1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами

М. Л. Горбачук

Как известно [15], для самосопряженной краевой задачи

$$l(y) = -y'' + q(t)\,y = \lambda y \quad (0 \leqslant t < b,\ 0 < b \leqslant \infty), \tag{I}$$

$$y'(0) = Ay(0), \tag{II}$$

где $q(t)$ и A — самосопряженные ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, существует операторная спектральная функция $\varrho(\lambda)$ такая, что для любых векторнозначных функций $f(t)$ и $g(t)$ со значениями в H, для которых $\int\limits_0^b \| f(t) \|^2\, dt < \infty$, $\int\limits_0^b \| g(t) \|^2\, dt < \infty$,

$$\int\limits_0^b (f(t), g(t))_{\mathrm{H}}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (d\varrho(\lambda)\, \mathrm{E}_f(\lambda), \mathrm{E}_g(\lambda))_{\mathrm{H}};$$

$$\mathrm{E}_f(\lambda) = \int\limits_0^b \varphi^*(t,\lambda)\, f(t)\, dt.$$

Такая функция $\varrho(\lambda)$ может не быть единственной.

В этой статье рассматриваются вопросы, связанные с единственностью $\varrho(\lambda)$. В случае неединственности дается описание всех спектральных функций задачи (I) — (II). При этом устанавливается существование $\varrho(\lambda)$ методом, иным чем в [15]. Получаемые результаты аналогичны теории классической и матричной проблемы моментов [1, 8, 9, 7], спектральной теории задачи (I) — (II) в скалярном случае [4, 11, 19] и теории разностных уравнений с операторными коэффициентами [2, 3, 17].

В п. 1 изучается минимальный оператор L_0, определенный выражением (I) и граничным условием (II). В п. 2 и 3 в терминах граничных условий описываются все самосопряженные и квазисамосопряженные расширения L_0 в случае конечного интервала. Пользуясь формулой для обобщенных резольвент [17], показывается, что любая обобщенная резольвента оператора L_0 является интегральным оператором с операторным ядром. Следуя методу М. Г. Крейна [8], устанавливается существование бесчисленного множества операторных спектральных функций и дается способ их описания.

В п. 4 рассматривается случай бесконечного интервала. Аналогично [8, 3] дается правило подсчета дефектных чисел оператора L_0 и доказывается существование операторного решения уравнения (I), суммируемого с квадратом, что является обобщением соответствующего результата Г. Вейля [4].

Далее методом растяжения интервала устанавливается существование операторной спектральной функции задачи (I) — (II) для случая бесконечного интервала. При этом каждая такая функция взаимно однозначно связывается с разложением единицы оператора L_0. Кроме того, рассматриваются два крайних случая, определенный и абсолютно неопределенный, являющиеся аналогами предельной точки и предельного круга для скалярного случая.

Пользуясь случаем, автор благодарит М. Г. Крейна за ценные советы, а также Ю. М. Березанского за руководство этой работой.

1°. Пусть Н — спарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,.\,,\,.\,)$ и нормой $\|\cdot\|$. Элементы этого пространства будем обозначать $f, g, \ldots$

Обозначим $\mathcal{H}(0, b)$ $(0 < b \leqslant \infty)$ множество всех вектор-функций $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant b)$ со значениями в Н таких, что $\int\limits_0^b \|u(t)\|^2 dt < \infty$. Как известно, $\mathcal{H}(0, b)$ является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_b = \int\limits_0^b (u(t), v(t))\, dt\,.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] = -y'' + q(t)\, y = \lambda y \tag{1}$$

с краевым условием

$$y'(0) - Ay(0) = 0, \tag{2}$$

где $q(t) = q^*(t)$ (* обозначает переход к сопряженному оператору) — непрерывная в равномерной топологии оператор-функция, а A — ограниченный самосопряженный оператор в Н; λ — любое комплексное число. Пусть $\varphi(t, \lambda)$ и $\psi(t, \lambda)$ — операторные решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = I, \qquad \varphi'(0, \lambda) = A; \qquad \psi(0, \lambda) = 0, \qquad \psi'(0, \lambda) = I^*.$$

Тогда всякое векторное решение $u(t, \lambda)$ этого уравнения имеет вид:

$$u(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda)\, C_1 f + \psi(t, \lambda)\, C_2 f \ (f \in \mathrm{H}), \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — некоторые операторы в Н.

Обозначим D совокупность всех $y(t) \in \mathcal{H}(0, b)$, имеющих абсолютно непрерывную (в сильном смысле) первую производную и вторую производную из $\mathcal{H}(0, b)$, удовлетворяющих условию (2). Определим на D оператор L: $Ly = l[y]$, $y \in D$.

Обозначим также D_0' совокупность всех $y(t) \in D$, равных нулю вне какого-нибудь интервала $(0, \beta) \subset (0, b)$, вообще говоря, различного для разных $y(t)$, а через L_0' — сужение оператора L на D_0'. Из формулы Лагранжа для произвольных $u, v \in D$ и $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2$ $(\alpha_2 < b)$

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} (l[u](t), v(t))\, dt - \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u(t), l[v](t))\, dt = [-(u'(t), v(t)) + (u(t), v'(t))]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tag{4}$$

следует, что L_0' эрмитов и $L \subset L_0'^*$.

Пусть L_0 — замыкание оператора L_0' в $\mathcal{H}(0, b)$. Тогда можно показать, что

$$L_0^* = L. \tag{5}$$

Последнее равенство показывает, что при $b < \infty$ множество $D_0 = D(L_0)$ состоит из тех $y(t) \in D$, для которых $y(b) = y'(b) = 0$. Если же $b = \infty$,

* I — единичный оператор в Н.

то D_0 состоит из тех $u(t) \in D$, для которых при любом $v \in D$ имеет место равенство: $\lim_{\beta\to\infty} [(u'(\beta), v(\beta)) - (u(\beta), v'(\beta))] = 0$.

Обозначим $\mathfrak{N}_\lambda$ дефектное подпространство оператора L_0: $\mathfrak{N}_\lambda = \mathcal{H}(0, b) \ominus \ominus \mathfrak{R}(\lambda I - L_0)$ ($\mathfrak{R}(B)$ — область значений B).

Лемма 1. *Подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ состоит из векторов вида $\varphi(t, \bar{\lambda}) f$, где $f \in \mathcal{H}$ таково, что*

$$\int_0^b \| \varphi(t, \bar{\lambda}) f \|^2 dt < \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in \mathfrak{N}_\lambda$, тогда в силу (5) $u(t) \in D$ и $L_0^* u - \bar{\lambda} u = Lu - \bar{\lambda} u = 0$, т. е. u — решение задачи (1) — (2). Пользуясь (3), получаем, что $u(t) = \varphi(t, \bar{\lambda}) f$. Так как $u(t) \in \mathcal{H}(0, b)$, то (6) выполняется, и лемма доказана.

2°. В этом и в следующем пунктах предполагается, что $b < \infty$. Лемма 1 показывает, что в этом случае оператор имеет индекс дефекта (n, n) ($n \leq \infty$ равно размерности H).

Зафиксируем невещественное λ_0 ($\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$), и пусть F — линейный оператор, по норме не превосходящий единицы, отображающий $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$. Квазисамосопряженным расширением оператора L_0, определяемым оператором F (см. [18]), называется оператор L_F, заданный на многообразии элементов $y(t)$ вида

$$y = u + Fv - v, \ u \in D(L_0), \ v \in \mathfrak{N}_{\lambda_0} \tag{7}$$

соотношением

$$L_F y = L_0 u + \lambda_0 F v - \bar{\lambda}_0 v.$$

Если F — унитарный оператор, то L_F является самосопряженным расширением L_0.

Нам понадобится следующая

Теорема 1 (Штраус [18]). *Всякая обобщенная резольвента R_λ замкнутого симметрического оператора L_0 представима в виде*

$$R_\lambda = (L_{F(\lambda)} - \lambda I)^{-1} \ (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{8}$$

где $F(\lambda)$ — некоторая аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ операторная функция из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящая по норме единицы; $L_{F(\lambda)}$ — квазисамосопряженное расширение оператора L_0, определяемое оператором $F(\lambda)$.

