Обобщение средних Гельдера и теоремы тауберова типа для этих методов

К. М. Слепенчук

§ **1.** $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-методы. Пусть $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$ и $\alpha = 1, 2, \ldots$ Преобразуем числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

с частичными суммами S_n следующим образом:

$$H_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) H_{k-1}^{(\alpha-1)}, \quad H_n^{(0)} = S_n.$$

Будем говорить, что ряд (1) $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-суммируем к S, если $H_n^{(\alpha)} \to S$, $n \to \infty$, и $|(H^{(\alpha)}, \lambda)|$-суммируем к S, если последовательность $\{H_n^{(\alpha)}\}$ абсолютно сходится к S.

Так как

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-методы являются регулярными методами, и при $\lambda_n = n$ они совпадают с методами Гельдера порядка α.

Прежде всего, установим ряд теорем тауберова типа для этих методов.

Теорема 1. *Для того чтобы из* $(H^{(\alpha)}, \lambda)$ *-суммируемости ряда* (1) *к* S *следовала бы его сходимость к тому же значению, необходимо и достаточно, чтобы*

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Необходимость. Легко проверить, что

$$S_n - H_n^{(1)} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = t_n^{(0)}. \tag{3}$$

Пусть ряд (1) сходится к S. Тогда в силу регулярности $H_n^{(1)} \to S$, $n \to \infty$, а следовательно, из (3) необходимо $t_n^{(0)} \to 0$, $n \to \infty$.

Достаточность. Принимая во внимание (3), будем иметь:

$$H_n^{(1)} - H_{n-1}^{(1)} = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} (S_{n-1} - H_{n-1}^{(1)}) =$$

$$= \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k = a_n^{(1)}.$$

Отсюда получаем $(H^{(1)}, \lambda)$-преобразование ряда в ряд:

$$H_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(1)}.$$

Вообще, если положить

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k^{(\alpha-1)}, \quad a_k^{(0)} = a_k \tag{4}$$

то

$$H_n^{(\alpha-1)} - H_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^{(\alpha-1)} = t_n^{(\alpha-1)} \tag{5}$$

и

$$H_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(\alpha)}.$$

Далее покажем, что если $t_n^{(0)} \to 0$, $n \to \infty$, то $t_n^{(m)} \to 0$, $n \to \infty$, $m = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. В самом деле, пусть

$$b_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^{(\alpha-1)}.$$

Если воспользоваться (4), то

$$t_n^{(m)} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \frac{b_{k-1}}{\lambda_{k-1}} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})\, t_{k-1}^{(m-1)}. \tag{6}$$

Положив здесь последовательно $m = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Пусть теперь ряд (1) $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-суммируем к S и выполнено (2). Тогда в силу (5) ряд (1) $(H^{(\alpha-1)}, \lambda)$-суммируем к S. Продолжая этот процесс для $\alpha - 2, \ldots, 0$, мы убеждаемся в сходимости ряда (1) к значению S.

Теорема 2. *Для того чтобы из* $|(H^{(\alpha)}, \lambda)$*-суммируемости ряда* (1) *к* S *следовала бы его абсолютная сходимость к тому же значению, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | t_n^{(0)} - t_{n-1}^{(0)} | < \infty, \ t_n^{(0)} \to 0, \ n \to \infty. \tag{7}$$

Необходимость. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$. Так как

$$\sum_{n=1}^{N} |t_n^{(0)} - t_{n-1}^{(0)}| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |a_k| + \sum_{n=1}^{N} |a_n| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N-1} \lambda_\nu |a_\nu| \sum_{n=\nu+1}^{N} \left(\frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_n} \right) + \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|,$$

то отсюда необходимо следует (7).

