Поведение отображения в окрестности притягивающего множества

А. Н. Шарковский

Рассматривается непрерывное однозначное отображение T отрезка R вещественной прямой в себя. Под притягивающим множеством понимается множество ω-предельных точек последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in R$. Основные свойства, характеризующие структуру притягивающего множества и поведение отображения на нем, сформулированы в [1]. В дальнейшем притягивающие множества и только они обозначаются буквой Ω (с индексами или без них).

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [2]. В [2] рассмотрен случай, когда Ω — цикл.

Ниже доказываются две теоремы.

Теорема 1. *Если множество Ω содержит цикл, то во всякой открытой окрестности G множества Ω содержится цикл такой, что каждая компонента множества G, содержащая точки множества Ω, содержит хотя бы одну точку этого цикла.*

Эта теорема показывает, что множество Ω равномерно аппроксимируется циклами отображения T. Условие, чтобы Ω содержало цикл, существенно: если Ω не содержит циклов, то может существовать точка множества Ω, вообще не являющаяся предельной для точек циклов [3].

Обозначим $P(\Omega)$ множество, состоящее из точек $x \in R$, притягиваемых множеством Ω: $x \in P(\Omega)$, если множество ω-предельных точек последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ есть Ω.

Теорема 2. *Если Ω содержит цикл и во всякой окрестности множества Ω содержится множество $\Omega' \supset \Omega$, то $P(\Omega)$ есть множество третьего класса классификации Бэра — Валле-Пуссена*.*

Теорема 2 сформулирована в [1] и в случае, когда Ω — цикл, доказана в [2]. Ниже дается доказательство теоремы, когда Ω не является циклом (и, следовательно [1], является бесконечным множеством).

Как будет показано, среди бесконечных притягивающих множеств, содержащих циклы, можно различать три типа (см. таблицу). При этом множества $P(\Omega)$ не могут иметь более простую структуру, чем та, которая указана. Этим самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между указанными тремя типами множеств Ω и структурой множества $P(\Omega)$.

Самостоятельный интерес представляют собой также леммы 1, 7, 10, 11, 12. Достаточно тонкий результат содержится в лемме 9. Используя его, мы намерены в дальнейшем получить ряд новых результатов.

Лемма 1. *Пусть G_1, G_2 — открытые, F — замкнутые множества такие, что $F \subset \Omega \cap G_1$, $F \cap G_2 = \varnothing$, $TF = F$, F не изолировано во множестве*

* Классификация Бэра — Валле-Пуссена имеется в [4].

	Множество Ω таково, что	Структура множества $P(\Omega)$
1	Множеств $\Omega' \supset \Omega$ не существует	G_δ
2	Множества $\Omega' \supset \Omega$ существуют, но существует окрестность множества Ω, не содержащая множеств $\Omega' \supset \Omega$	$F_{\sigma\delta}$ и $G_{\delta\sigma}$
3	Во всякой окрестности множества Ω существует $\Omega' \supset \Omega$	$F_{\sigma\delta}$

$F \bigcup (\Omega \setminus (\Omega \bigcap \overline{G}_2))$* и $T\overline{G}_2 \subset \overline{G}_2 \bigcup (R \setminus \overline{G}_1)$. *Тогда найдется точка* $x \in \Omega \setminus F$: $x \overline{\in} G_2$, $T^j x \in \overline{G}_1 \setminus G_2$, $j = 1, 2, \ldots$

В формулировке леммы и приведенном ниже доказательстве можно предполагать, что R — произвольный компакт. Лемма 1 является обобщением теоремы 2 из [5]; чтобы получить последнюю, достаточно взять $G_2 = \varnothing$.

Положим $M^j = TM^{j-1} \setminus U$, $j = 1, 2, \ldots$, где $M^0 = \Omega \bigcap (R \setminus G_1)$, $U = \Omega \bigcap ((R \setminus \overline{G}_1) \bigcup G_2)$. Множества M^j замкнуты. Допустим, множества M^j, $j = 1, 2, \ldots$ не пусты. Обозначим N^j, $j \geqslant 1$, замкнутое множество, состоящее из точек $x \in M^0$, для которых $T^j x \in M^j$. Очевидно, $N^1 \supset N^2 \supset \ldots$ Множество $N = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} N^j$ не пусто, если $x \in N$, то $x \overline{\in} G_2$ и $T^j x \in \overline{G}_1 \setminus G_2$ при $j \geqslant 1$.

Предположим, существует номер j' такой, что множество $M^{j'}$ пусто. Это означает, что для любой точки $x \in M^0$ найдется номер $j'' \leqslant j'$ такой, что $T^{j''} x \in U$. Множество $P = \bigcup\limits_{j=0}^{j'-1} M^j$ замкнуто и $P \bigcap F = \varnothing$.

$$TP = \bigcup_{j=0}^{j'-1} TM^j \subset \bigcup_{j=1}^{j'} (M^j \bigcup U) \subset \bigcup_{j=0}^{j'-1} M^j \bigcup (\Omega \bigcap G_2) = P \bigcup (\Omega \bigcap G_2).$$

Множество $V = \Omega \setminus F \setminus P \setminus (\Omega \bigcap G_2)$ не пусто. Действительно, так как множество F не изолировано во множестве $\Omega \setminus (\Omega \bigcap G_2)$, то $\Omega \setminus F \setminus (\Omega \bigcap G_2)$ не является замкнутым множеством. В то же время множество $P \setminus (\Omega \bigcap G_2)$ замкнуто и содержится в $\Omega \setminus F \setminus (\Omega \bigcap G_2)$.