Обратно, всякой операторной функцией $F(\lambda)$, обладающей перечисленными свойствами, формулой (8) определяется обобщенная резольвента оператора L_0. При этом различным функциям $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты. Формула (8) дает обычные резольвенты тогда и только тогда, когда $U = F(\lambda)$ — унитарный оператор.

Опишем более эффективно обобщенные резольвенты оператора L_0. Для этого охарактеризуем сперва область определения оператора $L_{F(\lambda)}$ с помощью граничных условий. Из леммы 1 и (7) следует, что $D(L_{F^*(\lambda)})$ состоит из элементов вида $y = u + F^*(\lambda) \varphi(\cdot, \lambda_0) f - \varphi(\cdot, \lambda_0) f$, $f \in$ H — произвольный элемент. Равенством $F^*(\lambda) \varphi(\cdot, \lambda_0) f = \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0) g$ определяется некоторый оператор Φ_λ в H: $\Phi_\lambda f = g$.

Обозначая $J_\lambda = \int_0^b \varphi^*(t, \lambda) \varphi(t, \lambda) dt$, из определения $\varphi(t, \lambda)$ получим, что при любом комплексном λ J_λ является обратимым положительным оператором в H и

$$\Phi_\lambda = J_{\bar{\lambda}_0}^{-1} \int_0^b \varphi^*(t, \bar{\lambda}_0) F^*(\lambda) \varphi(t, \lambda_0) dt,$$

где $F^*(\lambda)\varphi(t, \lambda_0)$ понимается как произведение двух операторов $\varphi(t, \lambda_0)$ и $F^*(\lambda)$, отображающих Н в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ соответственно.

Пусть теперь

$$v(\lambda) = J_{\lambda_0}^{-1/2}\Phi_\lambda^* J_{\bar{\lambda}_0}^{1/2}.$$

Тогда из соотношений

$$\| \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)\Phi_\lambda f \|_b = \| F^*(\lambda)\varphi(\cdot, \lambda) f \|_b \leqslant \| \varphi(\cdot, \lambda_0) f \|_b$$

вытекает, что

$$\| v^*(\lambda) f \|^2 = (v(\lambda)v^*(\lambda) f, f) \leqslant (f, f).$$

Отсюда следует, что $D(L_{F^*(\lambda)})$ состоит из элементов вида

$$y = u + \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda) J_{\lambda_0}^{1/2} f - \varphi(\cdot, \lambda_0) f, \tag{8'}$$

где $u \in D(L_0)$, f — произвольный элемент из Н, а $v(\lambda)$ — аналитическая операторная функция в Н с нормой, не превосходящей единицы.

Нетрудно показать, что и обратно, если $v(\lambda)$ обладает указанными свойствами, то формула (8′) задает область определения некоторого оператора $L_{F^*(\lambda)}$.

Используя (4) и (8′) и тот факт, что $L^*_{F(\lambda)} = L_{F^*(\lambda)} \subset L$ [18], получим, что $D(L_{F(\lambda)})$ *состоит из тех и только тех* $y(t) \in D(L)$, *которые удовлетворяют граничному условию*

$$\begin{gathered}[\varphi^*(b, \lambda_0) - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi^*(b, \bar{\lambda}_0)]\, y'(b) - [\varphi'^*(b, \lambda_0) - \\ - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi'^*(b, \bar{\lambda}_0)]\, y(b) = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

На основании сказанного выше и теоремы 1 получаем утверждение:

Теорема 2. *Область определения любого самосопряженного расширения оператора* L_0 *состоит из тех и только тех* $y(t) \in D$, *которые удовлетворяют граничному условию*

$$\begin{gathered}[\varphi^*(b, \lambda_0) - J_{\lambda_0}^{1/2} U J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi^*(b, \bar{\lambda}_0)]\, y'(b) - [\varphi'^*(b, \lambda_0) - \\ - J_{\lambda_0}^{1/2} U J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi'^*(b, \bar{\lambda}_0)]\, y(b) = 0,\end{gathered} \tag{9'}$$

где U *— некоторый унитарный оператор в* Н.

Обратно, множество тех $y(t) \in D$, *которые удовлетворяют* (9′), *определяет некоторое самосопряженное расширение оператора* L_0. *Более того, между множеством самосопряженных расширений оператора* L_0 *в* $\mathcal{H}(0, b)$ *и множеством всех унитарных операторов* U *в пространстве* Н *существует взаимно однозначное соответствие.*

Самосопряженное расширение оператора L_0, отвечающее оператору U, будем обозначать L_U.

Имеет место

Лемма 2.* *Если комплексное* λ *таково, что оператор* $(L_{F^*(\lambda)} - \bar{\lambda} I)^{-1}$ *существует во всем пространстве* $\mathcal{H}(0, b)$, *то во всем пространстве существует и оператор* $C_v^{-1}(\lambda)$, *где*

$$\begin{gathered}C_v(\lambda) = [\varphi^*(b, \lambda_0) - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi^*(b, \bar{\lambda}_0)]\, \varphi'(b, \lambda) - [\varphi'^*(b, \lambda_0) - \\ - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi^{*\prime}(b, \bar{\lambda}_0)]\, \varphi(b, \lambda).\end{gathered}$$

Доказательство. Пусть λ как в условии леммы. Это означает, что для любого $f(t) \in \mathcal{H}(0, b)$ существует решение уравнения

* Утверждение леммы 2 в частном случае было получено в [15].

$$-y'' + q(t)\,y - \bar{\lambda} y = f(t) \tag{10}$$

вида $y = u + \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda) J_{\lambda_0}^{1/2} f - \varphi(\cdot, \lambda_0) f$, $u \in D(L_0)$, $f \in \mathrm{H}$. Умножая скалярно справа (10) на $\varphi(t, \lambda)\, g\ (g \in \mathrm{H})$ и интегрируя по частям, получим, что

$$(f, C_v(\lambda)\, g) = \int_0^b (f(t), \varphi(t, \lambda) g)\, dt.$$

При $f(t) = \varphi(t, \lambda)\, g$ имеем

$$(f, C_v(\lambda)\, g) = (J_\lambda g, g),$$

откуда следует, что нуль не является собственным числом $C_v(\lambda)$. Кроме того, нуль не принадлежит также остаточному спектру $C_v(\lambda)$, ибо в противном случае нашлось бы $h \neq 0$ из H такое, что для произвольного $g \in \mathrm{H}$

$$(h, C_v(\lambda)\, g) = \int_0^b (\hat{h}(t), \varphi(t, \lambda)\, g) dt = 0, \tag{11}$$

где $\hat{h}(t) = -y'' + q(t)\, y - \bar{\lambda} y$, $y = u + \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda) J_{\lambda_0}^{1/2} h - \varphi(\cdot, \lambda_0)\, h$.

Но равенство (11) показывает, что $\hat{h}(t)$ ортогональна ко всему $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, а потому $\hat{h}(t) \in \mathfrak{R}(L_0 - \lambda I)$, что означает, что

$$[\varphi(b, \bar{\lambda}_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda) J_{\lambda_0}^{1/2} - \varphi(b, \lambda_0)]\, h = 0,$$

$$[\varphi'(b, \bar{\lambda}_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda) J_{\lambda_0}^{1/2} - \varphi'(b, \lambda_0)]\, h = 0.$$

Учитывая (4), придем к равенству

$$(\lambda - \bar{\lambda}_0) J_{\lambda_0} h = 0,$$

которое противоречит обратимости оператора J_{λ_0}.

Рассуждая подобным образом, можно также убедиться, что нуль не является точкой непрерывного спектра.

Лемма доказана.

Т е о р е м а 3. *Существует операторная функция* $M_v(\lambda)$ *в пространстве* H, *определенная и аналитическая в верхней полуплоскости, удовлетворяющая неравенству*

$$\mathrm{Im} M_v(\lambda) = \frac{M_v(\lambda) - M_v^*(\lambda)}{2i} \geqslant 0$$

и такая, что

$$\chi(t, \lambda) = \psi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda)\, M_v(\lambda)$$

удовлетворяет граничному условию (9).

