Характеризация типов конформно-плоских римановых пространств четырех измерений

П. И. Петров

1. Э. Картан разложил [1] тензор кривизны R_{hijk} при $n=4$ на четыре неприводимые части: R — скалярная кривизна, $B_{ij}=R_{ij}-\frac{R}{4}g_{ij}$ и два тензора (в широком смысле слова) с пятью существенными определяющими каждый. Пусть $\underset{h}{\lambda}^{i}$ — векторы ортонормального репера, ассоциированного с основной формой риманового многообразия V_4. Положим $\overline{R}_{hijk}=R_{\alpha\beta\gamma\delta}\underset{h}{\lambda}^{\alpha}\underset{i}{\lambda}^{\beta}\underset{j}{\lambda}^{\gamma}\underset{k}{\lambda}^{\delta}$. Для всевозможных значений сигнатуры s основной формы ds^2 пространства V_4 те линейные однородные комбинации величин $\overline{R}_{hijk}$ с постоянными коэффициентами, которые образуют неприводимые части тензора кривизны с пятью компонентами, можно интерпретировать как евклидовы симметрические тензоры $T_{\alpha\beta}$, $\overline{T}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ с равными нулю следами в трехмерном пространстве Евклида [2]. Обозначим через C_4 конформно-плоское пространство V_4, которое характеризуется условиями $T_{\alpha\beta}=0$, $\overline{T}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}=0$. В работе [3] дана классификация многообразий C_4 по их дифференциальным инвариантам.

Цель настоящей статьи — аналитически охарактеризовать фундаментальный тензор $g_{ij}(u)$ каждого из типов конформно-плоских римановых пространств четырех измерений.

2. Для решения поставленной задачи нам понадобится одно вспомогательное сведение из области теории линейных вектор-функций первого рода. Оно относится к вопросу характеризации типов вектор-функций четырехмерного пространства. Вектор-функции $\bar{y}=A(\bar{x})$ или $y^{\alpha}=a^{\alpha}_{\beta}x^{\beta}$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 \\ a^4_1 & a^4_2 & a^4_3 & a^4_4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

В алгебре тензоров [4], объединяя в один тип матрицы A, имеющие одну и ту же вейерштрассову характеристику $[e_1e_2e_3e_4]$, различают 14 типов линейных вектор-функций

I. [1111];

II. 1°. [211], 2°. [(11) 11];

III. 1°. [22], 2°. [2 (11)], 3°. [(11) (11)];

IV. 1°. [31], 2°. [(21) 1], 3°. [(111) 1];

V. 1°. [4], 2°. [(31)], 3°. [(22)], 4°. [(211)], 5°. [(1111)].

Коэффициенты σ_i характеристического полинома вектор-функции A (или матрицы A)

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 + 4\sigma_1\lambda^3 + 6\sigma_2\lambda^2 + 4\sigma_3\lambda + \sigma_4 \tag{2}$$

выражаются через A с помощью следующих формул:

$$\sigma_0 E = E,$$

$$\sigma_1 E = \frac{1}{24}\varphi'''(A) - A,$$

$$\sigma_2 E = \frac{1}{12}\varphi''(A) - \frac{A}{12}\varphi'''(A) + A^2, \tag{3}$$

$$\sigma_3 E = \frac{1}{4}\varphi'(A) - \frac{A}{4}\varphi''(A) + \frac{A^2}{8}\varphi'''(A) - A^3,$$

$$\sigma_4 E = A^4 - A\varphi'(A) + \frac{A^2}{2}\varphi''(A) - \frac{A^3}{6}\varphi'''(A).$$

Исходя из равенств (3), инварианты функции четвертой степени (2)

$$i = 2(\sigma_0\sigma_4 - 4\sigma_1\sigma_3 + 3\sigma_2^2),$$

$$j = 6(\sigma_0\sigma_2\sigma_4 - \sigma_0\sigma_3^2 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_2^3 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$$

можно представить в матричном виде:

$$i = \frac{1}{3\cdot 2^3}(\varphi''^2(A) - 2\varphi'(A)\varphi'''(A)),$$

$$j = \frac{1}{3^2\cdot 2^5}(3\varphi'(A)\varphi''(A)\varphi'''(A) - \varphi''^3(A) - 108\varphi'^2(A)). \tag{4}$$

Отсюда получаем матричную запись дискриминанта биквадратичного уравнения (2)

$$R = j^2 - \frac{1}{6}i^3. \tag{5}$$

Натуральное число, которое может быть вычислено по компонентам тензора, называется *арифметическим инвариантом* этого тензора, если оно остается неизменным при преобразованиях координат пространства. Например, ранг линейной вектор-функции — ее арифметический инвариант. Базируясь на этом факте, введем в рассмотрение три арифметических инварианта ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3:

ϱ_3 — ранг матрицы $\varphi'(A)$;

ϱ_2 — наибольшее число среди значений рангов матриц $\varphi'(A)$, $\varphi''(A)$, i, j;

ϱ_1 — наибольшее число среди значений рангов совокупности матриц $\varphi'(A)$, $\varphi''(A)$, $\varphi'''(A)$, i, j.

