1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II

А. М. Самойленко

В настоящей статье рассматривается вопрос существования периодических решений T-систем и приводятся вычислительные схемы, по которым находятся эти решения. Общие положения метода иллюстрируются на примере исследования вынужденных колебаний маятника, подверженного периодическим импульсам.

Статья является непосредственным продолжением [1], в ней сохранены те же определения и обозначения.

§ 1. Существование периодических решений

Согласно следствию [1] существование периодических решений T-системы равносильно существованию точек τ, x_0, для которых Δ-постоянная равна нулю.

В точке

$$(\tau, x_0) \in (-\infty, \infty) \times D - \frac{\vec{M}T}{2} \tag{1.1}$$

Δ-постоянная определяется выражением

$$\Delta(\tau, x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_\infty(t, \tau, x_0))\,dt, \tag{1.2}$$

где $x_\infty(t, \tau, x_0)$ — предел последовательности периодических функций

$$x_m(t, \tau, x_0) = x_0 + \int_\tau^t [f(t, x_{m-1}(t, \tau, x_0)) - \overline{f(t, x_{m-1}(t, \tau, x_0))}]\,dt. \tag{1.3}$$

При фиксированном τ точки x_0, для которых $\Delta = 0$, являются особыми точками отображения

$$\Delta : D - \frac{\vec{M}T}{2} \to E_n, \qquad \Delta(x_0) = \overline{f(t, x_\infty(t, \tau, x_0))}. \tag{1.4}$$

Найти отображение (1.4) можно лишь приближенно, вычисляя, например, функции

$$\Delta_m(x_0) = \overline{f(t, x_m(t, \tau, x_0))}. \tag{1.5}$$

Возникает поэтому задача, как, исходя из отображения (1.5), заключить о нулях отображения Δ, а следовательно, заключить о периодических решениях T-системы.

Для решения последней задачи мы применим, следуя И. Берштейну и А. Халанаю [2], М. А. Красносельскому и А. И. Перову [3], некоторые геометрические критерии ([4], теоремы [5 : 11], [5 : 12]).

Теорема 1. *Пусть для T-системы*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{I}$$

заданной в области D пространства E_n, выполняются условия:

1) *для некоторого вещественного τ и целого m отображение* (1.5) *имеет изолированную особую точку:* $\Delta_m(x^0) = 0$;

2) *индекс этой точки отличен от нуля;*

3) *существует замкнутая выпуклая область D_1, принадлежащая $D - \frac{\vec{M}T}{2}$ и имеющая x^0 единственной особой точкой, такая, что на ее границе Γ_{D_1} выполняется неравенство*

$$\inf_{x \in \Gamma_D} \| \Delta_m(x) \| \geqslant \frac{3,1}{3} \left\| \left(\frac{\overleftrightarrow{K}T}{3,1} \right)^{m+1} \left[\left(E - \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3,1} \right)^{-1} + \frac{\delta_{1m}}{30} E \right] \vec{M} \right\|. \tag{II}$$

Тогда система (I) *имеет периодическое решение $x = x(t)$, для которого $x(\tau) \in D_1$.*

Доказательство. По определению индекс изолированной особой точки x^0 непрерывного отображения Δ_m равен характеристике векторного поля, порожденного отображением Δ_m, на достаточно малой сфере S^{n-1} с центром в x^0. Так как в D_1 нет отличных от x^0 особых точек и D_1 гомеоморфно единичному шару E_n (см., например, [5]), то характеристика векторного поля Δ_m на сфере S^{n-1} равна характеристике этого же поля на Γ_{D_1}.

