К теории уравнения Риккати

П. Г. Тодоров

Пусть дано приведенное к каноническому виду уравнение Риккати

$$y' = y^2 + f(z), \tag{1}$$

где функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

регулярна в круге $|z| < \varrho$, $\varrho > 0$. По теореме Коши существует такое $\delta > 0$, что интеграл $y(z)$ уравнения (1), удовлетворящий условию $y(0) = 0$, есть регулярная функция в круге $|z| < \delta$, так что

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \tag{3}$$

где

$$b_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{\delta}.$$

Если предположить, что

$$M = \max_{|z|=R<\varrho} |f(z)|,$$

то из (2) следует, что

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant \frac{M}{R^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Если функция* (3) *удовлетворяет уравнению* (1) *и справедливы соотношения* (2) *и* (4), *то*

$$|b_{2k-1}| \leqslant \frac{1}{2k-1} M \left(M + \frac{1}{R^2}\right)^{k-1},$$

$$|b_{2x}| \leqslant \frac{1}{2k} \frac{M}{R} \left(M + \frac{1}{R^2}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$

так что

$$\delta \geqslant \frac{1}{\sqrt{M + \frac{1}{R^2}}}. \tag{6}$$

Доказательство. При $k = 1, 2$ справедливость (5) легко проверяется. Предположим, что неравенства (5) выполняются при $k = 1, 2, \ldots, m$ и докажем, что тогда эти неравенства имеют место и при $k = m + 1$.

Из (1), применяя формулу Лейбница к $y^2 = y \cdot y$, находим

$$y^{(n+1)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)}(z)\, y^{(n-k)}(z) + f^{(n)}(z).$$

При $z = 0$ отсюда следует

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{a_n}{n+1}. \tag{7}$$

Полагая в (7) $n = 2m$ и учитывая (4), получаем

$$|b_{2m+1}| \leqslant \frac{1}{2m+1} \sum_{j=1}^{m-1} |b_{2j}| \cdot |b_{2(m-j)}| +$$

$$+ \frac{1}{2m+1} \sum_{j=1}^{m} |b_{2j-1}| \cdot |b_{2(m-j)+1}| + \frac{1}{2m+1} \frac{M}{R^{2m}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2m+1} \frac{M^2}{R^2} \left(M + \frac{1}{R^2}\right)^{m-2} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{2(m-j)} + \tag{8}$$

$$+ \frac{1}{2m+1} M^2 \left(M + \frac{1}{R^2}\right)^{m-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2j-1} \cdot \frac{1}{2(m-j)+1} + \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{M}{R^{2m}}.$$

Справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{2m-1} \frac{1}{j(2m-j)} \leqslant 1, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

ибо $j \cdot (2m-j) \geqslant 2m-1$, поскольку $(j-1)(2m-1) \geqslant j(j-1)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ $2m-1$. Кроме того,

$$\frac{M^2}{R^2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)^{m-2} + \frac{M}{R^{2m}} \leqslant \frac{M}{R^2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)^{m-1}, \qquad m = 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

Принимая во внимание (9) и (10), из (8) получаем

$$|b_{2m+1}| \leqslant \frac{1}{2m+1} M \left(M + \frac{1}{R^2}\right)^m.$$

Аналогично доказывается и неравенство

$$|b_{2m}| \leqslant \frac{2}{2m} \frac{M}{R} \left(M + \frac{1}{R^2}\right)^m.$$

Теорема доказана.

Примечание. Погрешность приближенного неравенства

$$y(z) \approx \sum_{n=1}^{m} b_n z^n,$$

следующего из (3) в круге

$$|z| \leqslant \frac{\gamma}{\sqrt{M + \frac{1}{R^2}}},$$

где $0 < \gamma < 1$, на основании (5) не превосходит

$$\frac{C\gamma^{m+1}}{1-\gamma},$$

где $C > 0$, и не зависит от γ.

Поскольку M зависит от R, а под R можно понимать любое число из $(0, \varrho)$. то в каждом конкретном случае следует подбирать такое R, чтобы было $M + \frac{1}{R^2} = \min$.

В этом случае для δ (6) получается наилучшая возможная при данном методе оценка.

Поступила 6.XI 1965 г.
Пловдив (Болгария)