Лемма. *Арифметическими и алгебраическими характеристиками линейных вектор-функций первого рода при $n = 4$ служат, соответственно:*

I. $(\varrho_1\varrho_2\varrho_3) = (444)$, $R \neq 0$.

II. 1° (443), $R = 0$, $i \neq 0$, $j \neq 0$;

2°. (442), $R = 0$, $i \neq 0$, $j \neq 0$.

III. 1°. (442), $R=0$, $i\neq 0$, $j\neq 0$, $\varphi'^2(A)=0$;

2°. (441), $R=0$, $i\neq 0$, $j\neq 0$, $\varphi'^2(A)=0$;

3°. (440), $R=0$, $i\neq 0$, $j\neq 0$, $\varphi'(A)=0$

IV. 1°. (432), $i=0$, $j=0$;

2°. (421), $i=0$, $j=0$;

3°. (411), $i=0$, $j=0$.

V. 1° (321), $\varphi'^2(A)=0$, $\varphi''^2(A)=0$, $\varphi''(A)\neq 0$, $\varphi'''^4(A)=0$, $\varphi'''^3(A)\neq 0$;

2°. (210), $\varphi''^2(A)=0$, $\varphi''(A)\neq 0$, $\varphi'''^3(A)=0$, $\varphi'''^2(A)\neq 0$;

3°. (200), $\varphi''(A)=0$, $\varphi'''^2(A)=0$, $\varphi'''(A)\neq 0$;

4°. (100), $\varphi''(A)=0$, $\varphi'''^2(A)=0$, $\varphi'''(A)\neq 0$;

5°. (000), $\varphi''(A)=0$, $\varphi'''(A)=0$.

Доказательство. 1) Если вейерштрассова характеристика матрицы A линейной вектор-функции первого рода выражается символом [1111], то в подходящим образом выбранной системе координат она приводится к нормальному виду Жордана

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — различные корни полинома $\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|$. Следствием формулы (6) является равенство

$$\varphi'(A)=\begin{pmatrix}\varphi'(\lambda_1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi'(\lambda_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi'(\lambda_3) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(\lambda_4)\end{pmatrix} \tag{7}$$

Поскольку $\varphi(\lambda_i)=0$, $\varphi'(\lambda_i)\neq 0$, то $\varrho_3=4$. Далее, условие неравенства λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 между собой дает $R\neq 0$. Итак, для матрицы A с характеристикой [1111] имеем:

$$(\varrho_1\varrho_2\varrho_3)=(444),\qquad R\neq 0. \tag{8}$$

Обратно, в силу $R\neq 0$, у характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы A все четыре корня различны. Стало быть, A приводится к диагональному виду (6), а характеристика ее записывается символом [1111].

2) Матрицу A с характеристикой [211] возьмем в форме Жордана

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — различные числа. Тогда имеем:

$$\varphi'(A)=\begin{pmatrix}0 & \varphi''(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi'(\lambda_2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(\lambda_3)\end{pmatrix},$$

$$
i = \frac{1}{3\cdot 2^3}\begin{pmatrix} \varphi''^2(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi''^2(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi''^2(\lambda_2) - 2\varphi'(\lambda_2)\varphi'''(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi''^2(\lambda_3) - 2\varphi'(\lambda_3)\varphi'''(\lambda_3) \end{pmatrix}
$$

$$
j = \frac{1}{3^2\cdot 2^5}\begin{pmatrix} -\varphi''^3(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi''^3(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 3\varphi'(\lambda_2)\varphi''(\lambda_2)\varphi'''(\lambda_2) - \varphi''^3(\lambda_2) - \\ -108\varphi'^2(\lambda_2) \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} 3\varphi'(\lambda_3)\varphi''(\lambda_3)\varphi'''(\lambda_3) - \\ -\varphi''^3(\lambda_3) - 108\varphi'^2(\lambda_3) \end{matrix} \end{pmatrix}
$$

Ранги матриц $\varphi'(A)$, i, j, соответственно, равны 3, 4, 4. Значит, для матриц A, заданных формулой (9), выполняются условия:

$$
(443),\ R = 0,\ i \neq 0,\ j \neq 0. \tag{10}
$$

Канонический вид матрицы A, удовлетворяющей условиям (10), либо дается формулой (9), либо следующей:

$$
A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{11}
$$

так как из требований $R = 0$, $i \neq 0$, $j \neq 0$ следует $|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)^2 \times \times (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. Гипотеза о сводимости A к виду (11) отпадает, ибо для матрицы (11) $\varrho_3 = 2$, что противоречит предположению $\varrho_3 = 3$ согласно (10). Итак, ее характеристика [211].