Поля Δ_m и Δ (Δ — поле, порожденное отображением (1.4)) гомотопны на Γ_{D_1}. Последнее следует из того, что непрерывно зависящее от параметра θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, семейство везде непрерывных на Γ_{D_1} векторных полей

$$V(\theta, x_0) = \Delta_m(x_0) + \theta(\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)), \tag{1.6}$$

соединяющее поля $V(0, x_0) = \Delta_m(x_0)$ и $V(1, x_0) = \Delta(x_0)$, нигде не обращается на Γ_{D_1} в нуль. Действительно, согласно неравенству (2.30) [1] верна оценка

$$|\Delta(\tau, x_0) - \Delta_m(\tau, x_0)| < \frac{3,1}{3} \left(\frac{\overleftrightarrow{K}T}{3,1} \right)^{m+1} \left[\left(E - \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3,1} \right)^{-1} + \frac{\delta_{1m}}{30} E \right| \vec{M} \tag{1.7}$$

и, следовательно, на Γ_{D_1} имеет место неравенство

$$\| V(\theta, x_0) \| \geqslant \| \Delta_m(x_0) \| - \| \Delta_m(x_0) - \Delta(x_0) \| > 0. \tag{1.8}$$

Характеристики гомотопных на компакте полей равны ([4], теорема [5 : 11]). Поэтому характеристика на Γ_{D_1} поля Δ равна индексу особой точки x^0 поля Δ_m и отлична, следовательно, от нуля. В силу теоремы [5 : 12] из [4] последнего достаточно, чтобы векторное поле Δ имело в D_1 особую точку, т. е. точку x_0^0, для которой

$$\Delta(x_0^0) = 0. \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) с учетом следствия [1] доказывает теорему.

Проверка условия 2) теоремы требует вычисления индекса изолированной особой точки. Для плоскости, т. е. при $E_n = E_2$, такое вычисление всегда осуществимо (см., например, [6]). Для пространства E_n размерности большей, чем 2, подсчет индекса существенно затрудняется. Однако и в этом случае имеется ряд достаточных критериев, позволяющих заключить о его величине. Так, в частности, если Δ_m — топологическое отображение некоторой окрестности D_1 особой точки, то индекс этой точки равен ± 1 (см., например, [4]).

Проверка условия 3) теоремы требует подходящего выбора области D_1. Однако для ряда систем условие 3) выполняется для более или менее произвольно выбранной области. Так, в частности, для периодических по времени систем стандартного вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x)$$

(ε — малый положительный параметр) условие 3) выполняется для любого достаточно малого шара с центром в особой точке, лишь только ε достаточно мало.

Для случая, когда $E_n = E_1$, т. е. когда x представляет скалярную величину, теорему 1 можно усилить, отказавшись от требования изолированности особой точки.

Именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ прямой E_1 задана T-система*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{III}$$

Предположим, что для некоторого вещественного τ и целого m функция (1.5) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \inf_{a+\frac{MT}{2} \leqslant x \leqslant b-\frac{MT}{2}} \Delta_m(x) &\leqslant -\frac{3,1}{3} q^{m+1}\left(\frac{1}{1-q} + \frac{\delta_{1m}}{30}\right) M, \\ \sup_{a+\frac{MT}{2} \leqslant x \leqslant b-\frac{MT}{2}} \Delta_m(x) &\geqslant \frac{3,1}{3} q^{m+1}\left(\frac{1}{1-q} + \frac{\delta_{1m}}{30}\right) M, \end{aligned} \tag{IV}$$

в которых положено $q = \frac{KT}{3,1}$. Тогда уравнение (III) *имеет периодическое решение $x = x(t)$, для которого $a + \frac{MT}{2} \leqslant x(\tau) \leqslant b - \frac{MT}{2}$.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — точки отрезка $\left| a + \frac{MT}{2}, b - \frac{MT}{2} \right|$ такие, что

$$\Delta_m(x_1) = \inf \Delta_m(x); \qquad \Delta_m(x_2) = \sup \Delta_m(x) \quad \left(x \in \left[a + \frac{MT}{2}, b - \frac{MT}{2}\right]\right).$$

С учетом неравенств (1.7) и (IV) имеем тогда

$$\begin{aligned} \Delta(x_1) &= \Delta_m(x_1) + [\Delta(x_1) - \Delta_m(x_1)] \leqslant 0, \\ \Delta(x_2) &= \Delta_m(x_2) + [\Delta(x_2) - \Delta_m(x_2)] \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.10) в силу непрерывности следует существование точки x^0, $x^0 \in [x_1, x_2]$, такой, что $\Delta(x^0) = 0$. Последнее неравенство доказывает теорему.