Функция $M_v(\lambda)$ *единственным образом определяется функцией* $v(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что существует функция $M_v(\lambda)$ такая, что $\chi(t, \lambda) = \psi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda)\, M_v(\lambda)$ удовлетворяет условию (9). Тогда

$$C_v(\lambda)\, M_v(\lambda) = B_v(\lambda) = [\varphi^*(b, \lambda_0) - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi^*(b, \bar{\lambda}_0)]\, \psi'(b, \lambda) -$$

$$- [\varphi'^*(b, \lambda_0) - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \varphi'(b, \bar{\lambda}_0)]\, \psi(b, \lambda).$$

По теореме 1 ($\mathrm{Im}\lambda > 0$) $R_\lambda = (L_{F(\lambda)} - \lambda I)^{-1}$ существует во всем пространстве

$\mathcal{H}(0, b)$. Поэтому (лемма 2) во всем пространстве H существует также $C_v^{-1}(\lambda)$ и

$$M_v(\lambda) = C_v^{-1}(\lambda) B_v(\lambda), \tag{12}$$

что влечет аналитичность функции $M_v(\lambda)$ в верхней полуплоскости.

Простым подсчетом можно убедиться, что функция $\chi(t, \lambda) = \psi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda) C_v^{-1}(\lambda) B_v(\lambda)$ удовлетворяет (9). Тем самым первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Используя формулу (4), получаем, что

$$\chi^{*\prime}(b, \lambda)\chi(b, \lambda) - \chi^*(b, \lambda)\chi'(b, \lambda) = M_v^*(\lambda) - M_v(\lambda) + (\lambda - \bar{\lambda})\int_0^b \chi^*(t, \lambda)\chi(t, \lambda)\,dt = (\lambda - \bar{\lambda})\Big[M_v^*(\lambda) J_\lambda M_v(\lambda) - M_v^*(\lambda)\Big(-\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} I + J_\lambda(\varphi, \psi)\Big) - \Big(-\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} I + J_\lambda(\varphi, \psi)\Big)^* M_v(\lambda) + J_\lambda(\varphi, \psi)\Big], \text{ где } J_\lambda(\varphi, \psi) = \int_0^b \varphi^*(t, \lambda)\psi(t, \lambda)\,dt. \tag{13}$$

Пусть $\lambda = \lambda_0$. Тогда, исходя из (12), после элементарных преобразований имеем:

$$M_v^*(\lambda_0) J_{\lambda_0} M_v(\lambda_0) - M_v^*(\lambda_0)\Big[J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \frac{I}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\Big] - \Big[J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \frac{I}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\Big] M_v(\lambda_0) - J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda_0) v(\lambda_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} + \Big[J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \frac{I}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\Big]^* J_{\lambda_0}^{-1}\Big[J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \frac{I}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\Big] = 0. \tag{14}$$

Если в граничном условии (9′) выбрать U так, чтобы оператор L_U задавался граничным условием

$$y'(b) - By(b) = 0,$$

где B — ограниченный самосопряженный оператор в H, то левая часть в (13) обращается в нуль. Если после этого в (13) и (14) взять в качестве $M_v(\lambda)$ $M_u(\lambda)$ и сложить эти равенства, то получим, что

$$J_{\lambda_0}(\psi, \psi) = \Big[J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \frac{I}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\Big]^* J_{\lambda_0}^{-1}\Big[J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \frac{I}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\Big] - J_{\bar{\lambda}_0}^{-1}. \tag{15}$$

Благодаря (15)

$$\chi'^*(b, \lambda_0)\chi(b, \lambda_0) - \chi^*(b, \lambda_0)\chi'(b, \lambda_0) = (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)[J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda_0) v(\lambda_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} - J_{\bar{\lambda}_0}^{-1}].$$

Используя теперь первую часть равенства (13), придем к тому, что

$$\frac{M_v(\lambda_0) - M_v^*(\lambda_0)}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0} = [J_{\bar{\lambda}_0}^{-1} - J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} v^*(\lambda_0) v(\lambda_0) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2}] + \int_0^b [\psi(t, \lambda_0) - \varphi(t, \lambda_0) M_v(\lambda_0)]^* [\psi(t, \lambda_0) - \varphi(t, \lambda_0) M_v(\lambda_0)]\,dt, \tag{16}$$

откуда

$$\frac{M_v(\lambda_0) - M_v^*(\lambda_0)}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0} \geqslant \int_0^b [\psi(t, \lambda_0) - \varphi(t, \lambda_0) M_v(\lambda_0)]^* [\psi(t, \lambda_0) - \varphi(t, \lambda_0) M_v(\lambda_0)]\,dt \geqslant 0. \tag{17}$$

Так как λ_0 в теореме 1 — произвольная точка верхней полуплоскости и утверждение этой теоремы является необходимым и достаточным, то неравенство (17) с заменой λ_0 на λ также верно.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 видно, что если $\chi(t, \lambda)$ удовлетворяет граничному условию (9′) с некоторым унитарным оператором U, то функция $M_v(\lambda)$ аналитическая на резольвентном множестве оператора L_u, и первое из неравенств (17) превращается в равенство.

Обозначим

$$G_v(t, s, \lambda) = \begin{cases} \varphi(t, \lambda)\,\chi^*(s, \bar\lambda), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \\ \chi(t, \lambda)\,\varphi^*(s, \bar\lambda), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

где $\chi(s, \lambda) = \psi(s, \lambda) - \varphi(s, \lambda) M_v(\lambda)$. Можно показать, что $G_v(t, s, \lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) $G_v(t, s, \lambda)$ при фиксированных $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant b$ является аналитической функцией от λ в верхней полуплоскости;

2) при фиксированном λ $G_v(t, s, \lambda)$ $(0 \leqslant t, s \leqslant b)$ — непрерывная функция по совокупности аргументов t, s;

3) при фиксированном $0 \leqslant s \leqslant b$ функция $G_v(t, s, \lambda)$ имеет непрерывную производную по t в каждом из интервалов $[0, s)$ и $(s, b]$, причем при $t = s$ производная имеет скачок

$$\frac{\partial G_v(s+0, s, \lambda)}{\partial t} - \frac{\partial G_v(s-0, s, \lambda)}{\partial t} = I\,;$$

4) в каждом из интервалов $[0, s)$ и $(s, b]$ функция $G_v(t, s, \lambda)$ как функция t удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2) и (9).

Исходя из свойств 1) — 4), легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4. *Всякая обобщенная резольвента $R_v(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\lambda > 0)$ оператора L_0 представима в виде*

$$R_v(\lambda)\,y = (L_{F(\lambda)} - \lambda I)^{-1} y = -\int_0^b G_v(\cdot, s, \lambda)\,y(s)\,ds\,, \tag{18}$$

где $y(t) \in \mathcal{H}(0, b)$.

Теорема 5. *Функция $M_v(\lambda)$ представима в виде*

$$M_v(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_v(\mu)}{\mu - \lambda}\,, \tag{19}$$

где $\varrho_v(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$ — *операторная функция в* H *такая, что* $(\varrho_v(\mu) f, f)$ $(f \in \mathrm{H})$ — *неубывающая функция и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\varrho_v(\mu) f, f)}{1 + |\mu|} < \infty\,.$$

Доказательство. Сперва предположим, что $b > 0$ достаточно мало. Тогда можно показать, что самосопряженное расширение $\widetilde{L}$ оператора L_0, задаваемое граничным условием $y(b) = 0$, положительно. Пользуясь теоремой 4, легко убедиться, что

$$(M_v(\lambda) f, f) = \lim_{n\to\infty} (R_v(\lambda) u_n, u_n) \qquad (\lambda \in (0, \infty)), \tag{20}$$

где

$$u_n(t) = \begin{cases} nf, & 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Беря $v(\lambda) = U$ таким, что $L_U = \widetilde{L}$, получаем, что функция $(R_u(\lambda)\, u_n, u_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определена и аналитична при всех $\lambda \overline{\in} (0, \infty)$, принимает неотрицательные значения при отрицательных λ и отображает верхнюю полуплоскость в себя. Функции, обладающие такими свойствами, будем называть S-функциями.

