УДК 517.956

С. А. Алдашев (Казах. нац. пед. ун-т им. Абая, Алматы)

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

We prove the unique solvability and obtain an explicit expression for the classical solution of a mixed problem in a cylindrical domain for one class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

Показано однозначну розв'язність і отримано явний вигляд класичного розв'язку мішаної задачі для одного класу багатовимірних гіперболо-параболічних рівнянь.

Введение. Смешанная задача в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах исследована в [1, 2]. В [3] доказана корректность этой задачи и получен явный вид классического решения.

Насколько известно автору, эти вопросы для многомерных гиперболо-параболических уравнений не изучены.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получено явное представление классического решения смешанной задачи для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : t|x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α и Γ_β части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α , Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{xi} + e(x,t) u, & t < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

© С. А. АЛДАШЕВ, 2020

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^1(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \qquad u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi(r, \theta), \tag{3}$$

при этом $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta), \psi_2(\beta, \theta) = \varphi(1, \theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Справедлива следующая лемма [4].

Лемма 1. *Пусть функция $f(r, \theta)$ принадлежит $W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы функция $f(r, \theta)$ принадлежала $W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \qquad c_1,\, c_2 = \text{const}.$$

Обозначим через $\widetilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ коэффициенты ряда (4), соответственно, функций $d_i(r,\theta,t)\rho$, $d_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = = 1, \ldots, m$, $\varphi(r, \theta)$, $\psi_1(t, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\overline{\Omega}_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geq m+1$, $e(r,\theta,t) \leq 0$ $\forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p > \dfrac{3m}{2}$, то задача* 1 *однозначно разрешима.*

2. Разрешимость задачи 1. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t) u = 0,$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right),\; g_1 = 1,\; g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2,\; j > 1. \tag{5}$$

Известно [4], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи (1), (3) в области Ω_β будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), умножая полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и интегрируя по единичной сфере H, для $\bar{u}^k_n$ получаем [3, 5]

$$\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^m d^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{e}^1_0 \bar{u}^1_0 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n \bar{u}^k_{nt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^m d^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} +\right.$$

$$\left. + \left[\tilde{e}^k_n - \lambda_n \frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}^k_{in-1} - n d^k_n)\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0 \bar{u}^1_{0r} = 0, \tag{8}$$

$$\rho^k_1 \bar{u}^k_{1rr} - \rho^k_1 \bar{u}^k_{1t} + \frac{m-1}{r}\rho^k_1 \bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1 \bar{u}^k_1 =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m d^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \tilde{e}^1_0 \bar{u}^1_0\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \tag{9}$$

$$\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n \bar{u}^k_{nt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_n \bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n \bar{u}^k_n = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m d^k_{in-1}\bar{u}^k_{n-1r} +\right.$$

$$\left. + \left[\tilde{e}^k_{n-1} + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}^k_{in-2} - (n-1)d^k_{in-1})\right]\bar{u}^k_{n-1}\right\}, \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что если $\left\{\bar{u}^k_n\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots,$ — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Следует заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{nrr} - \bar{u}^k_{nt} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = \bar{f}^k_n(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (3) в силу (6) имеем

$$\bar{u}_n^k(r,\beta)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{2n}^k(t),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots\ . \tag{12}$$

Выполняя в (11), (12) замену переменных $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{2n}^k(t)$, получаем

$$\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\bar{\upsilon}_{nt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k=f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\beta)=\varphi_n^k(r),\quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots\ , \tag{14}$$

$$f_n^k(r,t)=\bar{f}_n^k(r,t)+\psi_{2nt}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k,\qquad \varphi_{2n}^k(r)=\bar{\varphi}_n^k(r)-\psi_{2n}^k(\beta).$$

Выполняя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{1-m}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (13), (14) сводим к задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv \upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k=\tilde{f}_n^k(r,t), \tag{15}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta)=\tilde{\varphi}_n^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{16}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\quad \widetilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{m-1}{2}}f_n^k(r,t),\quad \tilde{\varphi}_n^k(r)=r^{\frac{m-1}{2}}\varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=\widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\beta)=0,\qquad \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{19}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\beta)=\tilde{\varphi}_n^k(r),\qquad \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{21}$$

Решение указанных выше задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{22}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\qquad \tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{23}$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23) получаем

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{24}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \tag{25}$$

$$T_{st} + \mu T_s(t) = -a_{s,n}(t), \qquad \beta < t < 0, \tag{26}$$

$$T_s(\beta) = 0. \tag{27}$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является следующее [6]:

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $\nu = n + \dfrac{m-2}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общим решением уравнения (26), (27) является решение

$$T_{s,n}(t) = \big(\exp(-\mu_{s,n}^2 t)\big) \int_t^\beta a_{s,n}^k(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi. \tag{29}$$

Подставляя (28) в (23), находим

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \tag{30}$$

Ряды (30) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [7], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{31}$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{32}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$, — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин.

Из (22), (28), (29) получаем решение задачи (18), (19):

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{33}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (31).

Далее, подставляя (22) в (20), (21), с учетом (23) получаем уравнение

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \qquad \beta < t < 0, \qquad T_s(\beta) = b_{s,n}^k,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n}^k \exp \mu_{s,n}^2(\beta - t). \tag{34}$$

Из (28), (34) находим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k \sqrt{r}(\exp \mu_{s,n}^2(\beta - t)) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{35}$$

где $b_{s,n}^k$ определяются из (32).

