ и $K_t^{(2)} L_t^{(1)}$, то точно так же, как это делается в [6], процессы $\xi_j(t)$ можно представить в виде

$$\xi_j(t) = K_t^{(1)} [K_t^{(2)} [\eta_j(t)]], \qquad j = 1, 2, \ t \in (0, T), \tag{7}$$

где случайные процессы $\eta_j(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (4), а именно:

$$L_t^{(1)} [K_t^{(2)} [\eta_1(t)]] = \dot{w}(t), \qquad L_t^{(2)} [K_t^{(1)} [\eta_2(t)]] = \dot{w}(t).$$

Из теоремы 2 следует, что если

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \quad \text{и} \quad \frac{b_{01}(t)}{a_{01}(t)} = \frac{b_{02}(t)}{a_{02}(t)} \tag{8}$$

при всех $t \in [0, T]$, то мера $\mu_{\eta_2}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{\eta_1}$ и

$$\log \frac{d\mu_{\eta_2}}{d\mu_{\eta_1}} (\eta_1(t)) = \log p_0 (\eta_1(0), \eta_1'(0), \ldots, \eta^{(m_1+n_2-1)}(0)) -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^T \{(L_t^{(1)} K_t^{(2)} - L_t^{(2)} K_t^{(1)}) [\eta_1(t)]\}^2 dt + \int\limits_0^T (L_t^{(1)} K_t^{(2)} - L_t^{(2)} K_t^{(1)}) [\eta_1(t)]\, dw(t), \tag{9}$$

где $p_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1+n_2})$ — плотность распределения вектора $\{\eta_2(0),$

$\eta_2'(0), \ldots \eta_2^{(m_1+n_2-1)}(0)\}$ относительно распределения вектора $\{\eta_1(0), \eta_1'(0), \ldots$ $\ldots, \eta_1^{(m_1+n_2-1)}(0)\}$.

Обозначим через $R_{\eta_j}(t, s)$ корреляционную функцию процесса $\eta_j(t)$, $j = 1, 2$. Так как векторы $\{\eta_j(0), \eta_j'(0), \ldots, \eta_j^{(m_1+n_2-1)}(0)\}$ имеют $(m_1+n_2)$-мерное гауссовское распределение с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей

$$D_j = \{d_{kl}^{(j)}\} = \left\{\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial s^l} R_{\eta_j}(t, s)\big|_{t=s=0}\right\}, \qquad k, l = 0, 1, \ldots, m_1+n_2-1, \quad (10)$$

то

$$p_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1+n_2}) = \left[\frac{\det D_2}{\det D_1}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{m_1+n_2-1}[\delta_{kl}^{(2)} - \delta_{kl}^{(1)}]\, x_k x_l\right\},$$

где $\delta_{kl}^{(j)}$ — элементы обратной матрицы $D_j^{-1}$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\frac{d\mu_{\eta_2}}{d\mu_{\eta_1}}(\eta_1(t)) = \left[\frac{\det D_2}{\det D_1}\right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}(\eta_1(t), \eta_1(t)), \qquad (11)$$

где обозначено

$$\mathbf{H}(x(t), y(t)) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{m_1+n_2-1}[\delta_{kl}^{(2)} - \delta_{kl}^{(1)}]\, x^{(k)}(0)\, y^{(l)}(0) -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T (L_t^{(1)}K_t^{(2)} - L_t^{(2)}K_t^{(1)})[x(t)] \cdot (L_t^{(1)}K_t^{(2)} - L_t^{(2)}K_t^{(1)})[y(t)]\, dt +$$

$$\left. + \int_0^T (L_t^{(1)}K_t^{(2)} - L_t^{(2)}K_t^{(1)})[x(t)]\,(L_t^{(1)}K_t^{(2)})[y(t)]\, dt.\right\} \qquad (12)$$

Из леммы и (11) следует, что если выполнено (8) то мера $\mu_{\xi_2}$, отвечающая процессу $\xi_2(t)$, абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{\xi_1}(t)$, отвечающей процессу $\xi_1(t)$, и

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(t)) = \left[\frac{\det D_2}{\det D_1}\right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}\{\mathbf{H}(\eta_1(t), \eta_1(t))/\xi_1(t), t \in [0, T]\}. \qquad (13)$$

Пусть $G(t, s)$ — функция Грина для дифференциального уравнения

$$K_t^{(1)}[K_t^{(2)}[u(t)]] = g(t). \qquad t \in (0, T)$$

с нулевыми начальными условиями. Тогда из (7) следует представление

$$\eta_1(t) = \int_0^T G(t, s)\, \xi_1(s)\, ds + \sum_{k=0}^{n_1+n_2-1} \varphi_k(t)\, \eta_1^{(k)}(0), \qquad (14)$$

где функции $\psi_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n_1+n_2-1$, однозначно определяются коэффициентами дифференциального выражения $(K_t^{(1)}K_t^{(2)})$ и начальными условиями $\{\eta_1(0), \eta_1'(0), \ldots, \eta_1^{(n_1+n_2-1)}(0)\}$.