В случае $m = 0$ $\Delta_0(x) = \overline{f(t, x)}$ и теоремы 1 и 2 устанавливают условия существования периодических решений системы (I) по усредненной системе

$$\frac{dx}{dt} = \overline{f(t, x)}.$$

Эти условия более слабые, чем известные [7 — 9]. К тому же их можно ослабить, заменив правые части неравенств (II), (IV) на $\frac{\|\overleftrightarrow{K}\overrightarrow{M}\| T}{2}$.

§ 2. Отыскание периодических решений

Предположим, что существование периодического решения T-системы установлено. Требуется найти это решение. Благодаря следствию [1] решение поставленной задачи сводится к вычислению функций $x_m(t, \tau, x_0)$ последовательности (1.3) и к отысканию точки, через которую при $t = \tau$ проходит периодическое решение.

Вычисление x_m требует интегрирования периодических функций. Для его практического осуществления можно предложить следующую вычислительную схему.

Аппроксимируем $f(t, x)$ каким-либо образом функцией $p(t, x)$ полиномиального относительно $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вида. Пусть

$$p(t, x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(t)\, p_i(x), \tag{2.1}$$

где $p_i(x)$ — полиномы по x, $\alpha_i(t)$ — периодические функции, причем отклонение $f(t, x)$ от $p(t, x)$ не превосходит $\vec{a}$:

$$|f(t, x) - p(t, x)| \leqslant \vec{a}. \tag{2.2}$$

Подсчитываем интегралы

$$a_0^i = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_i(t)\, dt; \qquad a_k^i = \frac{2}{T}\int_0^T k^2 \alpha_i(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k^i = \frac{2}{T}\int_0^T k^2 \alpha_i(t) \sin k\omega t dt \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{2.3}$$

для $k = 1, \ldots, N_i$.

По подсчитанным их значениям $\bar{a}_k^i$ и $\bar{b}_k^i$ строим выражение

$$p_1(t, x) = \sum_{i=1}^{l} \left| \bar{a}_0^i + \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{\bar{a}_k^i}{k^2} \cos k\omega t + \frac{\bar{b}_k^i}{k^2} \sin k\omega t \right) \right| p_i(x). \tag{2.4}$$

Функции $x_m(t)$ находим теперь по формуле

$$x_m(t) \simeq x_m'(t) = x_0 + \int_\tau^t [p_1(t, x_{m-1}'(t)) - \overline{p_1(t, x_{m-1}'(t))}]\, dt. \tag{2.5}$$

Удобство предлагаемой схемы состоит в том, что $x'_m(t)$ находятся точно и сразу для всех x_0, причем для их нахождения требуется производить элементарные операции (интегрирование тригонометрических полиномов). Действительно, так как $p_1(t, x)$ является тригонометрическим полиномом с полиномиальными по x коэффициентами, то и любая из функций $x'_m(t)$ — также тригонометрический полином и ее вычисление сводится к интегрированию тригонометрического полинома.

Относительно точности вычисления $x_m(t)$ по предлагаемой схеме верна следующая оценка. Пусть функции $\alpha_i(t)$ $(i = 1, \ldots, l)$ дважды кусочно-дифференцируемы, причем

$$\left|\frac{d^2\alpha_i(t)}{dt^2}\right| \leqslant \vec{L}_i \; . \tag{2.6}$$

Тогда для любого $m \geqslant 1$ и всех $x_0 \in D - \frac{\vec{M} + \vec{a} + \vec{b}}{2} T$

$$|x_m(t) - x'_m(t)| < \frac{T}{2}\left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\overleftrightarrow{K}T}{3{,}1}\right)^i + \frac{\overleftrightarrow{K}T}{93}\right](\vec{a} + \vec{b}), \tag{2.7}$$

где

$$\vec{b} = \max_{t, x \in D}|p(t, x) - p_1(t, x)| < \sum_{i=1}^{l}\left[\delta_i\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) + \frac{\vec{L}_i}{\omega^2}\,\frac{2N_i + 1}{N_i(N_i + 1)}\right]\vec{p}_i, \tag{2.8}$$

$\vec{p}_i = \max\limits_{x \in D}|p_i(x)|$, δ — ошибка вычисления интегралов (2.3).