Достаточность. Заметим, прежде всего, что если последовательность $\{S_n\}$ (или ряд (1)) абсолютно сходится, то в силу только что доказанного последовательность $\{t_n^{(0)}\}$ абсолютно сходится, а следовательно, в силу (3), абсолютно сходится и преобразованная последовательность $\{H_n^{(1)}\}$. Поэтому, если в (6) последовательно положить $m = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$, то из абсолютной сходимости последовательности $\{t_n^{(0)}\}$ всегда следует абсолютная сходимость последовательностей $\{t_n^{(1)}\}, \ldots, \{t_n^{(\alpha-1)}\}$.

Пусть теперь ряд (1) $|(H^{(\alpha)}, \lambda)|$-суммируем к S и выполнено (7). Тогда из тождества (5) следует $|(H^{(\alpha-1)}, \lambda)|$-суммируемость ряда (1) к S. Продолжая этот процесс для $\alpha - 2, \ldots, 0$, мы убеждаемся в абсолютной сходимости ряда (1) к S.

Следующие две теоремы отмечают случаи, когда $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-методы становятся тривиальными, т. е. суммируют только сходящиеся (или абсолютно сходящиеся) ряды.

Теорема 3. *Если ряд* (1) $(H^{(\alpha)}, \lambda)$*-суммируем к* S *и*

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} < C, \tag{8}$$

где C *не зависит от* n, *то он сходится к значению* S.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда из тождества

$$H_n^{(\alpha-1)} - H_n^{(\alpha)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} (H_n^{(\alpha)} - H_{n-1}^{(\alpha)}) \tag{9}$$

следует $(H^{(\alpha-1)}, \lambda)$-суммируемость ряда (1) к S. Теорема будет доказана; если продолжить наши рассуждения для $\alpha - 2, \ldots, 0$.

Теорема 4. *Если ряд* (1) $|(H^{(\alpha)}, \lambda)|$*-суммируем к* S *и выполнено* (8), *то он абсолютно сходится к значению* S.

Доказательство. Пусть ряд (1) $|(H^{(\alpha)}, \lambda)|$-суммируем к S и выполнено (8). Тогда, в силу (9),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |H_n^{(\alpha-1)} - H_n^{(\alpha)}| < \infty.$$

С другой стороны,

$$|H_n^{(\alpha-1)} - H_{n-1}^{(\alpha-1)}| < |H_n^{(\alpha)} - H_{n-1}^{(\alpha)}| + |H_n^{(\alpha-1)} - H_n^{(\alpha)}| + |H_{n-1}^{(\alpha-1)} - H_{n-1}^{(\alpha)}|,$$

откуда следует $|(H^{(\alpha-1)}, \lambda)|$-суммируемость ряда (1). Если продолжить наш процесс для $\alpha - 2, \ldots, 0$, то мы убеждаемся в абсолютной сходимости ряда (1). Сходимость ряда (1) к S следует из теоремы 3.

В заключении параграфа докажем еще «лимитирующую теорему» для $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-методов.

Теорема 5. *Если ряд* (1) $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-*суммируем к* S *и*

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = 1; \quad \text{(б)} \ \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < C,$$

где C не зависит от n, то

$$S_n = o\left[\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right)^{\alpha}\right].$$

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда из тождества

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} H_{n-1}^{(\alpha-1)} = H_n^{(\alpha)} - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} H_{n-1}^{(\alpha)}$$

будем иметь:

$$H_n^{(\alpha-1)} = o\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right).$$

Далее,

$$H_{n-1}^{(\alpha-2)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} H_n^{(\alpha-1)} - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} H_{n-1}^{(\alpha-1)} = o\left[\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right)^2\right],$$

. . . .

$$H_n^{(0)} = S_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} H_n^{(1)} - \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} H_{n-1}^{(1)} = o\left[\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right)^{\alpha}\right].$$

Легко видеть, что доказанные теоремы справедливы и для $(R^*, \lambda, 1)$-методов суммирования рядов (дискретные методы Рисса). Далее, если в теоремах 1, 2, 5 положить $\lambda_n = n$, то мы получим соответствующие теоремы для (H, α)- и (C, α)-методов.

