О фундаментальных решениях эллиптических систем

М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман

Фундаментальные матрицы решений (ф. м. р.) эллиптических по И. Г. Петровскому систем с постоянными и достаточно гладкими коэффициентами были построены и изучены в основополагающих работах Ф. Йона [1] и Я. Б. Лопатинского [2].

Здесь устанавливаются в определенном смысле окончательные результаты о существовании в малом ф. м. р. равномерно эллиптических в смысле И. Г. Петровского систем, коэффициенты которых имеют модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини. Некоторые из приводящихся в статье результатов были анонсированы в заметках [7].

§ 1. Леммы об оценках интегралов типа эллиптических потенциалов

В настоящем параграфе излагаются нужные для дальнейшего леммы. Вначале дадим следующее

Определение 1. *Непрерывная в Ω (Ω — ограниченная область n-мерного пространства E_n) функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини (принадлежит классу H^1), если ее модуль непрерывности*

$$\omega(h) = \sup_{|x-\xi|<h} |f(x) - f(\xi)|$$

обладает свойством: при некотором положительном z сходится интеграл

$$F(z) = \int_0^z \frac{\omega(h)}{h}\, dh.$$

Если же и $\Phi(a) = \int_0^a \frac{F(z)}{z} dz < \infty$ при некотором a, то $f(x)$ принадлежит классу H^2.

Из известных свойств модуля непрерывности отметим лишь, что функция $\omega(h)$ не убывает, полуаддитивна [5], при этом

$$\frac{\omega(z)}{z} \leqslant 2\,\frac{\omega(h)}{h} \quad (0 < h < z). \tag{1}$$

В следующих леммах под функциями $\omega_i(h)$ будем понимать неотрицательные неубывающие полуаддитивные функции такие, что

$$F_i(a) = \int_0^a \frac{\omega_i(h)}{h}\, dh < +\infty.$$

Пусть d — диаметр области Ω.

Лемма 1. *Для интеграла*

$$I_1(x, \xi) = \int\limits_{\Omega} \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy$$

справедлива оценка

$$I_1(x, \xi) \leqslant C\,[F_1(d)\,\omega_2(|x-\xi|) + F_2(d)\,\omega_1(|x-\xi|)]\,|x-\xi|^{-n},$$

где постоянная C зависит только от n.

Доказательство. Обозначим через $\Omega^{(x)}$ и $\Omega^{(\xi)}$ области, содержащие соответственно точки x и ξ, на которые делится область Ω гиперплоскостью, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки x и ξ, и перпендикулярной ему. Интеграл I_1 представим в виде

$$I_1(x, \xi) = \int\limits_{\Omega^{(x)}} \ldots dy + \int\limits_{\Omega^{(\xi)}} \ldots dy = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}.$$

Пользуясь тем, что в $I_1^{(1)}$ $|y-\xi| \geqslant \frac{1}{2}|x-\xi|$ и неравенством (1), получаем

$$I_1^{(1)} \leqslant 2^n \omega_2(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n} \int\limits_{\Omega} \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n} dy =$$

$$= 2^n S_n F_1(d)\,\omega_2(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n},$$

где S_n — площадь поверхности единичной сферы в E_n.

В $I_1^{(2)}$ $|x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x-\xi|$, поэтому

$$I_1^{(2)} \leqslant 2^n \omega_1(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n} S_n F_2(d).$$

Из оценок $I_1^{(i)}$ следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Для интеграла*

$$I_2(x, \xi) = \int\limits_{\Omega} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} \frac{1}{|x-y|^{\beta}} dy \quad (0 < \beta < n)$$

при $z^{-\beta} F(z) \to \infty$, $z \to +0$ справедлива оценка

$$I_2(x, \xi) \leqslant C\,|x-\xi|^{-\beta} F_1(|x-\xi|); \quad F_1(z) = \max\left(F(z),\ \omega(z^{\frac{\beta}{n}})\right).$$

Доказательство. Обозначим через $K_{r^\alpha}^{(\xi)}$ шар с центром в точке ξ радиуса $r = |x-\xi|$. Представим $I_2(x, \xi)$ в виде суммы интегралов

$$I_2 = \int\limits_{K_{r^\alpha}^{(\xi)}} \ldots dy + \int\limits_{\Omega - K_{r^\alpha}^{(\xi)}} \ldots dy = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}.$$

Так как в $I_2^{(2)}$ $|y-\xi| \geqslant r^\alpha$, в силу неравенства (1)

$$I_2^{(2)} \leqslant 2r^{-\alpha n}\,\omega(r^\alpha) \int\limits_{\Omega} |x-y|^{-\beta} dy,$$

откуда получаем, что

$$I_2^{(2)} \leqslant 2 S_n d^{n-\beta} \omega(r^\alpha)\, r^{-\alpha n}.$$

Чтобы оценить $I_2^{(1)}$, поместим начало координат в точке ξ и проведем ось y_1 через точку x так, чтобы направление от ξ к x было положительным. Тогда точки ξ и x имеют координаты $(0, \dots, 0)$ и $(r, 0, \dots, 0)$ соответственно. В этих обозначениях имеем $|x-y|^2 = (y_1 - r)^2 + \sum\limits_{s=2}^{n} y_s^2$. Полагая $y_s = rz_s$, $\varrho^2 = \sum\limits_{s=1}^{n} z_s^2$, получим

$$I_2^{(1)} \leqslant r^{-\beta} \int\limits_{\varrho \leqslant r^{\alpha-1}} \omega(r\varrho)\, \varrho^{-n} [\varrho^2 - 2z_1 + 1]^{-\frac{\beta}{2}} dz = r^{-\beta} H(r).$$

Разобьем $H(r)$ на сумму интегралов

$$H(r) = \int\limits_{0 \leqslant \varrho \leqslant \frac{1}{2}} \dots dz + \int\limits_{\frac{1}{2} < \varrho \leqslant 2} \dots dz + \int\limits_{2 < \varrho < r^{\alpha-1}} \dots dz = H_1 + H_2 + H_3.$$

Используя неравенство $\varrho^2 - 2z_1 + 1 \geqslant (\varrho - 1)^2$ и переходя в H_1 к сферическим координатам, находим

$$H_1 \leqslant 2^{\beta} S_n \int\limits_0^1 \frac{\omega(r\varrho)}{\varrho} d\varrho = 2^{\beta} S_n F(r).$$

В H_2 положим $z_1 = 1 + y_1$, $z_s = y_s$, $(s = 2, \dots, n)$, тогда получим

$$H_2 \leqslant C\omega(r) \int\limits_{|y| \leqslant 2} |y|^{-\beta} dy = C\omega(r).$$

Очевидно, что при $\varrho \geqslant 2$ $(\varrho - 1)^2 \geqslant \frac{1}{4}\varrho^2$. Поэтому

$$H_3 \leqslant C\omega(r^{\alpha}) \int\limits_2^{\infty} \varrho^{-1-\beta} d\varrho = C\omega(r^{\alpha}).$$

Выберем теперь число α из сегмента $(0, \beta n^{-1})$. Сопоставляя оценки интегралов $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$ и H_i $(i = 1, 2, 3)$, приходим к требуемому неравенству.

