О теореме Джексона в пространствах L_p

М. Ф. Тиман

Известно, что для любой измеримой периодической периода 2π функции $f(x)$, принадлежащей пространству L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ (т. е. $\|f(x)\|_{L_p} = \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty$ при $1 \leqslant p < \infty$, а при $p = \infty$ $\operatorname{vrai\,sup}_x |f(x)| < \infty$), справедлива следующая оценка (см. например, [4])

$$E_n(f)_{L_p} \leqslant C_k \omega_k \left(f; \frac{1}{n+1}\right)_{L_p}, \tag{1}$$

где C_k — некоторая константа, не зависящая от n, p и функции $f(x)$, а

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{a_\nu, b_\nu} \|f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\|_{L_p},$$

$$\omega_k(f; h)_{L_p} = \sup_{|t| \leqslant h} \|\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu t)\|_{L_p}.$$

Неравенство (1) для случая, когда $k = 1$, $p = \infty$ и функция $f(x)$ непрерывна, установлено Джексоном [1]; при $k = 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — Н. И. Ахиезером [2], а для $k \geqslant 3$, $p = \infty$ — С. Б. Стечкиным [3].

Оценка снизу порядка убывания модуля гладкости $\omega_k(f; h)_{L_p}$ функции $f(x) \in L_p$ с помощью заданной последовательности ее наилучших приближений тригонометрическими полиномами $\{E_n(f)_{L_p}\}$, данная неравенством (1) при $1 < p < \infty$, в ряде случаев является грубой. Так, например, если $E_n(f)_{L_p} = \frac{1}{(n+1)^k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то с помощью неравенства (1) получим, что при любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$ $\omega_k(f; h)_{L_p} \geqslant M_k \cdot h^k$, а в действительности, как это будет установлено ниже, в этом случае для $1 < p \leqslant 2$

$$\omega_k(f; h)_{L_p} \geqslant M_{p,k} \cdot h^k \left(\ln \frac{1}{h}\right)^{1/2},$$

а при $2 \leqslant p < \infty$

$$\omega_k(f; h)_{L_p} \geqslant M_{p,k} \cdot h^k \left(\ln \frac{1}{h}\right)^{1/p}.$$

Последние оценки вытекают из следующего утверждения, уточняющего при $1 < p < \infty$ неравенство (1) и показывающего, что при оценке снизу модуля гладкости функции $f(x) \in L_p$ следует, кроме скорости убывания последовательности наилучших приближений этой функции, в ряде случаев учитывать и метрику рассматриваемого пространства*.

Теорема. *Если измеримая периодическая, периода* 2π, *функция* $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, *то при* $n \to \infty$

$$\omega_k\left(f;\ \frac{1}{n+1}\right)_{L_p} \geqslant \frac{M_{p,k}}{(n+1)^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma k-1} E_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{1/\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = 2$ *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $\gamma = p$ *для* $2 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Считая $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, рассмотрим при любом $1 < \gamma < \infty$ сумму

$$\sigma_{n,k,\gamma} = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^{\gamma k-1}}{n^{\gamma k}} E_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{1/\gamma} \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \frac{\mu^{\gamma k-1}}{n^{\gamma k}} E_\mu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{1/\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma k}}{n^{\gamma k}} E_{2^{\nu-1}-1}^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{1/\gamma} \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma k}}{n^{\gamma k}} \left\|\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(x)\right\|_{L_p}^\gamma\right\}^{1/\gamma} =$$

$$= \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma k}}{n^{\gamma k}} \left\|\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu\right\|_{L_p}^\gamma\right\}^{1/\gamma},$$

где $A_\mu(x) = a_\mu \cos\mu x + b_\mu \sin\mu x$; a_μ, b_μ — коэффициенты Фурье функции

$$f(x) \in L_p,\ (1 < p < \infty);\ \Delta_\mu = \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x),\ (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Используя неравенство Литтльвуда и Палея [5], в силу которого

$$M_p \left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} \leqslant \left\|\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(x)\right\| \leqslant C_p \left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p}, \tag{3}$$

получим, что

$$\sigma_{n,k,\gamma} \leqslant C_p \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma k}}{n^{\gamma k}} \left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p}^\gamma\right\}^{1/\gamma}. \tag{4}$$

Пусть теперь $1 < p \leqslant 2$ и $\gamma = 2$. Тогда, поскольку $p \leqslant 2$, с помощью обобщенного неравенства Минковского, получим

$$\sigma_{n,k,2} \leqslant C_p \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{2\nu k}}{n^{2k}} \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{p/2} dx\right]^{2/p}\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_p \left\{\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{2\nu k}}{n^{2k}} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{p/2} dx\right\}^{1/p}. \tag{5}$$

---

* Оценка сверху модуля гладкости функции $f(x) \in L_p (1 < p < \infty)$ с помощью последовательности $\{E_n(f)L_p\}$ установлена автором в [7].