Действительно, если $x_m(t) \in D$ для всех $m \geqslant 1$, то

$$|x_m(t) - x'_m(t)| \leqslant 2(t - \tau)\left(1 - \frac{t - \tau}{T}\right)(\vec{a} + \vec{b}) + \overleftrightarrow{K}\left[\left(1 - \frac{t - \tau}{T}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\tau}^{t}|x_{m-1}(t) - x'_{m-1}(t)|\,dt + \frac{t - \tau}{T}\int_{t}^{\tau+T}|x_{m-1}(t) - x'_{m-1}(t)|\,dt\right]$$

для $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$, откуда следует

$$|x_m(t) - x'_m(t)| \leqslant [\alpha_1(t) + \overleftrightarrow{K}\alpha_2(t) + \ldots + \overleftrightarrow{K}^{m-1}\alpha_m(t)](\vec{a} + \vec{b}), \tag{2.9}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — функции, определяемые соотношением (2.8) [1]. Учитывая лемму 2 [1], из (2.9) получаем

$$|x_m(t) - x'_m(t)| < \left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\overleftrightarrow{K}T}{3{,}1}\right)^i + \frac{\overleftrightarrow{K}T}{93}\right]\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}T.$$

Но $x_1 \in D - \frac{\vec{M} + \vec{a} + \vec{b}}{2}T$, поэтому из (2.5) следует $|x'_1(t) - x_0| < \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{M}}{2}T$, т. е. $x'_1(t) \in D$.

По индукции легко заключить, что $x'_m(t) \in D$ для всех $m \geqslant 1$. Неравенство (2.7) доказано.

Неравенство (2.8) следует из разложения

$$p(t, x) - \overline{p(t, x)} = \sum_{i=1}^{l} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k^i}{k^2} \cos k\omega t + \frac{b_k^i}{k^2} \sin k\omega t \right) \right\} p_i(x)$$

в силу оценки

$$|a_k^i| + |b_k^i| \leqslant \frac{2\vec{L}_i}{\omega^2}.$$

Функцию $x'_m(t, \tau, x_0)$ будем принимать за вычисленное m-е приближение к периодическому решению T-системы, проходящему через точку τ, x_0. Согласно [1] отклонение этого решения $x = \varphi(t)$ от $x'_m(t, \tau, x_0)$ оценивается неравенством

$$|\varphi(t) - x'_m(t, \tau, x_0)| < \vec{d}_m + |x_m(t) - x'_m(t, \tau, x_0)|, \tag{2.10}$$

в котором

$$\vec{d}_m = \left(\frac{\overleftrightarrow{K} T}{3,1} \right)^m \left[\left(E - \frac{\overleftrightarrow{K} T}{3,1} \right)^{-1} + \frac{\delta_{1m}}{30} E \right] \frac{\vec{M} T}{2}. \tag{2.11}$$

Отыскание точек x_0, через которые при $t = \tau$ проходят периодические решения, представляет трудоемкую задачу. Однако в некоторых случаях ее решение становится тривиальным. Укажем один из таких случаев.

Теорема 3. *Пусть правая часть системы*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.12}$$

определена на множестве

$$-\infty < t < \infty, \qquad x \in D \tag{2.13}$$

и удовлетворяет условиям:

1. *Функция $f(t, x)$ периодична по t с периодом T, ограничена постоянной $\vec{M}$ и удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной $\overleftrightarrow{K}$:*

$$|f(t, x)| \leqslant \vec{M}, \qquad |f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \overleftrightarrow{K} |x' - x''|. \tag{2.14}$$

2. *Для любого $x \in D$ и всех $t \in (-\infty, \infty)$*

$$f(t, x) = -f(-t, x). \tag{2.15}$$

Тогда все решения $x = x(t)$ системы (2.12), *для которых* $x(0) \in D - \dfrac{\vec{M} T}{2}$, *периодичны с периодом T.*