Лемма 3. *Для интеграла*

$$I_3(x, \xi) = \int\limits_{\Omega} \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy$$

справедлива оценка

$$I_3(x, \xi) \leqslant C \ln \frac{1}{|x-\xi|} + C_1.$$

Доказательство. Обозначим через $K_r^{(x,\xi)}$ шар радиуса $r = |x-\xi|$ с центром в середине отрезка, соединяющего точки x и ξ, а через $K_r^{(x)}$, $K_r^{(\xi)}$ — полушары, содержащие соответственно точки x и ξ. Имеем, что

$$I_3 = \int\limits_{K_r^{(x)}} \dots dy + \int\limits_{K_r^{(\xi)}} \dots dy + \int\limits_{\Omega - K_r^{(x,\xi)}} \dots dy = I_3^{(1)} + I_3^{(2)} + I_3^{(3)}.$$

Так как в $I_3^{(1)}$ $|y-\xi| > \frac{1}{2}r$, то

$$I_3^{(1)} \leqslant 2^n r^{-n} \omega(r) \int\limits_{K_r^{(x)}} \ln \frac{1}{|x-y|}\, dy =$$

$$= 2^n S_n r^{-n}\, \omega(r) \int\limits_0^{2r} \varrho^{n-1} \ln \frac{1}{\varrho}\, d\varrho = \omega(r) \left(C \ln \frac{1}{2r} + C_1 \right).$$

В $I_3^{(2)}$ $|x-y| > \frac{1}{2}r$, следовательно,

$$I_3^{(2)} \leqslant \ln \frac{2}{r} \int\limits_{K_r^{(\xi)}} \omega(|y-\xi|)\, |y-\xi|^{-n}\, dy = C \ln \frac{2}{r} F(r).$$

В $I_3^{(3)}$ также $|x-y| > \frac{1}{2}r$, поэтому

$$I_3^{(3)} \leqslant \ln \frac{2}{r} \int\limits_{\Omega} \omega(|y-\xi|)\, |y-\xi|^{-n} dy = C \ln \frac{2}{r}.$$

Таким образом,

$$I_3(x, \xi) \leqslant C \left(\ln \frac{1}{2r} + \ln \frac{2}{r} \right) + C_1 = C \ln \frac{1}{r} + C_1.$$

§ 2. Дифференциальные свойства эллиптических потенциалов

Построенные в [1] фундаментальные матрицы решений систем с постоянными коэффициентами тут используются для определения и изучения свойств ф. м. р. эллиптических систем, коэффициенты которых зависят от параметра.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{|k|=m_\alpha} A_{i\alpha}^{(k)}(y)\, D^k u_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} P_{i\alpha}(y, D)\, u_\alpha = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Напомним, что система (2) называется равномерно эллиптической в области Ω, если существует постоянная A такая, что для любых $y \in \Omega$ и любых вещественных векторов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

$$A^{-1} |\sigma|^m \leqslant |\det(P_{i\alpha}(y, \sigma))| \leqslant A |\sigma|^m, \; m = m_1 + \ldots + m_N.$$

Обозначим через $P^{i\alpha}(y, \sigma)$ элементы матрицы обратной к $\| P_{i\alpha}(y, \sigma) \|$. Согласно формулам (3, 86) и (3, 87) из [1] элементы ф. м. р. системы (2) определяются следующим образом: при n нечетном

$$\mathcal{E}_\alpha^i (x-\xi, y) = \frac{1}{4(2\pi i)^{n-1} (m_\alpha - 1)!} \Delta_\xi^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{|z|=1} |(x-\xi, z)|^{m_\alpha - 1} P^{\alpha i}(y, z) \times$$

$$\times \operatorname{sign}(x-\xi, z)\, ds_z; \tag{3}$$

при n четном

$$\mathcal{E}_\alpha^i (x-\xi, y) = \frac{1}{(2\pi i)^n m_\alpha!} \Delta_\xi^{\frac{n}{2}} \int\limits_{|z|=1} |(x-\xi, z)|^{m_\alpha} \times$$

$$\times \ln |(x-\xi, z)|\, P^{\alpha i}(y, z)\, ds_z, \tag{4}$$

где

$$\Delta_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}.$$

Для функций $\mathscr{E}^j_\alpha(x-\xi, y)$ справедливы неравенства

$$|D^k_x \mathscr{E}^j_\alpha(x-\xi, y)| \leqslant \begin{cases} C_k & \text{при } |k| < m_\alpha - n, \\ C \ln \dfrac{1}{|x-\xi|} + C_1 & \text{при } |k| = m_\alpha - n, \\ C_k |x-\xi|^{m_\alpha - n - |k|} & \text{при } |k| > m_\alpha - n. \end{cases} \quad (5)$$

Свойство 1. *Если для коэффициентов $A^{(k)}_{i\alpha}(y)$ выполняется неравенство*

$$|A^{(K)}_{i\alpha}(y+h) - A^{(K)}_{i\alpha}| \leqslant \omega(|h|),$$

то

$$|\Delta^{(y)}_h D^k_x \mathscr{E}^j_\alpha(x-\xi, y)| \leqslant \omega(|h|) \begin{cases} C_k & \textit{при } |k| < m_\alpha - n, \\ C \ln \dfrac{1}{|x-\xi|} + C_1 & \textit{при } |k| = m_\alpha - n, \\ C_k |x-\xi|^{m_\alpha - n - |k|} & \textit{при } |k| > m_\alpha - n, \end{cases}$$

где постоянные C_k зависят лишь от чисел m_α, n, $|k|$ и A;

$$\Delta^{(y)}_h f(x, y) = f(x, y+h) - f(x, y).$$

Свойство 2. *При $|k| = m_\alpha$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{|x-\xi| \leqslant \delta} D^k_x \mathscr{E}^j_\alpha(x-\xi, y)\, d\xi = 0,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство этого свойства изложено в [3].

Определение 2. Функция $f(x, \xi)$ *принадлежит классу* $C^{(m,\omega_3)}_{\omega_1,\omega_2}(\Omega)$, *если в области Ω при $x \neq \xi$ она имеет непрерывные производные $D^k_x f(x,\xi)$, $|k| \leqslant m$ и для $|k| = m$ справедливы оценки*

$$|D^k_x f(x, \xi)| \leqslant C_k \omega_1(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n}, \quad (6)$$

$$|\Delta_n D^k_x f(x, \xi)| \leqslant C_k \omega_3(|h|)\, \{ \omega_2(|x+h-\xi|)\, |x+h-\xi|^{-n} + \\ + \omega_2(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n} \}. \quad (7)$$

Если в $C^{(m,\omega_3)}_{\omega_1,\omega_2}(\Omega)$ некоторая из функций ω_i, например ω_2, равна тождественно постоянной, то соответствующее множество функций мы будем обозначать через $C^{(m,\omega_3)}_{\omega_1,1}(\Omega)$.

В дальнейшем предполагается, что функции $\omega_i(h)$ обладают еще таким *дополнительным* свойством: *найдется такое $\alpha_i \in (0, 1)$ и такое C_i, что*

$$\frac{\omega_i(z)}{z^{\alpha_i}} \leqslant C_i \frac{\omega_i(h)}{h^{\alpha_i}} \; (0 < h < z). \quad (8)$$

Свойство 3. *Предположим, что коэффициенты системы (2) принадлежат классу H^1 с функцией $\omega_4(h)$.*

Рассмотрим функцию $v^j_\alpha(x, \xi) = \int\limits_\Omega \mathscr{E}^j_\alpha(x-y, y) f(y, \xi)\, dy$. *Тогда*

1) *если* $f \in C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1,\omega_2}(\Omega)$, *причем* $F_i(a) = \int\limits_0^a \frac{\omega_i(h)}{h}\,dh < +\infty$, *то* $v^j_\alpha \in$ $\in C^{(m_\alpha, F)}_{\omega,1}(D)$;

2) *если* $f \in C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1,1}(\Omega)$, *то* $v^j_\alpha \in C^{(m_\alpha,F)}_{1,1/F}(D)$. *Здесь* $\omega = \sum\limits_{i=1}^{4}\omega_i$, $F(h) =$ $= \int\limits_0^h \frac{\omega(z)}{z}\,dz$, D — *любая подобласть* Ω, $\overline{D} \subset \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим подробно только наиболее трудный случай, когда изучаются производные порядка m_α. Используя рассуждения, приведенные в монографии [4] (стр. 65—68), приходим к следующей формуле:

$$D^k_x v^j_\alpha(x,\xi) = \int\limits_{\Omega - K^{(x)}_\delta} D^k_x \mathcal{E}^j_\alpha(x-y,y) f(y,\xi)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{K^{(x)}_\delta} D^k_x \mathcal{E}^j_\alpha(x-y,y)\,[f(y,\xi) - f(x,\xi)]\,dy + \int\limits_{K^{(x)}_\delta} [D^k_x \mathcal{E}^j_\alpha(x-y,y) -$$

$$- \overline{D}^k_x \mathcal{E}^j_\alpha(x-y,x)]\,dy\, f(x,\xi) - \int\limits_{|z|=1} D^{k-1}_z \mathcal{E}^j_\alpha(z,x)\, z_l ds_z f(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{4} u_\nu, \qquad (9)$$

где $K^{(x)}_\delta$ — шар с центром в точке x радиуса $\delta = \inf\limits_{x\in D,\eta\in S}|x-\eta|$, S — граница области Ω, $\overline{D}^k_x \mathcal{E}^j_\alpha(x-y,x)$ означает дифференцирование по первому аргументу.