Могут представиться две возможности. Либо существует точка $x \in V$, для которой $Tx \in F$ или $T^j x \in V$, $j = 1, 2, \ldots$, и тогда $T^j x \in \overline{G}_1 \setminus G_2$ при $j \geqslant 0$, либо такой точки $x \in V$ не существует. Последнее означает, что $TV \subset \Omega \setminus F$ и для любой точки $x \in V$ существует номер j_x такой, что $T^{j_x} x \in P \bigcup (\Omega \bigcap G_2)$. Но это невозможно.

В самом деле, возьмем открытое множество G: $P \subset G$, $R \setminus \overline{G}_1 \subset G$, $F \bigcap \overline{G} = \varnothing$. Так как $P \bigcup (\Omega \bigcap G_2) \subset \Omega \setminus F$, то $\Omega \setminus F = V \bigcup P \bigcup (\Omega \bigcap G_2)$ и, следовательно, $\Omega \bigcap \overline{G} \subset V \bigcup P \bigcup (\Omega \bigcap G_2)$. Для каждой точки $x \in \Omega \bigcap \overline{G}$ существует номер j_x: $T^{j_x} x \in P \bigcup (\Omega \bigcap G_2)$ и, следовательно, $T^{j_x} x \in G \bigcup G_2$. Так как отображение T непрерывно, для любой точки $x \in \Omega \bigcap \overline{G}$ найдется открытое множество $G_x \ni x$ такое, что $T^{j_x} G_x \subset G \bigcup G_2$. Множества G_x, $x \in \Omega \bigcap \overline{G}$, образуют покрытие замкнутого множества $\Omega \bigcap \overline{G}$. Выделим из этого покрытия покрытие, состоящее из конечного числа множеств, например, G_{x_1}, $G_{x_2}, \ldots$

* Черта сверху всегда будет обозначать операцию взятия замыкания соответствующего множества в пространстве R. Так, $\overline{G}_2$ — замыкание в R множества G_2.

$\ldots, G_{x_m}$. Пусть $k = \max\{j_{x_1}, j_{x_2}, \ldots, j_{x_m}\}$. Для любой точки $x \in \bigcup_{i=1}^{m} G_{x_i}$ существует номер $j \leqslant k$ такой, что $T^j x \in G \bigcup G_2$.

Положим $L^j = TL^{j-1} \diagdown (\Omega \bigcap G_2)$, $j = 1, 2, \ldots$, $L^0 = (\Omega \bigcap \bar{G}) \diagdown (\Omega \bigcap G_2)$. Множества L^j замкнуты. Так как $TV \subset V \bigcup P \bigcup (\Omega \bigcap G_2)$, то $T(V \bigcup P) \subset V \bigcup \bigcup P \bigcup (\Omega \bigcap G_2)$. Поскольку $L^0 \subset V \bigcup P$, то и $L^j \subset V \bigcup P$, $j = 1, 2 \ldots$ Следовательно, $L^j \subset \Omega \diagdown F$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Для любого открытого множества G' можно построить замкнутые множества $Q^j = TQ^{j-1} \diagdown G_2$, $j = 1, 2, \ldots$, $Q^0 = \bar{G}' \diagdown G_2$. Выберем множество G' так, чтобы $G' \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{x_i}$, $\Omega \bigcap \bar{G} \subset G'$ и $Q^j \subset R \diagdown F$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Это всегда можно сделать, так как $L^j \subset \Omega \diagdown F$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и отображение T непрерывно. Возьмем, наконец, открытое множество G'': $F \subset G''$, $\bigcup_{j=0}^{k} Q^j \subset R \diagdown G''$.

Пусть $y \in P(\Omega)$. Множество $\Omega \bigcap (\bar{G} \diagdown G')$ пусто. Поэтому найдется номер $n > 0$ такой, что $T^j y \bar{\in} \bar{G} \diagdown G'$ при $j > n$. Так как множество $\Omega \bigcap G'$ непусто, найдется $n' > n$: $T^{n'} y \in G'$. Так как множество $(\Omega \diagdown (\Omega \bigcap \bar{G}_2)) \bigcap G''$ непусто, найдется $n'' > n'$: $T^{n''} y \in G'' \diagdown \bar{G}_2$. Пусть $n''' = \max\limits_{T^j y \in G',\ j < n''} j$. Очевидно, $n''' > n'$. При $n''' < j \leqslant n''$ $T^j y \bar{\in} G'$ и, следовательно, $T^j y \bar{\in} G$.