§ 2. $(W^{(\alpha)}, \gamma)$-методы. Пусть $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{n+1} \geqslant \gamma_n$. Методы суммирования рядов (1), определяемые при помощи преобразования

$$W_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{n} (\gamma_{n+1-k} - \gamma_{n-k}) W_{k-1}^{(\alpha-1)}, \quad W_n^{(0)} = S_n,$$

будем обозначать через $(W^{(\alpha)}, \gamma)$. При $\alpha = 1$ они представляют собой одну из модификаций методов Вороного, если положить $p_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$ (см. [1]), а при $\gamma_n = n$ — совпадают с методами Гельдера порядка α.

Теорема 6. *Для регулярности* $(W^{(\alpha)}, \gamma)$-*метода необходимо и дос-*

таточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=1.$$

Доказательство. Пусть имеет место (10). Так как

$$0\leqslant a_{nk}=\frac{\gamma_{n+1-k}-\gamma_{n-k}}{\gamma_n}<\frac{\gamma_{n+1-k}-\gamma_{n-k}}{\gamma_{n-k}}\to 0,$$

$$n\to\infty,\ k=1,2,\ldots,;$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}=\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=1}^{n}(\gamma_{n+1-k}-\gamma_{n-k})=1,$$

то матрица $\|a_{nk}\|$ удовлетворяет всем условиям регулярности, а следовательно $(W^{(\alpha)},\gamma)$-методы регулярны.

Если положить $k=1$, то необходимо

$$a_{n1}=\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\gamma_n}=\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}-1\to 0,\ n\to\infty,$$

отсюда необходимо следует (10).

Теорема 7. *Если $(W^{(1)},\gamma)$-метод регулярный и ряд* (1) *$(W^{(1)},\gamma)$-суммируем к S, то условие*

$$t_n=\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=1}^{n}(\gamma_n-\gamma_{n-k})\,a_k\to 0,\ n\to\infty$$

является необходимым и достаточным для сходимости ряда (1) *к значению S.*

Это следует из тождества $t_n=S_n-W_n^{(1)}$. Теорема 7 справедлива и для $(W^{(\alpha)},\gamma)$-методов, если повторить аналогичные рассуждения, которые имеют место в теореме 1.

Отметим ряд свойств $(W^{(\alpha)},\gamma)$-методов, доказательство которых проводится по аналогии с доказательствами аналогичных свойств методов Вороного (см. [1], стр. 88).

Теорема 8. *Всякие два регулярных метода $(W^{(\alpha)},\gamma')$ и $(W^{(\alpha)},\gamma'')$, определяемых при помощи последовательностей $\{\gamma_n'\}$ и $\{\gamma_n''\}$, совместны.*

Далее, заметим, что ряды

$$P(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k'x^k,\quad Q(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k''x^k$$

сходятся для $|x|<1$. Тогда для малых значений x сходится так же ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_nx^n=\frac{Q(x)}{P(x)}.$$

Теорема 9. *Если $(W^{(\alpha)},\gamma')$- и $(W^{(\alpha)},\gamma'')$-методы регулярны, то для того, чтобы $(W^{(\alpha)},\gamma')$-метод включал $(W^{(\alpha)},\gamma'')$-метод, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|k_1|\gamma_n'+|k_2|\gamma_{n-1}'+\ldots+|k_n|\gamma_1'<H\gamma_n'',$$

где H не зависит от n, и $k_n=o(\gamma_n'')$.

Если в этой теореме положить $\gamma'_n = n$, то имеет место

Теорема 10. *Если* $(W^{(\alpha)}, \gamma'')$*-метод регулярен и* $\gamma''_n - 2\gamma''_{n-1} + \gamma''_{n-2} > 0$ *(условие вогнутости), то из* (C, α)*-суммируемости ряда к* S *следует его* $(W^{(\alpha)}, \gamma'')$*-суммируемость к тому же значению.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.

Поступила 23.VI 1961 г.
Днепропетровск