Докажем вначале утверждение 1). Для этого оценим слагаемые в (9). В интеграле u_1 $|x-y| \geqslant \delta$, поэтому в силу суммируемости $f(x,y)$

$$|u_1| \leqslant C \int\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dy \leqslant C.$$

Для u_2 с помощью оценки (7) находим

$$|u_2| \leqslant C \int\limits_{K^{(x)}_\delta} \frac{\omega_3(|x-y|)}{|x-y|^n} \left| \frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} + \frac{\omega_2(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \right| dy.$$

Применяя лемму 1, получим

$$|u_2| \leqslant C\,[\omega_2(|x-\xi|) + \omega_3(|x-\xi|)]\,|x-\xi|^{-n}.$$

В силу того, что коэффициенты системы (2) принадлежат H^1 и свойства 1

$$|u_3| \leqslant C \int\limits_{K^{(x)}_\delta} \frac{\omega_4(|x-y|)}{|x-y|^n}\,dy\, \frac{\omega_1(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \leqslant C\omega_1(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n}.$$

Ограниченность интеграла u_4 очевидна.

Таким образом,

$$|D^k_x v^j_\alpha(x,\xi)| \leqslant C \sum_{i=1}^{3} \omega_i(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n}. \qquad (10)$$

Приступаем к изучению приращения $\Delta_h D_x^k v_\alpha^l(x, \xi)$. Согласно (9)

$$\Delta_h D_x^k v_\alpha^l(x, \xi) = \Delta_h \int\limits_\Omega D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x-y, y) f(y, \xi)\, dy -$$

$$-\Delta_h\Big[\int\limits_{|z|=1} D_z^{k-1} \mathscr{E}_\alpha^l(z, x) z_i ds_z\Big] f(x, \xi) = \Delta_h \int\limits_{\Omega-K_\delta^{(x)}} D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x-y, y) f(y, \xi)\, dy +$$

$$+\Delta_h \int\limits_{K_\delta^{(x)}} D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x-y, y) f(y, \xi)\, dy - \Delta_h u_4 = I + H - \Delta_h u_4. \qquad (11)$$

Предположим, что $|h| \leqslant \frac{1}{12}\delta$, $|x-\xi| \leqslant \frac{1}{2}\delta$ и для сокращения записи $D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x-y, y)$ обозначим через $\mathscr{E}(x-y, y)$.

Представим I в виде

$$I = \int\limits_{\Omega-K_\delta^{(x+h)}} \mathscr{E}(x+h-y, y) f(y, \xi)\, dy - \int\limits_{\Omega-K_\delta^{(x)}} \mathscr{E}(x-y, y) f(y, \xi)\, dy,$$

и в первом из этих интегралов положим $y = h + z$. Тогда будем иметь

$$I = \int\limits_{\Omega-K_\delta^{(x)}} [\mathscr{E}(x-z, z+h) - \mathscr{E}(x-z, z)] f(h+z, \xi) dz +$$

$$+\int\limits_{\Omega-K_\delta^{(x)}} \mathscr{E}(x-z, z)[f(h+z, \xi) - f(z, \xi)]\, dz = I_1 + I_2.$$

В силу свойства 1 и того, что $|x-z| \geqslant \delta$

$$|I_1| \leqslant C\omega_4(|h|) \int\limits_{\Omega-K_\delta^{(x)}} |f(h+z, \xi)|\, dz \leqslant C\omega_4(|h|).$$

Используя неравенство (7), получим

$$|I_2| \leqslant C\omega_3(|h|) \int\limits_\Omega \{\omega_2(|z+h-\xi|)|h+z-\xi|^{-n} +$$

$$+\omega_2(|z-\xi|)|z-\xi|^{-n}\}\, dz \leqslant C\omega_3(|h|).$$

Интеграл $\Delta_h u_4$ представим в виде суммы интегралов

$$\Delta_h u_4 = \int\limits_{|z|=1} \Delta_h^{(x)} D_z^k \mathscr{E}_\alpha^l(z, x) z_i ds_z f(x+h, \xi) +$$

$$+\int\limits_{|z|=1} D_z^{k-1} \mathscr{E}_\alpha^l(z, x) z_i ds_z \Delta_h f(x, \xi).$$

Из свойства 1 и неравенств (6) и (7) следует, что

$$|\Delta_h u_4| \leqslant C\omega_4(|h|)\frac{\omega_1(|x+h-\xi|)}{|x+h-\xi|^n} + C\omega_3(|h|)\left[\frac{\omega_2(|x+h-\xi|)}{|x+h-\xi|^n} + \frac{\omega_2(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}\right]. \qquad (12)$$

Для того чтобы провести оценку H, запишем его в виде:

$$H = \int\limits_{|x+h-y|\leqslant 2|h|} \mathscr{E}(x+h-y, y) f(y, \xi)\, dy +$$

$$+\int\limits_{2|h|<|x+h-y|\leqslant\delta}\mathscr{E}(x+h-y,y)f(y,\xi)\,dy-\int\limits_{|x-y|\leqslant 2|h|}\mathscr{E}(x-y,y)f(y,\xi)\,dy-$$

$$-\int\limits_{2|h|<|x-h|<\delta}\mathscr{E}(x-y,y)f(y,\xi)\,dy=\sum_{j=1}^{4}\widetilde{H}_j.$$

Интегралы $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_3$ оцениваются одинаково. Оценим, например $\widetilde{H}_1$, исходя из представления

$$\widetilde{H}_1=\int\limits_{|x+h-y|\leqslant 2|h|}\mathscr{E}(x+h-y,y)[f(y,\xi)-f(x+h,\xi)]\,dy+$$

$$+\int\limits_{|x+h-y|\leqslant 2|h|}[\mathscr{E}(x+h-y,y)-\mathscr{E}(x+h-y,x+h)]dyf(x+h,\xi)=H_1^{(1)}+H_1^{(2)}.$$

Для оценки $H_1^{(1)}$ воспользуемся неравенством (7):

$$|H_1^{(1)}|\leqslant C\int\limits_{|x+h-y|\leqslant 2|h|}\frac{\omega_3(|x+h-y|)}{|x+h-y|^n}\left[\frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}+\frac{\omega_2(|x+h-\xi|)}{|x+h-\xi|^n}\right]dy.$$

Если $|x+h-\xi|\leqslant 4|h|$, то $|y-\xi|\leqslant 6|h|$. Применяя лемму 1 к последнему интегралу, получим

$$|H_1^{(1)}|\leqslant C[\omega_2(|x+h-\xi|)+\omega_3(|x+h-\xi|)]\,|x+h-$$

$$-\xi|^{-n}[F_2(|h|)+F_3(|h|)].$$

Если $|x+h-\xi|>4|h|$, тогда для $y\in K_{2|h|}^{|x+h|}$ $|y-\xi|\geqslant\frac{1}{2}|x+h-\xi|$, поэтому

$$|H_1^{(1)}|\leqslant C\omega_2(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}F_3(|h|). \tag{13}$$