Равенство (20) показывает, что $(M_u(\lambda) f, f)$ является также S-функцией. Поэтому [10]

$$(M_u(\lambda) f, f) = \gamma_f + \int_0^\infty \frac{d\varrho_{f,U}(\mu)}{\mu - \lambda} \quad \left(\int_0^\infty \frac{d\varrho_{f,U}(\mu)}{1+\mu} < \infty \right),$$

где $\gamma_f \geqslant 0$, $\varrho_{f,U}(\mu)$ $(0 \leqslant \mu < \infty)$ — неубывающая функция, однозначно определяющаяся по $(M_U(\lambda) f, f)$. Пользуясь соотношениями [15]

$$\varphi(t, \lambda) = I \cos \sqrt{\lambda}\, t + \int_0^t K(t, s) \cos \sqrt{\lambda}\, s\, ds,$$

$$I \cos \sqrt{\lambda}\, t = I\varphi(t, \lambda) - \int_0^t \mathcal{H}(t, s)\, \varphi(s, \lambda)\, ds, \tag{21}$$

$$\psi(t, \lambda) = \frac{I \sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^t P(t, s) \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, s}{\sqrt{\lambda}}\, ds,$$

где $K(t, s)$, $\mathcal{H}(t, s)$ и $P(t, s)$ — непрерывные оператор-функции от t и s, равные нулю при $s > t$, равенством

$$(M_U(\lambda) f, f) = (\varphi^{-1}(b, \lambda)\, \psi(b, \lambda) f, f)$$

и малостью b, нетрудно показать, что

$$\lim_{\tau \to \infty} (M_U(i\tau) f, f) = 0,$$

откуда следует, что $\gamma_f = 0$ при любом $f \in \mathrm{H}$ и

$$M_U(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\varrho_U(\mu)}{\mu - \lambda} \quad \left(\int_0^\infty \frac{d\varrho_U(\mu)}{1+\mu} < \infty \right). \tag{22}$$

Пусть теперь $v(\lambda)$ произвольно. Пользуясь определением $M_v(\lambda)$, получим, что

$$M_v(\lambda) = \frac{J_\lambda^{-1}}{\bar{\lambda} - \lambda} + J_\lambda^{-1} J_\lambda(\varphi, \psi) + \frac{J_\lambda^{-1/2}\, \widetilde{v}(\lambda)\, J_{\bar{\lambda}}^{-1/2}}{\lambda - \bar{\lambda}},$$

где $\widetilde{v}(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\lambda > 0)$ — оператор в H с нормой, не превосходящей единицы. Отсюда

$$M_v(\lambda) - M_U(\lambda) = J_\lambda^{-1/2} (\widetilde{v}(\lambda) - \widetilde{u}(\lambda)) \frac{J_{\bar{\lambda}}^{-1/2}}{\lambda - \bar{\lambda}}. \tag{23}$$

Воспользуемся далее следующим фактом [6]: необходимым и достаточным условием для представления аналитической в верхней полуплоскости функции $\Phi(\lambda)$, $\operatorname{Im}\Phi(\lambda) > 0$, в виде

$$\Phi(\lambda) = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu-\lambda} \quad (\operatorname{Jm}\lambda > 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{1+|\mu|} < \infty$$

с неубывающей функцией $\varrho(\mu)$ является сходимость $\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\Phi(i\eta)}{\eta} d\eta$. На основании (21) $\|J_{i\eta}^{-1}\| \leqslant C\,(\eta > 0,\ C = \mathrm{const})$. Используя теперь (22), (23) и сформулированный факт, устанавливаем справедливость теоремы при достаточно малом b.

Остается рассмотреть случай произвольного b. Так как при $b_1 < b$ обобщенная резольвента $R_v(\lambda)$ оператора L_0 в пространстве $\mathcal{H}(0, b)$ является также обобщенной резольвентой L_0 в $\mathcal{H}(0, b_1)$, то приходим к полному доказательству теоремы.

3°. Введем φ-преобразование $\mathrm{E}_y(\lambda)$ функции $y(t) \in \mathcal{H}(0, b)$ следующим образом:

$$\mathrm{E}_y(\lambda) = \int_0^b \varphi^*(t, \bar\lambda)\, y(t)\, dt.$$

Из (21) следует, что

$$\mathrm{E}_y(\lambda) = \int_0^b \varphi^*(t, \bar\lambda)\, y(t)\, dt = \int_0^b \cos\sqrt{\lambda}\, t\, y_1(t)\, dt, \tag{24}$$

где

$$y_1(t) = y(t) + \int_t^b K^*(s, t)\, y(s)\, ds,$$

откуда видно, что φ-преобразование функции $y(t)$ является в то же время косинус-преобразованием функции $y_1(t)$. Так как уравнение (24) однозначно разрешимо относительно $y(t)$ методом последовательных приближений, то косинус-преобразование векторной функции является одновременно φ-преобразованием некоторой другой функции.

Пусть $C^0(\mathrm{H}, (0, b))$ — совокупность всех непрерывных вектор-функций, линейная оболочка области значений которых является конечномерным подпространством из H (для каждой функции это подпространство имеет свою размерность), а $\widetilde{C^0}(\mathrm{H}, (0, b))$ — множество функций $y(t) \in \mathcal{H}(0, b)$ таких, что функции $y_1(t)$, определяемые равенством (24), принадлежат $C^0(\mathrm{H}, (0, b))$. Легко убедиться, что $\widetilde{C^0}(H, (0, b))$ плотно в $\mathcal{H}(0, b)$, и если $y \in \widetilde{C^0}(\mathrm{H}, (0, b))$, то линейная оболочка значений $\mathrm{E}_y(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ образует конечномерное подпространство.

Нам понадобится еще одно известное понятие пространства $L_2(\mathrm{H}, d\varrho(\lambda))$. Пусть $\varrho(\lambda)$, $\varrho(\lambda - 0) = \varrho(\lambda)$, — операторная функция распределения, т. е. $\varrho(\Delta) = \varrho(\lambda + \Delta) - \varrho(\lambda)$ — положительный оператор в H. Обозначим $C^0(\mathrm{H}, (-\infty, \infty))$ совокупность всех непрерывных финитных вектор-функций, линейная оболочка области значений которых является конечномерным пространством. Зададим в $C^0(\mathrm{H}, (-\infty, \infty))$ скалярное произведение

$$(u(t), v(t))_{L_2(\mathrm{H}, d\varrho(\lambda))} = \int_{-\infty}^{\infty} (d\varrho(\lambda)\, u(\lambda), v(\lambda)). \tag{25}$$

Интеграл справа понимается как предел сумм типа Римана — Стильтьеса, не зависящий от разбиения интервала $(-\infty, \infty)$ и выбора точек λ_i:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (d\varrho(\lambda)\, u(\lambda), v(\lambda)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} (\varrho(\Delta_j)\, u(\lambda_j), v(\lambda_j)).$$

После обычного отождествления в $C^0(\mathrm{H}, (-\infty, \infty))$, а затем пополнения по метрике, определяемой скалярным произведением (25), получим гильбертово пространство $L_2(\mathrm{H}, d\varrho(\lambda))$.

Операторная функция распределения $\varrho(\lambda)$ называется спектральной функцией задачи (1) — (2), если для любых $y(t), z(t) \in \mathcal{H}(0, b)$

$$\int_0^b (y(t), z(t))\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (d\varrho(\lambda)\, \mathrm{E}_y(\lambda), \mathrm{E}_z(\lambda)). \tag{26}$$

Т е о р е м а 6. *Совокупность всех спектральных функций задачи* (1) — (2) *совпадает с множеством всех операторных функций распределения* $\varrho_v(\mu)$ *в представлении* (19), *где* $v(\lambda)$ *пробегает все аналитические операторные функции в* H, *заданные в верхней полуплоскости, с нормой, не превышающей единицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda},$$

где $\sigma(\mu)$ — функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале, а $\varphi(\lambda)$ — аналитическая функция в замкнутом интервале $\Delta = (\xi, \eta)$. Обозначим Δ_ε $(\varepsilon > 0)$ разорванный путь, состоящий из направленного отрезка $(\xi + i\varepsilon, \eta + i\varepsilon)$ и антипараллельного отрезка $(\eta - i\varepsilon, \xi - i\varepsilon)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} \varphi(\lambda) F(\lambda)\, d\lambda = \int_\xi^\eta \varphi(\mu)\, d\sigma(\mu). \tag{27}$$

Это есть обобщение формулы обращения Стильтьеса [8].