3) Рассуждения, аналогичные только что приведенным, обнаруживают, что условия

$$
(442),\ R = 0,\ i \neq 0,\ j \neq 0 \tag{12}
$$

являются характерными для матриц с характеристикой [(11) (11)].

4) Предположим, что матрица A, имеющая характеристику [22], представлена в каноническом виде

$$
A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{13}
$$

где $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В случае матриц, заданных равенством (13), имеем.

$$
\varphi'(A) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi''(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi''(\lambda_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
i = \frac{1}{3\cdot 2^3}\begin{pmatrix} \varphi''^2(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi''^2(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi''^2(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi''^2(\lambda_2) \end{pmatrix},
$$

$$j = \frac{1}{3^2 \cdot 2^5} \begin{pmatrix} -\varphi''^3(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi''^3(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi''^3(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi''^3(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица A с вейерштрассовой характеристикой [22] удовлетворяет условиям

$$(442), \quad R = 0, \quad i \neq 0, \quad j \neq 0, \quad \varphi'^2(A) = 0. \tag{14}$$

Перечисленными здесь свойствами вполне характеризуются тензоры a^{α}_{β} типа [22]. Из предпосылок $R = 0$, $i \neq 0$, $j \neq 0$, поступая сообразно с известным положением алгебры многочленов, заключаем о наличии двукратного корня у многочлена $\varphi(\lambda) = |\lambda E - A|$. Согласно гипотезе $\varphi'^2(A) = 0$, каждый корень этого многочлена, по крайней мере, двукратный. В то же время уравнение $\varphi(\lambda) = 0$, в силу условий $i \neq 0$, $j \neq 0$, не может иметь трехкратного корня. Стало быть, $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^2$. Канонический вид Жордана такой матрицы совпадает либо с матрицей (13), либо с одной из указанных ниже:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (а), \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (б). \tag{15}$$

Ранги матриц $\varphi'_a(A)$, $\varphi'_b(A)$, соответственно, равны 1,0. Значит, матрица A при условиях (14), будучи приводимой к виду (13), имеет характеристику [22].

5) Посредством рассуждений, весьма близких к тем, которые применялись в случае 4), можно убедиться, что соотношения

$$(441), \; R = 0, \; i \neq 0 \;\; j \neq 0, \; \varphi'^2(A) = 0 \tag{16}$$

характеризуют матрицы A с характеристической [2(11)].

6) Матрицы A типа [(11) (11)] выделяются из множества всех матриц условиями:

$$(440), \; R = 0, \; i \neq 0, \; j \neq 0, \; \varphi'(A) = 0. \tag{17}$$

7) Пусть A имеет вейерштрассову характеристику [31]. Полагая

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, обнаруживаем, что

$$\varphi'(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\varphi'''(\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(\lambda_2) \end{vmatrix},$$

$$\varphi''(A) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'''(\lambda_1) & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'''(\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi''(\lambda_2) \end{pmatrix},$$

$$\varphi'''(A)=\begin{pmatrix}\varphi'''(\lambda_1) & 24 & 0 & 0\\ 0 & \varphi'''(\lambda_1) & 24 & 0\\ 0 & 0 & \varphi'''(\lambda_1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi'''(\lambda_2)\end{pmatrix},$$

$$i=0, \qquad j=0.$$

Итак, матрицы A, представимые формулой (18), обладают свойствами:

$$(432),\ i=0,\ j=0. \tag{19}$$

Предположим, что матрица A некоторой линейной вектор-функции первого рода удовлетворяет указанным в (19) ограничениям. Прежде всего, в силу $i=0$, $j=0$ следует, что $|\lambda E - A| = (\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)$. Поэтому A преобразуется либо к виду (18), либо к одной из следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}(\alpha), \qquad A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}(\beta). \tag{20}$$

Арифметический инвариант ϱ_3 обеих матриц (20) равен 1. По этой причине канонический вид матрицы A будет (18), а ее характеристика запишется символом [31].