В силу свойства 1 и неравенства (6) для $H_1^{(2)}$ получаем оценку

$$|H_1^{(2)}|\leqslant C\omega_1(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}F_4(|h|). \tag{14}$$

Сумму интегралов $\widetilde{H}_2+\widetilde{H}_4=\widetilde{H}$ запишем в виде

$$\widetilde{H}=\Bigg\{\int\limits_{2|h|<|x+h-y|<\delta}\mathscr{E}(x+h-y,y)[f(y,\xi)-f(x+h,\xi)]\,dy-$$

$$-\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta}\mathscr{E}(x-y,y)[f(y,\xi)-f(x,\xi)]\,dy\Bigg\}+$$

$$+\int\limits_{2|h|<|x+h-y|<\delta}\mathscr{E}(x+h-y,y)\,dy\,[f(x+h,\xi)-f(x,\xi)]+$$

$$+\left[\int\limits_{2|h|<|x+h-y|<\delta}\mathscr{E}(x+h-y,y)\,dy-\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta}\mathscr{E}(x-y,y)dy\right]f(x,\xi)=$$

$$=E_1+E_2+E_3f.$$

Для интеграла E_1 имеем представление

$$E_1=\Bigg\{\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|}\mathscr{E}(x+h-y,y)[f(y,\xi)-f(x+h,\xi)]\,dy-$$

$$-\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|}\mathscr{E}(x-y,y)[f(y,\xi)-f(x,\xi)]\,dy\Bigg\}+$$

$$+\int\limits_{(2|h|<|x+h-y|<\delta)\cap(|x-y|>\delta-|h|)} \mathscr{E}(x+h-y,y)\,[f(y,\xi)-f(x+h,\xi)]\,dy-$$

$$-\int\limits_{\delta-|h|<|x-y|<\delta} \mathscr{E}(x-y,y)\,[f(y,\xi)-f(x,\xi)]\,dy\equiv E_1^{(1)}+E_1^{(2)}+E_1^{(3)}.$$

Представим $E_1^{(1)}$ в виде

$$E_1^{(1)}=\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} [\mathscr{E}(x+h-y,y)-\mathscr{E}(x-y,y]\,[f(y,\xi)-f(x+h,\xi)]\,dy-$$

$$-\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} \mathscr{E}(x+h-y,y)\,dy\,[f(x+h,\xi)-f(x,\xi)]\equiv V_1+V_2.$$

Для оценки в V_1 первого слагаемого применим теорему о среднем и воспользуемся неравенством (7); тогда получим

$$|V_1|\leqslant C\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} \frac{|h|\,\omega_3(|x+h-y|)}{|x+Qh-y|^{n+1}}\left[\frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}+\frac{\omega_2(|x+h-\xi|)}{|x+h-\xi|^n}\right]dy,$$

где $Q=(Q_1,\ldots,Q_n)$ $(0\leqslant Q_s\leqslant 1)$, Qh — вектор $(Q_1h_1,\ldots,Q_nh_n)$. Так как в V_1 $|x-y|>2|h|$, то $|x+Qh-y|>\frac{1}{2}|x-y|$ и, следовательно, нужно оценить интегралы

$$J_1=\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} \frac{\omega_3(|x-y|)}{|x-y|^{n+1}}\,\frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\,dy,$$

$$J_2=\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} \frac{1}{|x-y|^{n+1}}\,\frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\,dy.$$

Область интегрирования J_1 разобьем следующим образом:

$$J_1=\int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta-|h|\\ |y-\xi|>\frac{1}{2}|x-\xi|}}\ldots dy+\int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta-|h|\\ |x-y|\geqslant\frac{1}{2}|x-\xi|}}\ldots dy\equiv J_1^{(1)}+J_1^{(2)}.$$

В силу того, что в $J_1^{(1)}$ $|y-\xi|\geqslant\frac{1}{2}|x-\xi|$, и неравенства (1) имеем

$$J_1^{(1)}\leqslant C\,\frac{\omega_2(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}\int\limits_{|h|}^{\delta}\frac{\omega_3(\varrho)}{\varrho^2}\,d\varrho=C\,\frac{\omega_2(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}\int\limits_{|h|}^{\delta}\frac{\omega_3(\varrho)}{\varrho^{\alpha}}\,\frac{1}{\varrho^{2-\alpha}}\,d\varrho.$$

В силу неравенства (8)

$$J_1^{(1)}\leqslant C\omega_2(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n}\omega_3(|h|)\,|h|^{-1}. \tag{15}$$

Пользуясь тем, что в $J_1^{(2)}$ $|x-y|\geqslant\frac{1}{2}|x-\xi|$, $|x-y|>2|h|$, и неравенством (1), получаем

$$J_1^{(2)}\leqslant CF_2(d)\,\omega_3(|h|)\,|h|^{-1}\,|x-\xi|^{-n}. \tag{16}$$

Если в J_2 разбить область интегрирования так, как в J_1, и провести те же рассуждения, то получим оценку

$$J_2\leqslant C\,[\omega_2(|x-\xi|)+1]\,|x-\xi|^{-n}\,|h|^{-1}. \tag{17}$$

На основании (15) — (17) и полуаддитивности ω_3 имеем

$$|V_1| \leqslant C\,\omega_3(|h|)\,[\,|x-\xi|^{-n}+|x+h-\xi|^{-n}]. \tag{18}$$

Для оценки V_2 воспользуемся свойством 2 и неравенством (7):

$$|V_2| = \Big|\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|}[\mathscr{E}(x-y,y)-\mathscr{E}(x-y,x)]\,dy\Delta_h f(x,\xi)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_3(|h|)\,[\omega_2(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}+\omega_2(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n}]. \tag{19}$$

Из оценок (18), (19) следует, что

$$|E_1^{(1)}| \leqslant C\omega_3(|h|)\,[\omega_2(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}+\omega_2(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n}]. \tag{20}$$

Оценим теперь $E_1^{(2)}$ и $E_1^{(3)}$. По предположению $|x-\xi| \leqslant \frac{1}{2}\delta$ и $|h| < \frac{1}{12}\delta$, поэтому в них $|y-\xi| \geqslant |x-y|-|x-\xi| \geqslant \delta-|h|-\frac{\delta}{2} \geqslant \frac{5}{6}\delta$, $|x+h-y| \geqslant$ $\geqslant |x-y|-|h| \geqslant \delta-2|h| \geqslant \frac{5}{6}\delta$. Используя эти неравенства, находим

$$|E_1^{(3)}| \leqslant C\int\limits_{\delta-|h|<|x-y|<\delta}[1+\omega_1(|x-\xi|)\,|x-\xi|^{-n}]\,dy \leqslant C\,|h|\,\omega_1(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}. \tag{21}$$

Учитывая, что в $E_1^{(2)}$ $\delta-|h|<|x-y|<\delta+|h|$, получим

$$|E_1^{(2)}| \leqslant C\int\limits_{\delta-|h|<|x-y|<\delta+|h|}[1+\omega_2(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}]dy \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_2(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}|h|. \tag{22}$$

Таким образом, E_1 оценен.

Интеграл E_2 оценивается так же, как выше оценен интеграл V_2.

Чтобы оценить оставшийся интеграл E_3, представим его в виде

$$E_3 = \sum_{s=1}^{n}\int\limits_{x_s}^{x_s+h_s}\frac{\partial}{\partial\zeta_s}\int\limits_{2|h|<|\zeta^{(s)}-y|<\delta}\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,y)\,dy d\zeta_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\int\limits_{x_s}^{x_s+h_s}\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_s}\int\limits_{2|h|<|\zeta^{(s)}-y|<\delta}[\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,y)-\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,z)]\,dy\Big)\,d\zeta_s\Big|_{z=\zeta^{(s)}},$$

где $\zeta^{(s)} = (x_1,\ldots,x_{s-1},\zeta_s,x_{s+1}+h_{s+1},\ldots,x_n+h_n)$.