Пусть теперь $y(t), z(t) \in \widetilde{C}^0(\mathrm{H}, (0, b))$ и $E_v(\lambda)$ — обобщенное разложение единицы, отвечающее обобщенной резольвенте $R_v(\lambda)$. Имеем:

$$(R_v(\lambda) y, z)_b = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_v(\mu) y, z)_b}{\mu - \lambda}.$$

Из (27) и теоремы 4 получаем, что для произвольного интервала $\Delta = (\xi, \eta)$

$$(E_v(\Delta) y, z)_b = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} (R_v(\lambda) y, z)_b\, d\lambda =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} d\lambda \int_0^b \int_0^b (G_v(t, s, \lambda)\, y(s), z(t))\, dt ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} (M_v(\lambda)\, \mathrm{E}_y(\lambda), \mathrm{E}_z(\bar{\lambda}))\, d\lambda.$$

Так как $y, z \in \widetilde{C}^0(\mathrm{H}, (0, b))$, то $\mathrm{E}_y(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{E}_y)_i(\lambda)\, e_i$, $\mathrm{E}_z(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{E}_z)_i(\lambda)\, e_i$ (m конечно), $e_i \in \mathrm{H}$, и

$$(\mathrm{E}_v(\Delta)\, y, z)_b = \int_\Delta \sum_{i,j=1}^{m} (\mathrm{E}_y)_i(\lambda)\, \overline{(\mathrm{E}_z)_j(\lambda)}\, (d\varrho_v(\lambda)\, e_i, e_j) =$$

$$= \int_\Delta (d\varrho_v(\lambda)\, \mathrm{E}_y(\lambda), \mathrm{E}_z(\lambda)). \tag{28}$$

Устремляя $\xi \to -\infty$, $\eta \to \infty$ и учитывая плотность $\widetilde{C}^0(\mathrm{H}, (0, b))$ в $\mathcal{H}(0, b)$, получаем утверждение теоремы в одну сторону. Кроме того, формула (28) показывает, что каждому разложению единицы оператора L_0 соответствует единственная операторная функция распределения $\varrho_v(\lambda)$ в представлении (19).

Пусть теперь $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция задачи (1) — (2). Тогда по формуле

$$(E_\Delta y, z) = \int_\Delta (d\sigma(\lambda)\, \mathrm{E}_y(\lambda), \mathrm{E}_z(\lambda))$$

$\sigma(\lambda)$ порождает некоторое разложение единицы $E(\Delta)$ оператора L_0. Но по доказанному для $E(\Delta)$ существует $\varrho_v(\lambda)$ такое, что имеет место равенство (28).

В силу единственности представления (28) получаем, что $\sigma(\lambda) = \varrho_v(\lambda)$. Теорема доказана.

Спектральная функция задачи (1) — (2) называется ортогональной, если изометрическое отображение $y \to \mathrm{E}_y(\lambda)$ из $\mathcal{H}(0, b)$ в $L_2(\mathrm{H}, d\,\varrho(\lambda))$ унитарно.

Используя теоремы 2, 3 и 4 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7. *Спектральная функция $\varrho_v(\lambda)$ задачи (1) — (2) тогда и только тогда ортогональна, когда функция $U = v(\lambda)$ является унитарным оператором в H.*

Из всего сказанного вытекает, что в случае конечного интервала множество всех спектральных функций задачи (1) — (2) является бесконечным и его описание сводится к описанию всех функций $M_v(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\lambda > 0)$, являющихся преобразованиями Стильтьеса спектральных функций. Но для $M_v(\lambda)$, как нетрудно убедиться, имеют место следующие формулы:

$$\left[\int_0^b \varphi^*(t, \lambda_0)\, \varphi(t, \lambda)\, dt - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \int_0^b \varphi^*(t, \bar{\lambda}_0)\, \varphi(t, \lambda)\, dt\right] \times$$

$$\times M_v(\lambda) = \int_0^b \varphi^*(t, \lambda_0)\, \psi(t, \lambda)\, dt - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\bar{\lambda}_0 - \lambda} J_{\lambda}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2} \times$$

$$\times \int_0^b \varphi^*(t, \bar{\lambda}_0)\, \psi(t, \lambda)\, dt - \frac{I - J_{\lambda_0}^{1/2} v(\lambda) J_{\bar{\lambda}_0}^{-1/2}}{\bar{\lambda}_0 - \lambda}, \tag{29}$$

причем последнее уравнение разрешимо относительно $M_v(\lambda)$.

Пусть теперь $V(t, s) = \psi(t, \lambda_0)\, \varphi^*(s, \bar{\lambda}_0) - \varphi(t, \lambda_0)\, \psi^*(s, \bar{\lambda}_0)$. Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned} \varphi(t, \lambda) &= \varphi(t, \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0) \int_0^t V(t, s)\, \varphi(s, \lambda)\, ds, \\ \psi(t, \lambda) &= \psi(t, \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0) \int_0^t V(t, s)\, \psi(s, \lambda)\, ds. \end{aligned} \tag{30}$$

Пользуясь (30), запишем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\varphi(t,\lambda)=\varphi(t,\lambda_0)D_1(t,\lambda)+\psi(t,\lambda_0)D_0(t,\lambda),\\ \psi(t,\lambda)=\varphi(t,\lambda_0)E_1(t,\lambda)+\psi(t,\lambda_0)E_0(t,\lambda),\\ \varphi'(t,\lambda)=\varphi'(t,\lambda_0)D_1(t,\lambda)+\psi'(t,\lambda_0)D_0(t,\lambda),\\ \psi'(t,\lambda)=\varphi'(t,\lambda_0)E_1(t,\lambda)+\psi'(t,\lambda_0)E_0(t,\lambda),\end{gathered}\tag{31}$$

где

$$D_0(t,\lambda)=(\lambda_0-\lambda)\int_0^t\varphi^*(s,\bar\lambda_0)\varphi(s,\lambda)\,ds,$$

$$D_1(t,\lambda)=1+(\lambda_0-\lambda)\int_0^t\psi^*(s,\bar\lambda_0)\varphi(s,\lambda)\,ds,$$

$$E_0(t,\lambda)=1-(\lambda_0-\lambda)\int_0^t\varphi^*(s,\bar\lambda_0)\psi(s,\lambda)\,ds,$$

$$E_1(t,\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\int_0^t\psi^*(s,\bar\lambda_0)\psi(s,\lambda)\,ds.$$

Подставляя (31) в (12), получим

$$\left\{D_1(b,\lambda)+\left[\frac{J_{\bar\lambda_0}^{-1}}{\bar\lambda_0-\lambda_0}+\left(J_{\bar\lambda_0}^{-1}J_{\lambda_0}(\varphi,\psi)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{J_{\bar\lambda_0}^{-1/2}v(\lambda)J_{\bar\lambda_0}^{-1/2}}{\bar\lambda_0-\lambda_0}\right)\right]D_0(b,\lambda)\right\}M_v(\lambda)=E_1(b,\lambda)+$$

$$+\left[\frac{J_{\bar\lambda_0}^{-1}}{\bar\lambda_0-\lambda_0}+J_{\bar\lambda_0}^{-1}J_{\lambda_0}(\varphi,\psi)-\frac{J_{\bar\lambda_0}^{-1/2}v(\lambda)J_{\bar\lambda_0}^{-1/2}}{\bar\lambda_0-\lambda_0}\right]E_0(b,\lambda).\tag{32}$$

Из разрешимости уравнения (29) относительно $M_v(\lambda)$ заключаем, что уравнение (32) также разрешимо относительно $M_v(\lambda)$. Уравнения (29) и (32) могут служить эффективными формулами для нахождения спектральных функций задачи (1)—(2). Беря в качестве $v(\lambda)$ различные аналитические в верхней полуплоскости операторные функции в H, найдем все $M_v(\lambda)$, а тем самым и все спектральные функции задачи (1) — (2). Для нахождения тех $M_v(\lambda)$, которые соответствуют ортогональным спектральным функциям, нужно в (29) и (32) положить $v(\lambda)=U$ (U — произвольный унитарный оператор в H). В этом случае (29) и (32) принимают простой вид:

$$[D_1(b,\lambda)+M_U(\lambda_0)D_0(b,\lambda)]M_U(\lambda)=E_1(b,\lambda)+M_U(\lambda_0)E_0(b,\lambda).$$

Кроме того, (29) и (32) показывают, что $M_U(\lambda)$ при каждом $\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda\neq0)$ заполняют некоторую операторную окружность [3], когда $\varrho_U(\lambda)$ пробегают все ортогональные спектральные функции задачи (1) — (2).