Следовательно, решая сначала задачу (8), (12) (при $n = 0$), а затем (9), (12) (при $n = 1$) и т. д., находим последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\ \upsilon_{2n}^k(r,t),\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \ldots,$ определяются из (33) и (35).

Итак, в области Ω_β справедливо равенство

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \tag{36}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0,\ V_0$ плотна в $L_2((0,1)),\ \rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1,\ V_1$ плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V,\ V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [8]. Отсюда и из (36) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L_1 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0 \qquad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\ \upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (33), (35).

Учитывая формулу [7] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [4, 9]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \qquad \nu \geq 0,$$
$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \qquad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2} - 1 + q}, \qquad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_2(t,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, как в [10], можно доказать, что полученное решение (37) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^1(\Omega_\beta \cup S) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (33), (35) и (37) при $t \to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}\left[\int_0^{\beta}a_{s,n}^k(\xi)\left(\exp\mu_{s,n}^2\xi\right)d\xi+b_{s,n}^k\left(\exp\mu_{s,n}^2\beta\right)\right]J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_s r), \quad (39)$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \quad (40)$$

$$\nu_n^k(r)=\psi_{2nt}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}\times$$

$$\times\left[a_{s,n}(0)+\mu_{s,n}^2b_{s,n}^k(\exp\mu_{s,n}^2\beta)+\mu_{s,n}^2\int_0^{\beta}a_{s,n}^k(\xi)\left(\exp\mu_{s,n}^2\xi\right)d\xi\right]J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (31)–(33), (35), а также из лемм 1, 2 следует, что $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)\in W_2^l(S),\ l>\dfrac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2), (39), (40), получаем в области Ω_α смешанную задачу для гиперболических уравнений

$$L_2u\equiv\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0 \quad (41)$$

с данными

$$u\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_t\Big|_S=\nu(r,\theta),\qquad u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(r,\theta). \quad (42)$$

В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)\in W_2^l(S),\ \psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha),\ l>\dfrac{3m}{2}$, *то задача* (41), (42) *имеет единственное решение.*

Далее, используя теорему 2, приходим к разрешимости задачи 1.

3. Единственность решения задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем единственность ее решения. Для этого построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^*\upsilon\equiv\Delta_x\upsilon+\upsilon_t-\sum_{i=1}^{m}d_i\upsilon_{x_i}+d\upsilon=0 \quad (5')$$

с данными

$$\upsilon\big|_S=\tau(r,\theta)=\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\quad \upsilon\big|_{\Gamma_\beta}=0, \quad (43)$$

где $d(x,t)=e-\sum_{i=1}^{m}d_{ix_i},\ \bar{\tau}_n^k(r)\in G,\ G$ — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1])\cap$ $\cap\, C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [8]. Решение задачи (5′), (43) будем искать в виде (6), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, как и в п. 2, функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений вида (8) – (10), где $\tilde{d}_{in}^k$, d_{in}^k заменены соответственно на $-\tilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, а $\tilde{e}_n^k$ — на $\tilde{d}_n^k$, $i=1,\ldots,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$.

Далее, из краевого условия (43) в силу (6) приходим к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k + \upsilon_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\upsilon_n^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{44}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{45}$$

$$\upsilon_n^k(r,t) = r^{\frac{m-1}{2}}\bar{\upsilon}_n^k(r,t), \qquad \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{m-1}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \qquad \tau_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Задача (44), (45) решается так же, как задача (15), (16).

Таким образом, построено решение задачи $(5')$, (43) в виде ряда

$$\upsilon(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{1-m}{2}}\upsilon_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta),$$

которое в силу (38) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^1(\Omega_\beta\cup S)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

В результате интегрирования по области Ω_β тождества [11]

$$\upsilon L_1 u - uL_1^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos\left(N^\perp, x_i\right), \qquad Q = \cos\left(N^\perp, t\right) - \sum_{i=1}^m a_i\cos\left(N^\perp, x_i\right),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$, по формуле Грина получаем

$$\int\limits_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \tag{46}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S)$ [8], то из (46) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0\ \forall(r,\theta)\in S$. Следовательно, по принципу экстремума для уравнений (5) [12] $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$. Отсюда следует, что $u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=0\ \forall(r,\theta)\in S$.

Таким образом, мы пришли к однородной смешанной задаче (41), (42), которая в силу теоремы 2 имеет тривиальное решение. Следовательно, единственность решения задачи 1 доказана.

Поскольку в [3] получен явный вид решения задачи (41), (42), то можно записать явное представление и для задачи 1.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *Смешанная задача для гиперболического уравнения,* Гостехиздат, Москва (1953).
2. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики,* Наука, Москва (1973).
3. С. А. Алдашев, *Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором,* Укр. мат. журн., **69**, № 7, 992 – 999 (2017).
4. С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения,* Физматгиз, Москва (1962).

5. С. А. Алдашев, *О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений,* Дифференц. уравнения, **34**, № 1, 64 – 68 (1988).
6. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям,* Наука, Москва (1965).
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции,* т. 2, Наука, Москва (1974).
8. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа,* Наука, Москва (1976).
9. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики,* Наука, Москва (1966).
10. С. А. Алдашев, *Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений,* Укр. мат. вестн., **10**, № 2, 147 – 157 (2013).
11. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики,* т. 4, Наука, Москва (1981).
12. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа,* Мир, Москва (1968).

Получено 10.11.17