В первой сумме выполним дифференцирование интеграла; тогда получим

$$E_3 = \sum_{s=1}^{n}\int\limits_{x_s}^{x_s+h_s}d\zeta_s\int\limits_{2|h|<|\zeta^{(s)}-y|<\delta}\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta_s}\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,y)-\frac{\partial}{\partial\zeta_s}\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,z)\Big]\Big|_{z=\zeta^{(s)}}dy -$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{x_s}^{x_s+h_s}d\zeta_s\int\limits_{|\zeta^{(s)}-y|=2|h|}[\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,y)-\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,\zeta^{(s)})]\cos(\vec{r}_{\zeta^{(s)}y},\zeta_s)\,ds_y +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{x_s}^{x_s+h_s}d\zeta_s\int_{|\zeta^{(s)}-y|=\delta}|\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,y)-\mathscr{E}(\zeta^{(s)}-y,\zeta^{(s)})]\cos(\overrightarrow{r_{\zeta^{(s)}y}},\zeta_s)\,ds_y\equiv$$

$$\equiv E_3^{(1)}+E_3^{(2)}+E_3^{(3)}.$$

На основании свойства 1 имеем

$$|E_3^{(1)}|\leqslant C\sum_{s=1}^{n}\int_{x_s}^{x_s+h_s}d\zeta_s\int_{2|h|<|\zeta^{(s)}-y|<\delta}|\zeta^{(s)}-y|^{-n-1}\omega_4(|\zeta^{(s)}-y|)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{s=1}^{n}\int_{x_s}^{x_s+h_s}d\zeta_s\int_{|h|}^{\delta}\frac{\omega_4(\varrho)}{\varrho^2}\,d\varrho\leqslant C\omega_4(|h|),\tag{23}$$

$$|E_3^{(2)}|\leqslant C\sum_{s=1}^{n}\int_{x_s}^{x_s+h_s}d\zeta_s\,\frac{\omega_4(|h|)}{|h|^n}\int_{|\zeta^{(s)}-y|=2|h|}ds_y\leqslant C\omega_4(|h|).\tag{24}$$

В $E_3^{(3)}$ поверхностный интеграл ограничен, поэтому

$$|E_3^{(3)}|\leqslant C|h|.\tag{25}$$

Из неравенств (23) — (25) следует, что

$$|E_3|\leqslant C\omega_4(|h|).$$

Заметим, что из неравенства (1) для рассматриваемых функций $\omega_i(h)$ вытекает неравенство

$$F_i(z)=\int_0^z\frac{\omega_i(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{\omega_i(z)}{z}\int_0^z d\varrho=\frac{1}{2}\,\omega_i(z).$$

Собирая полученные выше оценки, находим, что

$$|\Delta_h D_x^K v_\alpha^j(x,\xi)|\leqslant C\,[F_2(|h|)+F_3(|h|)+F_4(|h|)]\,[|x+h-\xi|^{-n}+|x-\xi|^{-n}].\tag{26}$$

Пусть теперь $|x-\xi|>\frac{1}{2}\,\delta$, $|h|\leqslant\frac{\delta}{12}$. Имеем представление

$$D_x^K v_\alpha^j(x,\xi)=\int_{\Omega-K_{\delta/4}^{(x)}-K_{\delta/4}^{(\xi)}}\mathscr{E}(x-y,y)\,f(y,\xi)\,dy+\int_{K_{\delta/4}^{(x)}}\mathscr{E}(x-y,y)\,f(y,\xi)\,dy+$$

$$+\int_{K_{\delta/4}^{(\xi)}}\mathscr{E}(x-y,y)\,f(y,\xi)\,dy-\int_{|z|=1}D_z^{k-1}\mathscr{E}(z,x)\,z_i\,ds_z f(x,\xi).$$

Первый и последний интегралы оцениваются точно так же, как и выше оценены интегралы I и E. Во втором интеграле $|y-\xi|>\delta/4$. Выполнение этого условия, необходимого при оценке интегралов $E_{|}^{(2)}$ и $E_{|}^{(3)}$, позволяет провести оценку его приращения таким же способом, как выше оценивались слагаемые в интеграле H. В третьем интеграле $|x-y|>\delta/4$, поэтому он является липшицовой функцией. Если $|h|>\frac{\delta}{12}$, то неравенство (26) сразу следует из оценки (10). Утверждение 1) доказано.

Докажем теперь утверждение 2). Пусть $f \in C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1,1}(\Omega)$. Исходя из формулы (9), с помощью леммы 1 нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$|D_x^K v'_\alpha(x, \xi)| \leqslant C|x-\xi|^{-n}. \tag{27}$$

Рассмотрим $\Delta_h D_x^K v'_\alpha(x, \xi)$, которое представимо по формуле (11). Для интегралов I и $\Delta_h u_4$ из (11) сохраняют свою силу прежние оценки, установленные для $f \in C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1\omega_2}(\Omega)$. Оценим слагаемые в интеграле H. В $\widetilde{H}_1$ достаточно провести лишь оценку $H_1^{(1)}$. Если $|x+h-\xi| < 4|h|$, запишем $H_1^{(1)}$ в виде

$$H_1^{(1)} = \int\limits_{|x+h-y| \leqslant \frac{1}{2}|x+h-\xi|} \mathscr{E}(x+h-y, y)\,[f(y,\xi) - f(x+h,\xi)]\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{2}|x+h-\xi| < |x+h-y| \leqslant 2|h|} \mathscr{E}(x+h-y, y)\,f(y,\xi)\,dy - f(x+h,\xi)\times$$

$$\times \int\limits_{\frac{1}{2}|x+h-\xi| < |x+h-y| \leqslant 2|h|} [\mathscr{E}(x+h-y, y) - \mathscr{E}(x+h-y, x)]\,dy =$$

$$= L_1 + L_2 + L_3.$$

Так как в L_1 $|y-\xi| \geqslant \frac{1}{2}|x+h-\xi|$, то

$$|L_1| \leqslant C \int\limits_{|x+h-y| \leqslant \frac{1}{2}|x+h-\xi|} |x+h-y|^{-n}\,\omega_3(|x+h-y|)\,[|x+h-\xi|^{-n} +$$

$$+ |y-\xi|^{-n}]\,dy \leqslant C|x+h-\xi|^{-n} F_3(|h|).$$

В интеграле L_2 $|x+h-y| \geqslant \frac{1}{2}|x+h-\xi|$, поэтому

$$|L_2| \leqslant C|x+h-\xi|^{-n} \int\limits_{|y-\xi| \leqslant 6|h|} \omega_1(|y-\xi|)\,|y-\xi|^{-n}\,dy = C|x+h-\xi|^{-n} F_1(|h|).$$

В силу свойства 1 и неравенства (6)

$$|L_2| \leqslant C\omega_1(|x+h-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n} F_4(|h|).$$

Если $|x+h-\xi| \geqslant 4|h|$, тогда в $H_1^{(1)}$ $|y-\xi| \geqslant \frac{1}{2}|x+h-\xi|$; поэтому

$$|H_1^{(1)}| \leqslant C|x+h-\xi|^{-n} \int\limits_{|x+h-y| \leqslant 2|h|} \omega_3(|x+h-y|)\,|x+h-y|^{-n}\,dy =$$

$$= C|x+h-\xi|^{-n} F_3(|h|).$$

Таким образом,

$$|\widetilde{H}_1| \leqslant C|x+h-\xi|^{-n}\,[F_1(|h|) + F_3(|h|) + F_4(|h|)].$$