8) Повторив уже использованный выше прием исследования, легко доказать, что отличительными признаками матриц, приводимых к видам $(20\cdot\alpha)$, $(20\cdot\beta)$, соответственно, будут:

$$(421), \qquad i=0, \qquad j=0, \tag{21}$$

$$(411), \qquad i=0, \qquad j=0. \tag{22}$$

9) Пусть A будет типа [4]. Взяв ее в виде

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \tag{23}$$

нетрудно убедиться, что имеют место условия:

$$(321), \quad \varphi'^2(A)=0, \quad \varphi'(A)\neq 0, \quad \varphi''^2(A)=0, \quad \varphi''(A)\neq 0,$$

$$\varphi'''^4(A)=0, \quad \varphi'''^3(A)\neq 0. \tag{24}$$

Обратно, если λ_1 — корень характеристического полинома $\varphi(\lambda_1) = |\lambda E - A|$, то $\varphi'(\lambda_1)$, $\varphi''(\lambda_1)$, $\varphi'''(\lambda_1)$ являются характеристическими числами, соответственно, функций $\varphi'(A)$, $\varphi''(A)$, $[\varphi'''(A)]^2$. Согласно гипотезе о выполнении условий (24), эти последние нильпотентны. Следовательно, все характеристические числа их равны нулю, т. е. $\varphi'(\lambda_1)=0$, $\varphi''(\lambda_1)=0$, $\varphi'''(\lambda_1)=0$. Канонический жорданов вид матрицы A, имеющей четыре равных характеристических числа, совпадает либо с матрицей (23), либо с одной из следующих:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}. \tag{25}$$

У всех четырех матриц ряда (25) арифметические инварианты ϱ_3 равны нулю. Поэтому гипотезе $\varrho_3 = 1$ отвечает лишь (23), имеющая характеристику [4].

Доказательство остальных утверждений леммы не представляет затруднений.

3. Когда вещественная неособенная квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ij}(u)\, du^i du^j, \tag{26}$$

положенная в основу мероопределения риманового многообразия V_4, определенно положительная, как известно, элементарные делители λ-матрицы

$$\| \lambda g_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} \| \tag{27}$$

простые. Так как элементарные делители матрицы (27) те же, что и у матрицы

$$\| \lambda g^{\alpha}_{\beta} - B^{\alpha}_{\beta} \|, \tag{28}$$

где $B^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\tau} B_{\tau\beta}$, то путь для приложения леммы п. 2 открыт. Положим $B = (B^{\alpha}_{\beta})$, $\varphi(\lambda) = |\lambda E - B|$; пусть ϱ_3 — ранг матрицы $\varphi'(B)$; ϱ_2 — наибольшее натуральное число среди значений рангов матриц $\varphi'(B)$, $\varphi''(B)$, $i(B)$, $j(B)$, где i, j — матричные выражения инвариантов характеристического многочлена вектор-функции B; ϱ_1 — наибольшее неотрицательное целое число среди значений рангов матриц $\varphi'(B)$, $\varphi''(B)$, $\varphi'''(B)$, $i(B)$, $j(B)$. Под типом пространства C_4 условимся разуметь тип той вектор-функции B, которую определяет смешанный тензор второй валентности B^{α}_{β}, соответствующий метрическому тензору $g_{ij}(u)$ рассматриваемого пространства.

Пользуясь введенными здесь термином и обозначениями, можно высказать предложение:

Т е о р е м а 1. *C_4 с определенно положительным мероопределением простого типа. Фундаментальные тензоры g_{ij} (u) разновидностей пространства C_4 характеризуются одним из перечисленных ниже наборов арифметических инвариантов* $(\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3)$ *и дифференциальных систем*:

$\boxed{\begin{array}{l} T_{ik} = 0 \\ T_{\bar i \bar k} = 0 \end{array}}$ — I.
- 1. (444), $R \neq 0$, если характеристика C_4 [1111];
- 2. (442), $R \neq 0$, $i \neq 0$, $j \neq 0$, если [(11) 11];
- 3. (440), $R = 0$, $i \neq 0$, $j \neq 0$, $\varphi'(B) = 0$, если [(11)(11)];
- 4. (411), $i = 0$, $j = 0$, если [(111) 1];
- 5. (000), $\varphi''(B) = 0$, $\varphi'''(B) = 0$, если [(1111)].