4°. Рассмотрим теперь случай бесконечного интервала ($b=\infty$). Обозначим $J_{\lambda,\beta}=\int_0^\beta\varphi^*(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)\,dt$ $(0<\beta<\infty)$. Если $\beta_1<\beta_2$, то $0\leqslant J_{\lambda,\beta_1}\leqslant\leqslant J_{\lambda,\beta_2}$ и на основании [2, 3] $J_{\lambda,\beta_1}^{-1}>J_{\lambda,\beta_2}^{-1}$, т. е. $J_{\lambda,\beta}^{-1}$ $(0<\beta<\infty)$ образует монотонно убывающую последовательность положительных операторов в H. Эта последовательность, как известно, сходится к некоторому положительному оператору Γ_λ.

Т е о р е м а 8. *Размерность ортогонального дополнения к многообразию нулей оператора* Γ_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) *совпадает с размерностью дефектного подпространства* $\mathfrak{N}_\lambda$ *оператора* L_0, *а значит одинакова для всех* λ *из связной компоненты поля регулярности оператора* L_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим H_λ^0 многообразие нулей оператора Γ_λ. Тогда $\mathrm{H} = \overline{\mathfrak{R}(\Gamma_\lambda)} \oplus \mathrm{H}_\lambda^0$. Так как для любого $g \in \mathrm{H}$ $\| \Gamma_\lambda^{1/2} g \| \leqslant \| J_{\lambda,\beta}^{-1/2} g \|$, то, полагая $g = J_{\lambda,\beta}^{1/2} h$, $h \in \mathrm{H}$, получаем:

$$\| \Gamma_\lambda^{1/2} J_{\lambda,\beta}^{1/2} h \| \leqslant \| J_{\lambda,\beta}^{-1/2} J_{\lambda,\beta}^{1/2} h \| = \| h \|,$$

откуда

$$\Gamma_\lambda^{1/2} J_{\lambda,\beta} \Gamma_\lambda^{1/2} = \Gamma_\lambda^{1/2} J_{\lambda,\beta}^{1/2} (\Gamma_\lambda^{1/2} J_{\lambda,\beta}^{1/2})^* \leqslant I.$$

Из этого следует, что для $f \in \mathfrak{R}(\Gamma_\lambda)$ $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) f \|^2 dt < \infty$, т. е. $\varphi(t, \lambda) f \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Поэтому $\dim \mathfrak{R}(\Gamma_\lambda) = \dim \mathrm{H}_\lambda^{0\perp} \leqslant \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, и если $\dim \mathfrak{R}(\Gamma_\lambda) = \infty$, то теорема доказана.

Пусть $\dim \mathfrak{R}(\Gamma_\lambda) = m < \infty$ и допустим, что в этом случае $m < \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Тогда найдется по крайней мере $m + 1$ линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_{m+1} \in \mathrm{H}$ таких, что $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{R}(\Gamma_\lambda)$ и $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) f_i \|^2 dt < \infty$; $i = 1, \ldots, m + 1$. Но

$$f_{m+1} = \sum_{i=1}^m c_i f_i + f^0, \qquad f^0 \in \mathrm{H}_\lambda^0,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) f^0 \|^2 dt < \infty.$$

Последнее же соотношение невозможно, так как для произвольного $f \in \mathrm{H}_\lambda^0$, $f \neq 0$ $\lim\limits_{\beta\to\infty} (J_{\lambda,\beta} f, f) = \infty$, ибо в противном случае $\| J_{\lambda,\beta}^{1/2} f \|^2 < \infty$ и

$$(f, f) = \lim_{\beta\to\infty} (J_{\lambda,\beta}^{1/2} f, J_{\lambda,\beta}^{-1/2} f) = 0.$$

Т е о р е м а 9. *Для каждого* λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) *существует операторное решение* $\chi(t, \lambda)$ *уравнения* (1) *такое, что*

$$\int\limits_0^\infty \| \chi(t, \lambda) f \|^2 dt < \infty,$$

f — *произвольный вектор из* H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K_\beta(\lambda)$ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $0 < \beta < \infty$) — множество всех операторов M в H, удовлетворяющих условию

$$\frac{M - M^*}{\lambda - \bar\lambda} \geqslant \int\limits_0^\beta (\psi^*(t, \lambda) - M^* \varphi^*(t, \lambda)) (\psi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda) M)\, dt. \tag{33}$$

Как показывает (17), такое множество непусто.

Покажем, что $K_\beta(\lambda)$ ограничено. В самом деле, обозначая $A_\beta = \int\limits_0^\beta \varphi^*(t, \lambda) \psi(t, \lambda)\, dt + \frac{I}{\bar\lambda - \lambda}$ и учитывая обратимость $J_{\lambda,\beta}$, из (33) для

любого $f \in H$ получаем: $2\|A_\beta\|\|f\|\|Mf\| \geqslant \gamma\|Mf\|^2$, где $\gamma = \inf\limits_{f\in H} \frac{(J_{\lambda,\beta}f, f)}{(f, f)}$.
Отсюда и следует, что

$$\|Mf\| \leqslant \frac{2\|A_\beta\|}{\gamma}\|f\|. \tag{34}$$

Легко убедиться далее, что если $\beta_1 > \beta_2$, то $K_{\beta_1}(\lambda) \subset K_{\beta_2}(\lambda)$.

Докажем теперь, что множество $K_\beta(\lambda)$ замкнуто в слабой операторной топологии. Пусть $\chi_M(t, \lambda) = \psi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda) M$, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ $(0 < N \leqslant \infty)$ — ортонормированный базис в H. Тогда

$$\|\chi_M(t, \lambda) f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(\chi_M(t, \lambda) f, e_k)|^2.$$

Если обозначить $K_\beta^m(\lambda)$ множество всех операторов из H, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{M - M^*}{\lambda - \bar\lambda} f, f\right) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_0^\beta |(\chi_M(t, \lambda) f, e_k)|^2\, dt,$$

то нетрудно показать, что $K_\beta(\lambda) = \prod\limits_{m=1}^{N} K_\beta^m(\lambda)$. Поэтому для доказательства замкнутости $K_\beta(\lambda)$ достаточно показать замкнутость $K_\beta^m(\lambda)$ в слабой топологии при любом m. Предположим, что последовательность $M_n \in K_\beta^m(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. такая, что

$$\left(\frac{M_n - M_n^*}{\lambda - \bar\lambda} f, f\right) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_0^\beta |(\chi_{M_n}(t, \lambda) f, e_k)|^2\, dt. \tag{34'}$$

слабо сходится к M. Нужно доказать, что равенство (34′) имеет место и для M.

Легко убедиться, что последовательности функций $(\chi_{M_n}(t, \lambda) f, e_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ сходятся при каждом t к функциям $(\chi_M(t, \lambda) f, e_k)$ и $|(\chi_{M_n}(t, \lambda) f, e_k)| \leqslant C\|f\|\|e_k\|$. Поэтому, переходя к пределу в (34′) при $n \to \infty$, получим, что $M \in K_\beta^m(\lambda)$, что и требовалось.