В интеграле $\widetilde{H}$ нужно лишь оценить V_1, так как для остальных слагаемых справедливы прежние оценки. Разобьем V_1 на сумму интегралов

$$V_1 = \int\limits_{2|h| < |x-y| < \delta - |h|} \Delta_h \mathscr{E}(x-y, y)\,[f(y,\xi) - f(x+h,\xi)]\,dy +$$

$$+\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} \Delta_h \mathscr{E}(x-y, y) f(y, \xi)\, dy -$$

$$-\int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta-|h| \\ |x-y|\geq \frac{1}{2}|x-\xi|}} \Delta_h \mathscr{E}(x-y, y)\, dy f(x+h, \xi) \equiv N_1 + N_2 + N_3.$$

Применяя в N_1 теорему о среднем значении и пользуясь принадлежностью $f(x, \xi)$ множеству $C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1, 1}(\Omega)$, получим

$$|N_1| \leqslant C|h| \int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} \omega_3(|x+h-y|)\,|x-y|^{-n-1}\,[|y-\xi|^{-n}+|x+h-\xi|^{-n}]\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_3(|h|)\,[|x-\xi|^{-n}+|x+h-\xi|^{-n}].$$

Для N_2 имеем неравенство

$$|N_2| \leqslant C \int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta \\ |x-y|\geq \frac{1}{2}|x-\xi|}} |h|\,|x-y|^{-n-1}\omega_1(|y-\xi|)\,|y-\xi|^{-n} dy =$$

$$= C|h| \int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta \\ |x-y|\geq \frac{1}{2}|x-\xi|}} \frac{F(|x-y|)}{|x-y|} \frac{1}{|x-y|^n F(|x-y|)} \frac{\omega_1(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant CF(|h|)\,|x-\xi|^{-n}\,(F(|x-\xi|))^{-1}.$$

Применение теоремы о среднем к N_3 дает

$$|N_3| \leqslant C\frac{\omega_1(|x-\xi|)}{|x+h-\xi|^n}|h| \int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta \\ |x-y|\geq \frac{1}{2}|x-\xi|}} |x-y|^{-n-1} dy +$$

$$+\frac{\omega_1(|h|)\,|h|}{|x+h-\xi|^n} \int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta} |x-y|^{-n-1} dy \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_1(|x-\xi|)\,|x+h-\xi|^{-n}\,|h| \int\limits_{\substack{2|h|<|x-y|<\delta \\ |x-y|\geq \frac{1}{2}|x-\xi|}} \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^{n+1}} \frac{dy}{\omega_1(|x-y|)} +$$

$$+ C\omega_1(|h|)\,|x+h-\xi|^{-n} \leqslant C\omega_1(|h|)\,|x+h-\xi|^{-n}.$$

Из полученных оценок следует, что для $f \in C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1,1}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$|\Delta_n D_x^k v_\alpha^j(x, \xi)| \leqslant CF(|h|)\left[\frac{1}{|x-\xi|^n F(|x-\xi|)} + \frac{1}{|x+h-\xi|^n F(|x+h-\xi|)}\right]. \tag{28}$$

Неравенства (27) и (28) означают, что $v_\alpha^j \in C^{(m_\alpha, F)}_{1, 1/F}(D)$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть функции f_j принадлежат классу $C^{(0,\omega_3)}_{\omega_1,1}(\Omega)$. Рассмотрим функцию

$$v_\alpha(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^j_\alpha(x-y, y)\, f_j(y, \xi)\, dy.$$

Справедлива формула

$$\sum_{\alpha=1}^{N} P_{i\alpha}(x, D)\, v_\alpha(x, \xi) = f_i(x, \xi) + \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N} P_{i\alpha}(x, D)\,[\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y) -$$

$$- \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)]|_{\eta=x} f_j(y, \xi)\, dy. \tag{29}$$

Доказательство. Очевидно, имеет место представление

$$\sum_{\alpha=1}^{N} P_{i\alpha}(x, D)\, v_\alpha = \sum_{j=1}^{N} P_{i\alpha}(x, D) \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N} [\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y) - \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)] f_j(y, \xi) dy|_{\eta=x} +$$

$$+ \sum_{\alpha, j=1}^{N} P_{i\alpha}(x, D) \int_\Omega \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)\,[f_j(y, \xi) - f_j(\eta, \xi)]\, dy\,|_{\eta=x} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} P_{i\alpha}(\eta, D) \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)\, dy f_j(\eta, \xi)\,|_{\eta=x}. \tag{30}$$

В силу определения функций $\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)$ третий интеграл равен $f_i(x, \xi)$. Учитывая, что в равенствах

$$D_x^k \int\limits_{\Omega - K_\rho^{(x)}} [\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y) - \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)]\, f_j(y, \xi)\, dy\,|_{\eta=x} =$$

$$= \int\limits_{\Omega - K_\varepsilon^{(x)}} D_x^k [\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y) - \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)]\, f_j(y, \xi)\, dy|_{\eta=x} -$$

$$- \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} D_x^{k-1} [\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y) - \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)]|_{\eta=x} f_j(y, \xi) \cos(\vec{r}_{xy}, x_i)\, ds_y;$$

$$D_x^k \int\limits_{\Omega - K_\varepsilon^{(x)}} \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)\,[f_j(y, \xi) - f_j(\eta, \xi)]\,|_{\eta=x} dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega - K_\varepsilon^{(x)}} D_x^k \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)\,[f_j(y, \xi) - f_j(\eta, \xi)]\,|_{\eta=x} \cos(\vec{r}_{xy}, x_i)\, ds_y -$$

$$- \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} D_x^{k-1} \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, \eta)\,[f_j(y, \xi) - f_j(\eta, \xi)]|_{\eta=x} \cos(\vec{r}_{xy}, x_i)\, ds_y$$

поверхностные интегралы при $\varepsilon \to 0$ на основании свойства 1 и оценки (7) стремятся к нулю, из представления (30) получаем формулу (29).

Замечание 2. Аналогично, но значительно проще, чем свойство 3, устанавливается следующее важное утверждение.

Свойство 4. *Если коэффициенты системы* (2) *и функции* $f_j(x)$ *в* Ω *принадлежат классу* H^1 *с функцией* $\omega(h)$, *то*

$$v_\alpha^j(x) = \int_\Omega \mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y)\, f_j(y)\, dy$$

в области D *имеют непрерывные производные* $D_x^k v_\alpha^j(x)$, $|k| \leqslant m_\alpha$, *модуль непрерывности которых не превышает* $\int_0^h \frac{\omega(z)}{z} dz$. *Если же* $f_j(x) \in L_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, *то* $v_\alpha^j(x)$ *имеют обобщенные производные* $D_x^k v_\alpha^j(x)$, *принадлежащие* $L_p(D)$.

Доказательство существования обобщенных производных $D_x^k v_\alpha^j$ с $|k| \leqslant m_\alpha$ при $f_j \in L_p(\Omega)$ можно провести аналогично доказательству теоремы 1.29 из [4].

§ 3. Построение фундаментальных матриц решений в малом

Здесь методом Леви устанавливается существование в малом ф. м. р. равномерно эллиптических систем.