Применяя преобразование Абеля, находим, что

$$\sigma_{n,k,2} \leqslant C_p \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{2^{2\nu k}}{n^{2k}} \Delta_\nu^2 + \frac{2^{2k(m+1)}}{n^{2k}} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_{p,k} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{2^{2\nu k}}{n^{2k}} \Delta_\nu^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p} + \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\mu=m+1}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p} \right\}. \tag{6}$$

Применяя неравенство (3) и используя тот факт, что частные суммы Фурье в пространствах $L_p (1 < p < \infty)$ дают приближение функции $f(x)$ по порядку такое же, что и тригонометрические полиномы наилучшего приближения, получим

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\mu=m+1}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p} \leqslant M_p \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=2^m}^{\infty} A_\mu(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M_p' E_{2^m-1}(f)_{L_p} \leqslant M_{p,k} \omega_k \left(f;\ \frac{1}{n+1} \right)_{L_p}. \tag{7}$$

Покажем, что и первое слагаемое в правой части неравенства (6) не превышает некоторой константы, умноженной на $\omega_k \left(f;\ \frac{1}{n+1} \right)_{L_p}$. Для этого снова воспользуемся неравенством (3).

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{2^{2\nu k}}{n^{2k}} \Delta_\nu^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p} \leqslant C_p \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{m} \frac{2^{\nu k}}{n^k} \Delta_\nu \right|^p dx \right\}^{1/p} =$$

$$= C_p \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \frac{2^{\nu k}}{n^k \sin^k \frac{\mu}{2n}} A_\mu(x) \sin^k \frac{\mu}{2n} \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Обозначая через $\lambda_\mu = \dfrac{2^{\nu k}}{n^k \sin^k \frac{\mu}{2n}}$ $(\mu = 2^{\nu-1}, 2^{\nu-1}+1, \ldots, 2^\nu - 1;\ \nu = 1, 2, \ldots, m)$, легко проверить, что система чисел $\{\lambda_\mu\}$ ограничена в совокупности и

$$\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}| \leqslant M \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Но тогда, применяя известную теорему Марцинкевича [6] о множителях, находим

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=1}^{2^m-1} \lambda_\mu A_\mu(x) \sin^k \frac{\mu}{2n} \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant B_p \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=1}^{2^m-1} A_\mu(x) \sin^k \frac{\mu}{2n} \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant B_p' \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu(x) \sin^k \frac{\mu}{2n} \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant B_{p,k}\omega_k\left(f;\ \frac{1}{n+1}\right)_{L_p}.$$

Последняя оценка вместе с (6) и (7) доказывают неравенство (2) в случае $1 < p \leqslant 2$.

Если же $2 \leqslant p < \infty$ и $\gamma = p$, то в силу (4)

$$\sigma_{n,k,p} \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu pk}}{n^{pk}} \left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p}^p\right\}^{1/p} = \left\{\int_0^{2\pi} \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu pk}}{n^{pk}} \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{p/2} dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{2\nu k}}{n^{2k}} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_\mu^2\right)^{p/2} dx\right\}^{1/p}. \qquad (8)$$

Дальше следует повторить рассуждения, аналогичные случаю $1 < p \leqslant 2$, так как выражение, стоящее в правой части неравенства (8), совпадает с выражением, стоящим в правой части неравенства (5).

Существуют примеры функций, показывающие, что неравенство (2) в общем случае в смысле порядка не может быть улучшено.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Jackson, The theory of approximation, Amer. Math. Soc. coll. Publ., **11**, 1930.
2. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М. — Л., 1947.
3. С. Б. Стечкин, О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, 1951, 219—242.
4. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
5. I. Littlewood, R. Paley, Theorems on Fourier series and power series, Proc. London Math. Soc., **42**, 1937, 52—89.
6. Marcinkiewiez, Sur les multiplicateurs des series de Fourier, Fund. Math., **32**, 1938, 78—91.
7. М. Ф. Тиман, Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p, Матем. сб., т. 46 (88): 1, 1958, 125—132.

Поступила 16.XI 1964 г.
Днепропетровск