Метрический тензор g_{ij} $(u_1\, u_2 u_3 u_4)$ пространства C_4, $s = 4$, любого из 5 разновидностей, таким образом, аналитически определяется дифференциальной системой (S), состоящей из уравнений $T_{ij} = 0$, $T_{\bar i \bar j} = 0$, выделяющих C_4 из множества всех возможных V_4, и одной из систем (I, k) ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Поэтому вопрос о существовании C_4, $s = 4$, есть вопрос о совместности хотя бы при одном значении k системы

$$T_{ik} = 0, \qquad T_{\bar i \bar k} = 0 \qquad (\mathrm{I},\ k). \tag{29}$$

Он разрешается в утвердительном смысле, так как в работе автора [3] построен пример пространства C_4, $s = 4$.

4. Процесс применения вспомогательной теоремы п. 2 о линейных вектор-функциях к проблеме характеризации типов пространств C_4, $s = -2$, протекает так же, как и в случае $s = 4$. Нужно лишь помнить, что здесь коэффициенты g_{ij} (u) формы ds^2 удовлетворяют неравенствам, обеспечивающим требование $s = -2$, а В символизирует матрицу, отвечающую таким образом выбранному тензору $g_{ij}(u)$. Тогда факт существования трех типов пространств C_4, $s=-2$, с характеристиками *I*. [1111], *II*. [211], *III*. [31] можно сформулировать так:

Т е о р е м а 2. *При $s=-2$ существуют три типа пространств C_4, характеризующихся, соответственно, условиями*:

$\boxed{T_{ik}=0}$ —
- (I, k).
- II.
  - 1. (443), $R=0$, $i\neq 0$, $j\neq 0$, *если* [211];
  - 2. (441), $R=0$, $i\neq 0$, $j\neq 0$, $\varphi'^2(B)=0$, *если* [2(11)];
  - 3. (421), $i=0$, $j=0$, *если* [(21)1];
  - 4. (100), $\varphi''(B)=0$, $\varphi'''^2(B)=0$, $\varphi'''(B)\neq 0$, *если* [(211)];
- III.
  - 1. (432), $i=0$, $j=0$, *если* [31];
  - 2. (210), $\varphi''^2(B)=0$, $\varphi''(B)\neq 0$, $\varphi'''^3(B)=0$, $\varphi'''^2(B)\neq 0$, *если* [(31)].

Приведенная выше схема показывает, что метрические тензоры $g_{ij}(u_1u_2u_3u_4)$ пространств C_4, $s=-2$ являются интегралами дифференциальной системы (S), состоящей из условий конформности $T_{ik}=0$ и одного из соотношений (I, k), (II, l), (III, m), где $k=1, 2, \ldots, 5$; $l=1, 2, 3, 4$; $m=1, 2$. Система совместна, по крайней мере, при одном значении k, l, m, ибо автором в [3] доказано существование всех трех типов C_4, $s=-2$.

5. В случае $s=0$ имеет место

Т е о р е м а 3. *Существуют пять типов пространств C_4 нулевой сигнатуры, характеризующихся, соответственно, условиями*:

$\boxed{\begin{array}{l} T_{ik}=0 \\ \overline{T}_{ik}=0 \end{array}}$ —
- (I, k);
- (II, l);
- (III, m)
- IV.
  - 1 (442), $R=0$, $i\neq 0$, $j\neq 0$, $\varphi'^2(B)=0$, *если* [22];
  - 2 (200), $\varphi''(B)=0$, $\varphi'''^2(B)=0$, $\varphi'''(B)\neq 0$, *если* [(22)];
- V.
  - 1 (321), $\varphi'^2(B)=0$, $\varphi'(B)\neq 0$, $\varphi''^2(B)=0$, $\varphi''(B)\neq 0$, $\varphi'''^4(B)=0$, $\varphi'''^3(B)\neq 0$, *если* [4].

Примеры статьи [3] показывают существование каждого из перечисленных 5 типов многообразий C_4 нулевой сигнатуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. C a r t a n, La géometrie des espaces de Riemann. Memorial des sciences mathematiques, fasc., IX, 1925, Paris, 32—33.
2. П. И. П е т р о в, Инварианты и классификация дифференциальных квадратичных форм от четырех переменных, Изв. АН СССР, сер., матем., т. 23, 1959, 387—420.
3. П. И. П е т р о в, Классификация конформно-плоских римановых пространств четырех измерений, Бюлл. Польск. АН, сер. матем., астр. и физ. наук, т. XI, № 4, 1963, 169—17[illegible].
4. П. А. Ш и р о к о в, Тензорное исчисление, гл. III, Гостехиздат, М.—Л., 1934.

Поступила 23.IX 1965 г.
Казань