Рассмотрим в области Ω равномерно эллиптическую систему

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{|k| \leqslant m_\alpha} A_{i\alpha}^{(k)}(x) D^k u_\alpha = 0. \tag{31}$$

Теорема. *Предположим, что:* 1) *коэффициенты системы* (31) *определены и ограничены в области* Ω; 2) *коэффициенты* $A_{i\alpha}^{(k)}(x)$ *с* $|k| = m_\alpha$ *принадлежат классу* H^2 *с модулем непрерывности* $\omega(h)$, *а остальные коэффициенты — классу* H^1 *с модулем* $\omega_1(h)$. *Тогда если* Ω *достаточно мала по диаметру, то в любой ее подобласти* $D, \overline{D} \subset \Omega$ *существует ф.м.р.* $\varphi(x, \xi)$, *для производных которой справедливы оценки*

$$|D_x^k \varphi_\alpha^j(x, \xi)| \leqslant \begin{cases} C & \text{при } |k| < m_\alpha - n, \\ C \ln \dfrac{1}{|x-\xi|} + C_1 & \text{при } |k| = m_\alpha - n, \\ C_k |x-\xi|^{m_\alpha - n - |k|} & \text{при } |k| > m_\alpha - n. \end{cases}$$

Доказательство. По методу Леви:

$$\varphi_\alpha^j(x, \xi) = \mathscr{E}_\alpha^j(x-\xi, \xi) + \sum_{l=1}^{N} \int_\Omega \mathscr{E}_\alpha^l(x-y, y) f_l^j(y, \xi)\, dy. \tag{32}$$

Подберем функции $f_l^j(x, \xi)$ так, чтобы $\varphi_\alpha^j(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ были решениями системы (31). Априори предположим, что $f_l^j \in C_{\omega_1}^{(0, F+\omega_1)}(\Omega)$. Тогда в силу свойства 3 для определения $f(x, \xi) = \| f_\alpha^j(x, \xi) \|$ получим интегральное уравнение

$$f(x, \xi) = K(x, \xi) + \int_\Omega K(x, y) f(y, \xi)\, dy, \tag{33}$$

$$K(x, \xi) \equiv \left\| \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ P_{i\alpha}(x, D) [\mathscr{E}_\alpha^j(x-\xi, \eta) - \mathscr{E}_\alpha^j(x-\xi, \xi)] \big|_{\eta=x} + \sum_{|k| < m_\alpha} A_{i\alpha}^{(k)}(x) D^k \mathscr{E}_\alpha^j \right\} \right\|.$$

Покажем, что систему (33) в достаточно малой по диаметру d области Ω можно решить методом последовательных приближений. Решение этой системы записывается в виде ряда

$$f(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, \xi), \tag{34}$$

$$K_{m+1}(x, \xi) = \int_\Omega K(x, y) K_m(y, \xi)\, dy \qquad (K_1 \equiv K).$$

Проведем оценку повторных ядер. Используя условия теоремы, свойство 1 и оценки (5), находим

$$|K(x, \xi)| \leqslant C_0 \omega(|x-\xi|) |x-\xi|^{-n}. \tag{35}$$

Поэтому

$$|K_2(x,\xi)| \leqslant C_0^2 \int_\Omega \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\, dy.$$

В силу леммы 1

$$|K_2(x,\xi)| \leqslant C_0^2 F(d)\, \omega(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n},$$

где

$$F(d) = C(n) \int_0^d \frac{\omega(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho.$$

Пусть

$$|K_m(x,\xi)| \leqslant C_0^m F^{m-1}(d)\, \omega(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n}.$$

Тогда

$$|K_{m+1}(x,\xi)| \leqslant C_0^{m+1} F^{m-1}(d) \int_\Omega \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\, dy.$$

Отсюда

$$|K_{m+1}(x,\xi)| \leqslant C_0^{m+1} F^m(d)\, \omega(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n}.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_m(x,\xi)| \leqslant C_0 \sum_{m=0}^{\infty} C_0^m F^m(d)\, \omega(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n}.$$

Из определения функции $F(d)$ видно, что при достаточно малом α $C_0F(d) < 1$ и, следовательно, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_0^m F^m(d) < \infty$. Тогда при $|x-\xi| \geqslant \sigma > 0$ ряд (34) равномерно сходится. Значит, его сумма $f(x,\xi)$ непрерывна при $x \neq \xi$ и для нее справедлива оценка

$$|f(x,\xi)| \leqslant C\omega(|x-\xi|)\, |x-\xi|^{-n}. \tag{36}$$

Оценим $\Delta_h f(x,\xi)$. Если $|x-\xi| \leqslant 4|h|$, то требуемая оценка сразу следует из (36) и полуаддитивности ω:

$$|\Delta_h f(x,\xi)| \leqslant C\omega(|h|)\,[\,|x+h-\xi|^{-n} + |x-\xi|^{-n}]. \tag{37}$$

Рассмотрим случай $|x-\xi| > 4|h|$. Представляя $\Delta_h K(x,\xi)$ в виде

$$\| \Delta_h K_i^l(x,\xi) \| = \Big\| \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{|k|\leqslant m_\alpha} \Delta_h A_{i\alpha}^{(k)}(x)\, D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x+h-\xi,\xi) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{|k|\leqslant m_\alpha} [A_{i\alpha}^{(k)}(x) - A_{i\alpha}^{(k)}(\xi)]\, \Delta_h D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x-\xi,\xi) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{|k|\leqslant m_\alpha - 1} A_{i\alpha}^{(k)}(x)\, \Delta_h D_x^k \mathscr{E}_\alpha^l(x-\xi,\xi) \tag{38}$$

и используя условия теоремы и теорему о среднем, получим

$$|\Delta_h K(x,\xi)| \leqslant C \Big[\frac{\omega(|h|)}{|x+h-\xi|^n} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x+h-\xi|^{n-1}} + \frac{\omega(|x-\xi|)\,|h|}{|x+Qh-\xi|^{n+1}} +$$

$$+ \frac{|h|}{|x+Qh-\xi|^n} \Big].$$

Так как $|x-\xi| > 4|h|$, $|x+Qh-\xi| \geqslant |x-\xi| - |Qh| \geqslant \frac{3}{4}|x-\xi|$, то

$$|\Delta_h K(x,\xi)| \leqslant C\{\omega(|h|)|x-\xi|^{-n} + |x-\xi|^{-n+1}\omega_1(|h|)\}. \qquad (39)$$

Оценим теперь приращение интеграла в уравнении (33):

$$\Delta_h \int_\Omega K(x,y) f(y,\xi)\,dy = \int_{K_{2|h|}^{(x)}} \Delta_h K(x,y) f(y,\xi)\,dy +$$

$$+ \int_{\Omega^{(x)} - K_{2|h|}^{(x)}} \Delta_h K(x,y) f(y,\xi)\,dy + \int_{\Omega^{(\xi)}} \Delta_h K(x,y) f(y,\xi)\,dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

где $\Omega^{(x)}$ и $\Omega^{(\xi)}$ — части области Ω, введенные при доказательстве леммы 1.

Воспользовавшись неравенством (35) и тем, что в I_1 $|y-\xi| \geqslant \frac{1}{2}|x-\xi|$, оценим I_1:

$$|I_1| \leqslant C \int_{|x-y|\leqslant 2|h|} \left[\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} + \frac{\omega(|x+h-y|)}{|x+h-y|^n}\right] \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} F(|h|).$$

Интеграл I_2 оценим с помощью неравенств (36), (39):

$$|I_2| \leqslant C \int_{\substack{|h|\leqslant|x-y|\leqslant d \\ |y-\xi|\geqslant\frac{1}{2}|x-\xi|}} \left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^n} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{n-1}}\right] \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\omega(|h|)\ln\frac{1}{|h|} + \omega_1(|h|)\right]\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}.$$

В силу оценки (39) для I_3 получаем неравенство

$$|I_3| \leqslant \int_{\substack{|x-y|\geqslant\frac{1}{2}|x-\xi| \\ |y-\xi|\leqslant d}} \{\omega(|h|)|x-y|^{-n} + |x-y|^{-n+1}\omega_1(|h|)\} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C[\omega(|h|)|x-\xi|^{-n} + \omega_1(|h|)|x-\xi|^{-n+1}].$$

Из неравенства (39) и оценок для интегралов I_i $(i=1,2,3)$ следует, что при $|x-\xi| > 4|h|$

$$|\Delta_h f(x,\xi)| \leqslant C\left[F(|h|) + \omega(|h|)\ln\frac{1}{|h|} + \omega_1(|h|)\right]|x-\xi|^{-n}.$$

Покажем, что справедлива более точная оценка:

$$|\Delta_h f(x,\xi)| \leqslant C[F(|h|) + \omega_1(|h|)][|x+h-\xi|^{-n} + |x-\xi|^{-n}]. \qquad (40)$$