Итак, мы получили совокупность вложенных друг в друга $(K_{\beta_1} \supset K_{\beta_2}$ при $\beta_1 < \beta_2)$ замкнутых в слабой топологии ограниченных множеств $K_\beta(\lambda)$ $(0 < \beta < \infty)$. В силу бикомпактности ограниченного множества в слабой операторной топологии множество

$$K(\lambda) = \prod_{0<\beta<\infty} K_\beta(\lambda)$$

непусто [20], а это означает, что если $M \in K(\lambda)$, то

$$\frac{M - M^*}{\lambda - \bar\lambda} \geqslant \int_0^\infty \chi_M^*(t, \lambda)\, \chi_M(t, \lambda)\, dt.$$

Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть E_λ — разложение единицы оператора L_0 в $\mathscr{H}(0, \infty)$. Тогда существует единственная операторная функция распределе-*

ния $\varrho(\lambda)$ *в* H *такая, что для любых финитных вектор-функций* $u, v \in \mathscr{H}(0, \infty)$ *справедливо равенство*

$$(E_\Delta u, v)_\infty = \int_\Delta (d\varrho(\lambda)\, \mathrm{E}_u(\lambda),\ \mathrm{E}_v(\lambda)), \tag{35}$$

где Δ — *произвольный интервал вещественной оси, а*

$$\mathrm{E}_u(\lambda) = \int_0^\infty \varphi^*(t, \lambda)\, u(t)\, dt.$$

Доказательство. Для произвольного $0 < \beta < \infty$ пространство $\mathscr{H}(0, \beta)$ можно рассматривать как подпространство из $\mathscr{H}(0, \infty)$, если функции из $\mathscr{H}(0, \beta)$ продолжить нулем на $\mathscr{H}(0, \infty)$. Обозначим P_β оператор ортогонального проектирования $\mathscr{H}(0, \infty)$ на $\mathscr{H}(0, \beta)$. Тогда $P_\beta E_\lambda$ — разложение единицы оператора L_0 в $\mathscr{H}(0, \beta)$. В силу теоремы 6 существует такая операторная функция распределения $\varrho_\beta(\lambda)$, что для $u, v \in \mathscr{H}(0, \beta)$

$$(P_\beta E_\Delta u, v)_\beta = (E_\Delta u, v)_\beta = \int_\Delta (d\varrho_\beta(\lambda)\, \mathrm{E}_u(\lambda), \mathrm{E}_v(\lambda)).$$

Из последнего равенства и того, что при $\beta_1 < \beta_2$ $\mathscr{H}(0, \beta_1) \subset \mathscr{H}(0, \beta_2)$, следует, что функция $\varrho_\beta(\lambda) = \varrho(\lambda)$ не зависит от β. Переходя в этом равенстве к пределу при $\beta \to \infty$, получаем утверждение теоремы, причем единственность функции $\varrho(\lambda)$ следует из того, что интервал Δ в (35) произвольный.

Если в качестве Δ взять $(-\infty, \infty)$, то для любых финитных вектор-функций $u, v \in \mathscr{H}(0, \infty)$

$$(u, v)_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} (d\varrho(\lambda)\, \mathrm{E}_u(\lambda),\ \mathrm{E}_v(\lambda)). \tag{36}$$

Функцию $\varrho(\lambda)$, как и в п. 3, будем называть операторной спектральной функцией задачи (1) — (2) в $(0, \infty)$. Теорема 10 показывает, что каждому разложению единицы оператора L_0 в $\mathscr{H}(0, \infty)$ отвечает единственная спектральная функция $\varrho(\lambda)$. Обратно, если $\varrho(\lambda)$ — операторная спектральная функция задачи (1) — (2) в $(0, \infty)$, то легко убедиться, что она порождает некоторое разложение единицы оператора L_0 в $\mathscr{H}(0, \infty)$ по формуле $(E_\Delta u, v) = \int_\Delta (d\varrho(\lambda)\, \mathrm{E}_u(\lambda),\ \mathrm{E}_v(\lambda))$. Поэтому *задача* (1) — (2) *в* $(0, \infty)$ *имеет единственную спектральную функцию тогда и только тогда, когда оператор* L_0 *в* $\mathscr{H}(0, \infty)$ *максимален.*

Из леммы 1 вытекает, что задача (1) — (2) имеет единственную спектральную функцию тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) f \|^2\, dt = \infty \tag{37}$$

для любого $f \in$ H и всех λ из верхней (нижней) полуплоскости.

Случай, когда задача (1) — (2) в $(0, \infty)$ имеет единственную спектральную функцию, будем называть определенным. Как показано в [16], если $q(t)$ в уравнении (1) таково, что

$$\int_0^\infty \| q(t) \|\, dt < \infty,$$

то имеет место определенный случай.

Теорема 11. *В определенном случае существует единственная операторная функция $M(\lambda)$ в H, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости такая, что*

$$\int_0^\infty (\psi^*(t,\lambda) - M^*(\lambda)\varphi^*(t,\lambda))(\psi(t,\lambda) - \varphi(t,\lambda)M(\lambda))\,dt < \infty\cdot I \tag{38}$$

и

$$M(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu-\lambda},$$

где $\varrho(\mu)$ — спектральная функция задачи (1) — (2) *в* $(0,\infty)$.

Доказательство. Если $\varrho(\mu)$ — спектральная функция задачи (1) — (2) в $(0,\infty)$, то легко видеть, что она является также спектральной функцией этой же задачи на любом конечном интервале $(0,\beta)$. На основании теоремы 6 существует функция $M_\beta(\lambda) = M(\lambda)$, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости и такая, что

$$M(\lambda) = M_\beta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu-\lambda},$$

$$\frac{M(\lambda) - M^*(\lambda)}{\lambda-\bar\lambda} \geqslant \int_0^\beta (\psi^*(t,\lambda) - M^*(\lambda)\varphi^*(t,\lambda))(\psi(t,\lambda) - \varphi(t,\lambda)M(\lambda))\,dt.$$

Переходя к пределу при $\beta\to\infty$, получаем, что $M(\lambda)$ удовлетворяет (38). Так как имеет место определенный случай, то соотношение (37) выполняется для всех λ из верхней (нижней) полуплоскости. Тогда функция $M(\lambda)$, удовлетворяющая (38), определяется единственным образом при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$. В противном случае при некотором λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0\,(\operatorname{Im}\lambda < 0)$ существовало бы два оператора $M_1(\lambda) \neq M_2(\lambda)$ такие, что для всех $f\in H$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(t,\lambda)(M_1(\lambda) - M_2(\lambda)f)\|^2\,dt < \infty,$$

что противоречит (37). Теорема доказана.

Будем говорить, что имеет место абсолютно неопределенный случай, если для каждой конечной области G комплексной плоскости существует постоянная C_G такая, что

$$\int_0^\infty \|\varphi(t,\lambda)f\|^2\,dt \leqslant C_G\|f\|^2, \qquad \lambda\in G, \qquad f\in H.$$

В этом случае индекс дефекта оператора L_0 равен (∞,∞).

В абсолютно неопределенном случае оператор Γ_λ обратим при любом λ и $\Gamma_\lambda^{-1} = J_\lambda$, где

$$J_\lambda = \int_0^\infty \varphi^*(t,\lambda)\,\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

Действительно, так как при любом $\beta > 0$ $J_{\lambda,\beta} \leqslant C_G I$, то $J_{\lambda,\beta}^{-1} \geqslant \frac{1}{C_G} I$, а значит, и $\Gamma_\lambda \geqslant \frac{1}{C_G} I$, т. е. Γ_λ обратим. Из равенства

$$(\Gamma_\lambda J_\lambda f, g) = \lim_{\beta\to\infty} (J_{\lambda,\beta}^{-1} J_{\lambda,\beta} f, g) = (f, g)$$

для любых $f, g \in \mathrm{H}$ следует, что $J_\lambda = \Gamma_\lambda^{-1}$.

Легко убедиться, что и обратно, если Γ_λ обратим в H и *для любого* λ *из произвольной конечной области* G *комплексной плоскости справедлива оценка*

$$\| \Gamma_\lambda^{-1} \| \leqslant A_G \quad (A_G = \text{const}),$$

то имеет место абсолютно неопределенный случай.