Теорема утверждает, следовательно, что область $D - \dfrac{\vec{M} T}{2}$ состоит из начальных значений периодических решений.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D - \dfrac{\vec{M} T}{2}$. Рассмотрим последовательные приближения

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x_m(t))\, dt \tag{2.16}$$

$$(m = 0, 1, \ldots).$$

Так как $f(t, x_0)$ — нечетная функция, то $\overline{f(t, x_0)} = 0$. Поэтому

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_0) - \overline{f(t, x_0)}]\, dt = x_1(t + T),$$

т. е. функция $x_1(t)$ периодична по t с периодом T. Более того, $|x_1(t) - x_0| \leqslant \leqslant \frac{\vec{M}T}{2}$, т. е. $x_1(t) \in D$. Наконец, $x_1(t) = x_1(-t)$ как интеграл от нечетной функции.

По индукции легко заключить, что для всех $m \geqslant 1$ функции $x_m(t)$ определены для $t \in (-\infty, \infty)$, периодичны по t с периодом T, удовлетворяют соотношению

$$x_m(t) = x_m(-t) \tag{2.17}$$

и неравенству

$$|x_m(t) - x_0| \leqslant \frac{\vec{M}T}{2}. \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует равномерная ограниченность семейства $\{x_m(t)\}$, а из неравенства

$$|x_m(t) - x_0| \leqslant \vec{M}t$$

— равностепенная непрерывность этого семейства.

По теореме Арцела заключаем, что из $\{x_m(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность:

$$\{x_{m_k}(t)\}:\ x_{m_k}(t) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} x(t). \tag{2.19}$$

Переходя в (2.16) к пределу, убеждаемся, что предельная функция $x(t)$ подпоследовательности (2.19) является периодическим решением системы (2.12), причем таким, что $x(0) = x_0$.

В общем случае отыскание начальных значений периодических решений T-системы следует производить численным методом. Для этого можно использовать следующее свойство Δ-постоянной.

Лемма. *Пусть в области D задана T-система. Предположим, что D_1 — некоторое множество, принадлежащее $D - \frac{\vec{M}T}{2}$. Тогда, чтобы в D_1 нашлась точка, в которой Δ-постоянная равна нулю, необходимо, чтобы для некоторого τ, всех целых m и любого $x_1 \in D_1$ выполнялось неравенство*

$$|\Delta_m(\tau, x_1)| < \sup_{x\in D_1} \overleftrightarrow{K}\left[E + \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3}\left(E - \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3.1}\right)^{-1} + \frac{\overleftrightarrow{K}^2T^2}{279}\right]|x - x_1| + \frac{2}{3}\overleftrightarrow{K}\vec{d}_m, \tag{V}$$

в котором Δ_m — m-е приближение к Δ-постоянной, определяемое согласно (1.5), *$\vec{d}_m$ — вектор, определяемый равенством* (2.11),

$$\sup_{x\in D_1} \overleftrightarrow{K}|x - x_1| = \left\{\sup_{x\in D_1} \sum_{j=1}^{n} K_{1j}|x_j - x_j'|, \ldots, \sup_{x\in D_1} \sum_{j=1}^{n} K_{nj}|x_j - x_j'|\right\}.$$

Учитывая лемму, для отыскания начальных значений периодических решений, поступаем следующим образом. Разбиваем множество $D - \frac{\vec{M}T}{2}$ на конечное число подмножеств D_i. Выбираем в каждом D_i по одной точке $x = x^{(i)}$ и вычисляем $\Delta_m(\tau, x^{(i)})$ для некоторого m. Сравнивая $\Delta_m(\tau, x^{(i)})$

с правой частью неравенства (V), отбрасываем те из множеств D_i как не имеющие точек, через которые при $t = \tau$ проходят периодические решения, для которых выполняется неравенство

$$|\Delta_m(\tau, x^{(i)})| > \sup_{x \in D_i} \overleftrightarrow{K} \left| E + \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3} \left(E - \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3,1}\right)^{-1} + \frac{\overleftrightarrow{K}^2 T^2}{279} \right| |x - x^{(i)}| + \frac{2}{3} \overleftrightarrow{K} \vec{d}_m. \tag{2.20}$$