Для этого достаточно лишь уточнить оценку I_2. Представим I_2 в виде

$$I_2 = \int_{\Omega^{(x)} - K_{2|h|}^{(x)}} \Delta_h K(x,y)[f(y,\xi) - f(x,\xi)]\,dy + \int_{\Omega^{(x)} - K_{2|h|}^{(x)}} \Delta_h K(x,y)\,dy f(x,\xi) =$$

$$= I_2^{(1)} + I_2^{(2)}.$$

В $I_2^{(1)}$ $|x-y| \geqslant 2|h|$, поэтому для $\Delta_h K(x, \xi)$ справедлива оценка (39). Учитывая также, что $|y-\xi| \geqslant \frac{1}{2}|x-\xi|$, находим

$$|I_2^{(1)}| \leqslant C \int\limits_{|h|<|x-y|\leqslant d} \left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^n} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{n-1}}\right]\Big[F(|x-y|)+\omega(|x-y|)\ln\frac{1}{|x-y|} +$$

$$+ \omega_1(|x-y|)\Big] [|y-\xi|^{-n} + |x-\xi|^{-n}]\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C|x-\xi|^{-n}\omega(|h|)\int\limits_{|h|}^{d}\frac{1}{\varrho}\left[F(\varrho)+\omega(\varrho)\ln\frac{1}{\varrho}+\omega_1(\varrho)\right]d\varrho +$$

$$+ C|x-\xi|^{-n}\omega_1(|h|)\int\limits_0^d\left[F(\varrho)+\omega(\varrho)\ln\frac{1}{\varrho}+\omega_1(\varrho)\right]d\varrho.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\omega(|h|)\int\limits_{|h|}^{d}\frac{\omega(\varrho)}{\varrho}\ln\frac{1}{\varrho}\,d\varrho = \omega(|h|)\int\limits_{|h|}^{d}\ln\frac{1}{\varrho}\,dF(\varrho) = \omega(|h|)\ln\frac{1}{d}F(d) -$$

$$-\omega(|h|)\ln\frac{1}{|h|}F(|h|) + \omega(|h|)\int\limits_{|h|}^{d}\frac{F(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho.$$

Из предположений о $\omega(h)$ следует что $\lim\limits_{\varrho\to 0}\omega(\varrho)\ln\frac{1}{\varrho} = 0$ [6] (стр. 203, задача 240). Поэтому

$$|I_2^{(1)}| \leqslant C[F(|h|)+\omega_1(|h|)]\,|x-\xi|^{-n}. \tag{41}$$

Для того, чтобы оценить $I_2^{(2)}$, используем представление (38). Имеем:

$$I_2^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{|k|=m_\alpha}\Delta_h A_{i\alpha}^{(k)}(x)\int\limits_{\Omega^{(x)}-K_{2|h|}^{(x)}} D_x^k\mathscr{E}_\alpha^j(x+h-y, y)\,dy +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{|k|=m_\alpha}\int\limits_{\Omega^{(x)}-K_{2|h|}^{(x)}}[A_{i\alpha}^{(k)}(x)-A_{i\alpha}^{(k)}(y)]\,\Delta_h D_x^k\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y)\,dy +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N}\int\limits_{|k|\leqslant m_\alpha-1}\int\limits_{\Omega^{(x)}-K_{2|h|}^{(x)}}[\Delta_h A_{i\alpha}^{(k)}(x)\,D_x^k\mathscr{E}_\alpha^j(x+h-y, y) +$$

$$+ A_{i\alpha}^{(k)}(x)\,\Delta_h D_x^k\mathscr{E}_\alpha^j(x-y, y)]\,dy \equiv R_1 + R_2 + R_3.$$

Применяя в R_3 теорему о среднем значении и учитывая при этом, что $|x-y| \geqslant 2|h|$, находим

$$|E_3| \leqslant C\left[\omega_1(|h|) + |h|\ln\frac{1}{|h|}\right];$$

для R_2 получаем оценку

$$|R_2| \leqslant C|h|\int\limits_{|h|<|x-y|<d}\omega(|x-y|)\,|x-y|^{-n-1}dy \leqslant C\omega(|h|).$$

Чтобы провести оценку R_1, нужно оценить интеграл

$$\int\limits_{\Omega^{(x)}-K^{(x)}_{2|h|}} D^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x+h-y, y)\, dy = \int\limits_{\Omega^{(x)}-K^{(x)}_{2|h|}} [D^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x+h-y, y) -$$

$$- D^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x-y, y)]\, dy + \int\limits_{\Omega^{(x)}-K^{(x)}_{2|h|}} [D^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x-y, y) - \overline{D}^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x-y, x)]\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^{(x)}-K^{(x)}_{\frac{1}{2}|x-\xi|}} \overline{D}^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x-y, x)\, dy + \int\limits_{2|h|<|x-y|<\frac{1}{2}|x-\xi|} \overline{D}^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x-y, x)\, dy.$$

Последний интеграл в силу свойства 2 равен нулю. Если в первом применить теорему о среднем и воспользоваться неравенством $|x-y| \geqslant 2|h|$, то получим, что он является ограниченной функцией. На основании свойства 1 также ограничен второй интеграл. Третий интеграл оценим с помощью неравенства (5):

$$\int\limits_{\Omega^{(x)}-K^{(x)}_{\frac{1}{2}|x-\xi|}} |\overline{D}^k_x \mathscr{E}^l_\alpha (x-y, x)|\, dy \leqslant C \int\limits_{\substack{|x-y|\leqslant a \\ |x-y|>\frac{1}{2}|x-\xi|}} |x-y|^{-n} dy \leqslant$$

$$\leqslant C \ln \frac{1}{|x-\xi|}.$$

Итак, для $I_2^{(2)}$ получаем неравенство

$$|I_2^{(2)}| \leqslant C \left[\omega(|h|) \ln \frac{1}{|x-\xi|} + \omega_1(|h|) \right]. \tag{42}$$

Из неравенств (41), (42) следует, что

$$|I_2| \leqslant C\, [F(|h|) + \omega_1(|h|)].$$

Значит, I_2 удовлетворяет требуемому неравенству.

Оценки (36), (40) показывают, что $f(x, \xi)$, определенная формулой (34), принадлежит $C^{(0, F+\omega_1)}_{\omega, 1}(\Omega)$. Тогда в силу свойства 3

$$v^l_\alpha (x, \xi) = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^{(l)}_\alpha (x-y, y)\, f^j_l (y, \xi)\, dy$$

принадлежит классу $C^{(m_\alpha, \Phi)}_{1, 1/\Phi}(D)$, $\Phi(z) = \int\limits_0^z \frac{F(\varrho) + \omega_1(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho$. Производные $D^k_x v^l_\alpha (x, \xi)$ с $|k| \leqslant m_\alpha - 1$ легко оцениваются с помощью лемм 2 и 3.

Следствие. В силу конструкции (32) для приращения производных ф. м. р. $D^k_x \varphi^j_\alpha (x, \xi)$ с $|k| = m_\alpha$ справедлива оценка

$$|\Delta_h D^k_x \varphi^j_\alpha (x, \xi)| \leqslant C\Phi(|h|) \left\{ \frac{1}{|x-\xi|^n \Phi(|x-\xi|)} + \frac{1}{|x+h-\xi|^n \Phi(|x+h-\xi|)} \right\}.$$

В частности, если коэффициенты удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$, то у равномерно эллиптической системы есть ф. м. р., старшие производные которой гельдеровы с тем же показателем α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, М., 1958.
2. Я. Б. Лопатинский, Фундаментальные решения систем дифференциальных уравнений эллиптического типа, УМЖ, т. III, № 1, 1951, 3—38.
3. Є. Агмон, А. Дуглис и Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, М., 1962, 64.
4. Є. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
5. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
6. Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, М., 1948.
7. М. И. Матийчук. ДАН СССР, т. 150, № 3, 1963, 480—483; Доп. АН УРСР, № 8, 1964.

Поступила 22.IX 1965 г.

Воронеж, Черновицы