Далее обозначим:

$$\hat{\eta}_1^{(k)} = \mathbf{M}\{\eta_1^{(k)}(0)/\xi_1(t), t \in [0, T]\}. \qquad (15)$$

$$\zeta_1^{(k)} = \eta_1^{(k)}(0) - \hat{\eta}_1^{(k)}.$$

Так как рассматриваем гауссовские процессы, то при любом $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m_1 + n_2 - 1$ величина $\hat{\eta}_1^{(k)}$ не зависит от $\zeta_1^{(k)}$ и, кроме того, при всех $k$ величины $\zeta_1^{(k)}$ не зависят от $\xi_1(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть

$$U(\xi_1, t) = \int_0^T G(t, s)\, \xi_1(s)\, ds + \sum_{k=0}^{n_1+n_2-1} \varphi_k(t) \hat{\eta}_1^{(k)},$$

$$V(t) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2-1} \varphi_k(t)\, \zeta_1^{(k)}, \tag{16}$$

тогда

$$\eta_1(t) = U(\xi_1, t) + V(t), \qquad t \in [0, T].$$

Замечая, что

$$\mathbf{H}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \mathbf{H}(x_1, y_1)\, \mathbf{H}(x_2, y_1)\, \mathbf{H}(x_1, y_2)\, \mathbf{H}(x_2, y_2),$$

получим:

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(t)) = \left| \frac{\det D_2}{\det D_1} \right|^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}(U(\xi_1, t), U(\xi_1, t))\, \mathbf{M}\, \{\mathbf{H}(U(\xi_1, t), V(t)) \times$$
$$\times\, \mathbf{H}(V(t), U(\xi, t))\, \mathbf{H}(V(t), V(t))\}, \tag{17}$$

причем под знаком математического ожидания величина $U(\xi_1, t)$ считается фиксированной (не случайной).

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть процессы* $\xi_j(t)$, $t \in [0, T]$, $j = 1, 2$, *удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям* (1). *Если*

1) $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$;

2) $\dfrac{b_{01}(t)}{a_{01}(t)} = \dfrac{b_{02}(t)}{a_{02}(t)}$ *при всех* $t \in [0, T]$;

3) *операторы* $L_t^{(1)}$ *и* $K_t^{(1)}$ *коммутируют;*

4) *операторы* $(L_t^{(2)} K_t^{(1)})$ *и* $K_t^{(2)}$ *коммутируют;*

5) *выполнены условия* а) — г),

*то мера* $\mu_{\xi_2}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{\xi_1}$ *и плотность* $\dfrac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(t))$ *имеет вид* (17). *Величины, входящие в* (17) *определяются соотношениями* (10) (12), (14) *и* (16).

Формула (17) позволяет находить в явном виде плотность $\dfrac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(t))$. Действительно, если известны величины $\hat{\eta}_1^{(k)}$, то задача вычисления плотности $\dfrac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(t))$ сводится к вычислению математического ожидания случайной величины вида

$$\exp\left\{ \sum_{i, j=1}^{N} \alpha_{ij}(t)\, w_i w_j + \sum_{k=1}^{N} \beta_k(t)\, w_k \right\},$$

где $w_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, — нормально распределенные случайные величины, а $\alpha_{ij}(t)$ и $\beta_k(t)$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$, — некоторые не случайные функции. Величины $\hat{\eta}_1^{(k)}$ в нащем случае совпадают с наилучшими (в смысле среднего квадратического) линейными оценками для величин $\eta_1^{(k)}(0)$ по известной реализации прецесса $\xi_1(t)$, когда $t \in [0, T]$. Таким образом, чтобы найти величины $\widehat{\eta}_1^{(k)}$, необходимо решить задачу фильтрации для случайных процессов, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям вида (1) и (4). Последняя задача, как уже было отмечено, рассматривалась в [3, 4], где в определенных условиях она сводится к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений.

В заключение хочу выразить глубокую признательность моему научному руководителю А. В. Скороходу за постоянное внимание и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Baxter, A strong limit theorem for Gaussian processes, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 3, 1956, 15—40.
2. G. L. Dolph, M. A. Woodbary, On the relation between Green's functions and covariances of certain stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 1952, 519—550.
3. А. Я. Дороговцев, Зауваження про випадкові процеси, що породжуються деякими диференціальними рівняннями, ДАН УРСР, № 7, 1962.
4. А. Я. Дороговцев, Деякі зауваження про прогноз процесів, що породжуються диференціальними рівняннями, ДАН УРСР, № 8, 1962.
5. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киевск. гос. ун-та, 1962.
6. А. В. Скороход, В. С. Михалевич, О статистике некоторых процессов, Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теории вероятн и матем. статистике, Вильнюс, 1962.
7. D. Slepian, Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise. IRE Trans. on Inform. Theory., PGIT-4, 1950, 65—68.

Поступила 19.II 1964 г.
Киев