Оставшиеся D_i образуют множество $\mathfrak{M}_m^{(i)}$, через точки которого только и могут проходить периодические решения T-системы. Для случая, когда $\Delta_m(\tau, x)$ находится сразу для всех $x \in D - \frac{\vec{M}T}{2}$, множество $\mathfrak{M}_m^{(i)}$ не зависит от $i : \mathfrak{M}_m^{(i)} = \mathfrak{M}_m$ и состоит из точек, удовлетворяющих неравенству

$$|\Delta_m(\tau, x)| \leqslant \frac{2}{3} \overleftrightarrow{K} \vec{d}_m. \tag{2.21}$$

Так как $\mathfrak{M}_m^{(i)}$ при i, $m \to \infty$ стремится к множеству $\mathfrak{M}$ начальных значений периодических решений, то любую точку x_1 из $\mathfrak{M}_m^{(i)}$ можно взять за m-е приближение к начальному значению x_0 периодического решения. При этом точность нахождения x_0 определяется неравенством:

$$|x_1 - x_0| \leqslant \sup_{x \in \mathfrak{M}_m^{(i)}} |x_1 - x|, \tag{2.22}$$

а отклонение функции $x_m(t, \tau, x_1)$, которую естественно принять за приближенное значение периодического решения $x(t, \tau, x_0)$, от точного решения — неравенством

$$|x_m(t, \tau, x_1) - x(t, \tau, x_0)| \leqslant \vec{d}_m + \vec{d}'_m, \tag{2.23}$$

в котором $\vec{d}_m$ — вектор, определяемый согласно (2.11), а

$$\vec{d}'_m = \sup_{x \in \mathfrak{M}_m^{(i)}} \left[E + \left(E - \frac{\overleftrightarrow{K}T}{3,1}\right)^{-1} + \frac{\overleftrightarrow{K}T}{93} \right] |x - x_1|. \tag{2.24}$$

§ 3. Вынужденные периодические колебания маятника, подверженного действию периодически повторяющихся импульсов

Проиллюстрируем общие положения предлагаемого метода на примере решения следующей задачи.

Исследовать вынужденные периодические колебания математического маятника массы m и длины l, подверженного действию периодически повторяющихся импульсов, сосредоточенных в моменты $\nu t = 2\pi$, 4π, . . . , . . ., $2k\pi$, . . . ($k = 1$, . . .) и увеличивающих количество движения маятника в момент импульса на постоянную величину mE ($E > 0$).

Уравнения движения маятника под действием указанных сил имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (\nu t \neq 2k\pi),$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\nu t = 2k\pi + 0} - \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\nu t = 2k\pi - 0} = E. \tag{3.1}$$

Переход от системы (3.1) к уравнению с дельта-функцией [10] приводит (3.1) к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = \frac{E\nu}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k\nu t\right], \tag{3.2}$$

а замена переменных

$$x = y - \frac{E}{\pi\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\nu t}{k^2}, \qquad \frac{du}{dt} = z, \qquad \nu t = \tau \tag{3.3}$$

— к системе

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{z}{\nu}; \qquad \frac{dz}{d\tau} = \frac{E}{2\pi} - \frac{g}{l\nu}\sin\left(y - \frac{E}{\pi\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\tau}{k^2}\right). \tag{3.4}$$

Проверка условий A и B [1] показывает, что при

$$\nu \geqslant \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.5}$$

система (3.4) есть T-система (2π-система) в области

$$|y - y_1| \leqslant \alpha\pi, \qquad |z| \leqslant d_0, \tag{3.6}$$

лишь только α и d_0 удовлетворяют неравенствам

$$d_0 \geqslant \frac{E}{2} + \frac{g\pi}{l\nu}, \qquad \alpha \geqslant \frac{d_0}{\nu}, \tag{3.7}$$

а y_1 — фиксированная постоянная.