Используя (12) и (15), нетрудно показать, что если G — конечная область, целиком лежащая в верхней (нижней) полуплоскости, то для $\lambda \in G$

$$\int_0^\infty \| \psi(t, \lambda) f \|^2 dt \leqslant B_G \| f \|^2 \qquad (B_G = \text{const}).$$

Оказывается, что такое неравенство выполняется и в случае произвольной конечной области G. Доказательство этого факта проводится аналогично тому, как в [3, 17]. Поэтому целые операторные функции $D_0(\beta, \lambda)$, $D_1(\beta, \lambda)$, $E_0(\beta, \lambda)$, $E_1(\beta, \lambda)$ при $\beta \to \infty$ стремятся соответственно к целым операторным функциям $D_0(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $E_0(\lambda)$, $E_1(\lambda)$. В абсолютно неопределенном случае существует бесчисленное множество спектральных функций задачи (1) — (2) в $(0, \infty)$, которое описывается следующей теоремой.

Теорема 12. *Пусть* λ_0 $(\operatorname{Im}\lambda_0 > 0)$ — *фиксированное невещественное число и* $M_\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu - \lambda}$, *где* $\varrho(\lambda)$ — *любая спектральная функция задачи* (1) — (2). *В абсолютно неопределенном случае множество всех* $M_\varrho(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех оператор-функций* $v(\lambda)$ *в* H, *аналитических в верхней полуплоскости с нормой, не превышающей единицы, причем*

$$\left\{D_1(\lambda) + \left[\frac{J_{\lambda_0}^{-1}}{\bar\lambda_0 - \lambda_0} + J_{\lambda_0}^{-1} J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - J_{\lambda_0}^{-1/2} v(\lambda) J_{\bar\lambda_0}^{-1/2}\right] D_0(\lambda)\right\} \times$$
$$\times M_\varrho(\lambda) = E_1(\lambda) + \left[\frac{J_{\lambda_0}^{-1}}{\bar\lambda_0 - \lambda} + J_{\lambda_0}^{-1} J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) - \right.$$
$$\left. - J_{\lambda_0}^{-1/2} v(\lambda) J_{\bar\lambda_0}^{-1/2}\right] E_0(\lambda), \qquad (39)$$

где

$$J_{\lambda_0}(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \varphi^*(t, \lambda_0)\, \psi(t, \lambda_0)\, dt.$$

Уравнение (39) *разрешимо относительно* $M_\varrho(\lambda)$ *во всяком случае в достаточно малой окрестности* λ_0.

Доказательство. Если $\varrho(\lambda)$ — спектральная функция задачи (1) — (2) в $(0, \infty)$, то она является также спектральной функцией этой же задачи в $(0, \beta)$ при любом $\beta > 0$. Поэтому функции $M_\varrho^\beta(\lambda) = M_\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu - \lambda}$ отвечает операторная функция $v_\beta(\lambda)$ в H, аналитическая в верхней полуплоскости и по норме не превосходящая единицы, такая, что выполняется равенство (32). Выбирая из $v_\beta(\lambda)$ сходящуюся при $\beta \to \infty$ последовательность и переходя в (32) к пределу, получаем доказательство утверждения теоремы в одну сторону. Разрешимость уравнения (39) в точке λ_0 следует из обратимости J_{λ_0}, а в силу аналитичности всех коэффициентов этого уравнения получаем разрешимость уравнения (39) в достаточно малой окрестности точки λ_0.

Обратно, пусть $M(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (39) с некоторой функцией $v(\lambda)$ и аналитична в верхней полуплоскости. Рассматривая уравнение (32) с заданной $v(\lambda)$ при любом $0 < \beta_0 \leqslant \beta < \infty$, получим множество $M_v^\beta(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_v(\mu)}{\mu - \lambda}$, где $\varrho_v(\mu)$ — спектральная функция задачи (1) — (2) в $(0, \beta)$, отвечающая $v(\lambda)$, из которого, как нетрудно убедиться, можно выделить последовательность $M_v^{\beta_n}$, сходящуюся в слабой операторной топологии к некоторой функции $M_v(\lambda)$, аналитической в верхней полуплоскости.

Путем предельного перехода в уравнении (32) при $\beta \to \infty$ приходим к тому, что $M_v(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (39). Благодаря однозначной разрешимости уравнения (39) в достаточно малой окрестности точки λ_0 $M_v(\lambda) = M(\lambda)$ в этой окрестности, а в силу аналитичности этих функций в верхней полуплоскости, $M_v(\lambda) = M(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

Нетрудно проверить, что $\varrho_v^{\beta_n}(\mu)$ стремятся при $\beta_n \to \infty$ к некоторой спектральной функции $\varrho_v(\mu)$ задачи (1) — (2) в $(0, \infty)$ и $M_v(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_v(\mu)}{\mu - \lambda}$.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что если $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) \|^2 dt < \infty$ и $\int\limits_0^\infty \| \psi(t, \lambda) \|^2 dt < \infty$, то, как и в случае конечного интервала (см. п. 2), можно доказать, что обобщенная резольвента задачи (1) — (2) в $(0, \infty)$ является интегральным оператором с операторным ядром, суммируемым с квадратом в $(0, \infty)$. Следуя [4, 5], можно также убедиться, что для сходимости интегралов $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) \|^2 dt$ и $\int\limits_0^\infty \| \psi(t, \lambda) \|^2 dt$ при любом λ достаточна сходимость этих интегралов при некотором фиксированном λ и $\bar{\lambda}$.

Если $q(t)$ — непрерывно дифференцируемая и

$$(q(t) f, f) < -\gamma (f, f),$$

$$(q'(t) f, f) \leqslant \frac{2 + \varepsilon}{t} (q(t) f, f) \text{ при } t > 0,$$

где $\gamma, \varepsilon > 0$, то так же, как и в [13], можно показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| \varphi(t, \lambda) \|^2 dt < \infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| \psi(t, \lambda) \|^2 dt < \infty$$

при $\lambda = 0$. Поэтому сходимость этих интегралов имеет место при любом λ, т. е. имеет место абсолютно неопределенный случай.

При $\dim H < \infty$ сходимость интегралов $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) f \|^2 dt$ при любом $f \in H$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda) \|^2 dt$. Следовательно, при $\dim H < \infty$ абсолютно неопределенный случай имеет место тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \lambda_0) f \|^2 dt$ и $\int\limits_0^\infty \| \varphi(t, \bar{\lambda}_0) f \|^2 dt$ сходятся при некотором невещественном λ_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, Физматгиз, М., 1961.
2. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, изд-во «Наукова думка», К., 1965.
3. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка, Тр. Моск. матем. о-ва, т. 5, 1956.
4. H. Weyl, Über gewohnliche Differentialgleivhungen mit Singularitaten und die Zugehörigen Eutwicklungen willkülicher Funktionen, Math. Ann., **68**, 1910.
5. H. Weyl, Uber das Pich-Nevanlinnasche Interpolationsrpoblem und sein infinitesimales, Ann. of Math., **36**, 1935.
6. И. С. Кац, К вопросу о структуре сингулярных функций ограниченной вариации, УМН, т. 8: 5 (57), 1953.
7. М. Г. Крейн, Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Зб. праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 10, 1948.
8. М. Г. Крейн, Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), УМЖ, № 2, 1949.
9. М. Г. Крейн, Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов, ДАН СССР, т. 69, № 2, 1949.
10. М. Г. Крейн, Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, т. 26, № 1, 1951.
11. М. Г. Крейн, Аналог неравенства Чебышева — Маркова в одномерной краевой задаче, ДАН СССР, т. 39, № 1, 1953.
12. М. Г. Крейн, Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$, ДАН СССР, т. 24, № 1, 1950.
13. В. Б. Лидский, О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $y'' + p(t) y = \lambda y$, ДАН СССР, т. 95, № 2, 1954.
14. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.
15. Ф. С. Рофе-Бекетов, Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях, Матем. сб., т. 51 (93): 3, 1960.
16. Ф. С. Рофе-Бекетов, О разложении по собственным функциям систем, с суммируемым потенциалом, ДАН СССР, т. 156, № 5, 1964.
17. В. Г. Тарнопольський, Абсолютно невизначений випадок для різницевого оператора з операторними коефіцієнтами, Доп. АН УРСР, № 3, 1960.
18. А. В. Штраус, Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, 1954.
19. А. В. Штраус, О спектральных функциях дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, сер матем., т. 19, 1955.
20. А. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.

Поступила 2. III 1965 г.
Киев