Будем предполагать в дальнейшем, что ν задано, а α и d_0 выбраны так, чтобы удовлетворять неравенствам (3.5), (3.7). К системе (3.4) можно применить тогда предложенный выше метод исследования и получить следующие утверждения.

1. Любое периодическое периода 2π решение системы (3.4), проходящее при $\tau = \tau_0$ через точку (y_0, z_0) области

$$|y - y_1| < \left(\alpha - \frac{d_0}{\nu}\right)\pi, \qquad |z| < d_0 - \left(\frac{E}{2} + \frac{g\pi}{l\nu}\right), \tag{3.8}$$

есть предел равномерно сходящейся последовательности функций

$$\begin{gathered} y_{m+1}(\tau) = y_0 + \frac{1}{\nu}\int_{\tau_0}^{\tau}[z_m(\tau) - \overline{z_m(\tau)}]\,d\tau, \\ z_{m+1}(\tau) = z_0 - \frac{g}{l\nu}\int_{\tau_0}^{\tau}\left\{\sin\left[y_m(\tau) - \frac{E}{\pi\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\tau}{k^2}\right] - \overline{\sin[\cdot]}\right\}d\tau. \end{gathered} \tag{3.9}$$

2. При

$$E > E_0 = \frac{2\pi g}{l\nu} \tag{3.10}$$

система (3.4) не имеет периодических решений, все решения — вращательные.

При

$$E \leqslant \frac{E_0}{4} \tag{3.11}$$

система (3.4) имеет периодическое периода 2π решение $y = y_0(\tau)$, $z = z_0(\tau)$ для всех $\nu \geqslant 25$ и всех $l \geqslant g$. Это решение не выходит из области

$$\left| y - \arcsin \frac{E}{E_0} \right| < \frac{\pi}{10}, \qquad |z| < 0{,}5. \tag{3.12}$$

3. Точка $y_0(0) = y_0$, $z_0(0) = z_0$, через которую при $\tau = 0$ проходит периодическое решение $y_0(\tau)$, $z_0(\tau)$, лежит в области

$$\left| y - \arcsin \frac{E}{E_0} \right| < \frac{\pi}{800}, \qquad |z| < 0{,}01. \tag{3.13}$$

так что с точностью, определяемой правой частью неравенств (3.13), $y_0 \simeq \arcsin \frac{E}{E_0}$, $z_0 \simeq 0$.

4. Решение $y_0(\tau)$, $z_0(\tau)$ имеет вид

$$y_0(\tau) \simeq y_0'(\tau) = \arcsin \frac{E}{E_0} - \frac{E}{\pi\nu} \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\tau - 1}{k^2 \left[\frac{l\nu^2}{g} k^2 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right]}; \tag{3.14}$$

$$z_0(\tau) \simeq z_0'(\tau) = \frac{E}{\pi} \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\tau}{k \left[\frac{l\nu^2}{g} k^2 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right]}.$$

При этом

$$|y_0(\tau) - y_0'(\tau)| < 0{,}01, \qquad |z_0(\tau) - z_0'(\tau)| < 0{,}05.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Самойленко, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I, УМЖ, т. XVII, № 4, 1965.
2. И. Берштейн, А. Халанай, Индекс особой точки и существование периодических решений систем с малым параметром, ДАН СССР, т. 111, № 5, 1956.
3. М. А. Красносельский, А. И. Перов, Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 123, № 2, 1958.
4. П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. Г. Зейферт, В. Трельфалль, Топология, ГОНТИ, М.—Л., 1938.
6. М. А. Красносельский [и др.], Векторные поля на плоскости, Физматгиз, М., 1963.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1955.
8. Ю. А. Митропольский, О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями, ДАН СССР, т. 128, № 6, 1959.
9. А. М. Самойленко, К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями, УМЖ, т. XV, № 3, 1963.
10. А. М. Самойленко, Исследование дифференциальных уравнений с «нерегулярной» правой частью, III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Akademie — Verlag, Berlin, 1965.

Поступила 3.XII 1964 г.
Киев