Кроме того, $T^j y \bar{\in} G_2$ при $n''' \leqslant j \leqslant n''$. В самом деле, если $T^{j'} y \in G_2$, $n''' \leqslant j' \leqslant n''$, то поскольку $T\bar{G}_2 \subset \bar{G}_2 \bigcup G$, должен был бы существовать номер j'': $j' < j'' < n''$, для которого $T^{j''} y \in G$, но тогда $T^{j''} y \in G'$, что невозможно.

Итак, $T^{n'''} y \in G'$, $T^{n'''} y \bar{\in} G_2$ и $T^j y \bar{\in} G \bigcup G_2$, $j = n''' + 1, \ldots, n''$. В таком случае $T^{j+n'''} y \in Q^j$, $j = 0, 1, \ldots, n'' - n'''$. Так как $\bigcup_{j=0}^{k} Q^j \subset R \diagdown G''$ и $T^{n''} y \in G''$, то $n'' - n''' > k$. Это противоречит тому, что для всякой точки $x \in G'$ существует номер $j \leqslant k : T^j x \in G \bigcup G_2$. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем пространство R — отрезок прямой с обычной топологией. Удобно ввести следующие определения. Точку $y \in \Omega$ назовем ω^--предельной точкой, если существует точка $x \in P(\Omega)$ и последовательность чисел $j_1 < j_2 < \ldots$ такие, что $T^{j_1} x < T^{j_2} x < \ldots \to y$. Аналогично, точку $y' \in \Omega$ назовем ω^+-предельной точкой, если существует точка $x' \in P(\Omega)$ и последовательность чисел $j_1' < j_2' < \ldots$ такие, что $T^{j_1'} x' > T^{j_2'} x' > \ldots \to y'$.

Окрестность произвольной точки $\beta \in R$ будем обозначать G_β. Для удобства под окрестностями точек будем понимать только связные открытые окрестности, так что всякая окрестность G_β — открытый (в R) интервал, содержащий точку β.

Положим $G_{-\beta} = G_\beta \bigcap \{x < \beta\}$, $G_{+\beta} = G_\beta \bigcap \{x > \beta\}$ и назовем $G_{-\beta}$ и $G_{+\beta}$ соответственно левосторонней и правосторонней окрестностями точки β. Если β — левый конец R, то всякая окрестность $G_{-\beta} = \varnothing$, если правый, то $G_{+\beta} = \varnothing$.

Предположим, точка β принадлежит циклу порядка k. Тогда $T^k \beta = \beta$. Положим $K_\beta^- = \{x \leqslant \beta\}$, $K_\beta^+ = \{x \geqslant \beta\}$. Скажем, что $K_\beta^- \in K_\beta(T^k)$, если существует окрестность $G_{-\beta} : T^k G_{-\beta} \subset K_\beta^-$ ($K_\beta(T^k)$ — множество так называемых «инвариантных конусов» в точке β относительно отображения T^k; точное определение см. в [2]). Аналогично $K_\beta^+ \in K_\beta(T^k)$, если существует окрестность $G_{+\beta} : T^k G_{+\beta} \subset K_\beta^+$.

Пусть Ω — множество ω-предельных точек последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$. Для отображения $S = T^k$ последовательность $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ распадается на k подпоследовательностей и множество Ω распадается на k множеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ (быть может, некоторые из них или даже все они совпадают), причем

$$T\Omega_1 = \Omega_2,\ T\Omega_2 = \Omega_3, \ldots,\ T\Omega_k = \Omega_1,\ \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i = \Omega.$$

Если множество Ω содержит цикл порядка k, то каждое из множеств Ω_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, содержит хотя бы одну неподвижную точку отображения S (которые вместе составляют цикл порядка k отображения T).

В дальнейшем всегда предполагается, что притягивающее множество Ω отлично от цикла и потому бесконечно.

Лемма 2. *Пусть* $\beta \in \Omega$ и $T^k\beta = \beta$.

Если β — ω^-*-предельная точка и* $K_\beta^- \in K_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной слева для точек множества* Ω.

Если β — ω^+*-предельная точка и* $K_\beta^+ \in K_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной справа для точек множества* Ω.

Докажем, например, первое утверждение. Если β — ω^--предельная точка, найдутся числа $j_0 < k$ и $j_1 < j_2 < \ldots$ такие, что $T^{j_0+kj_1}x < T^{j_0+kj_2}x < \ldots \to \beta$.

Пусть Ω' — множество ω-предельных точек последовательности $\{S^j x'\}_{j=0}^{\infty}$, где $S = T^k$, $x' = T^{j_0}x$. Множество Ω' содержит точку β и бесконечно, так как $\bigcup_{j=0}^{k-1} T^j\Omega' = \Omega$. Возьмем произвольную окрестность $G_{-\beta}$ такую, что $SG_{-\beta} \subset K_\beta^-$ и $\Omega' \not\subset \bar{G}_{-\beta}$. Достаточно показать, что множество $\bar{G}_{-\beta} \setminus \beta$ содержит хотя бы одну точку множества Ω'. Возьмем окрестность $G'_{-\beta}$, для которой $SG'_{-\beta} \subset \bar{G}_{-\beta}$. Для любого $n > 0$ найдется $n' > n : S^{n'}x' \in G'_{-\beta}$ и $n'' > n'$: $S^{n''}x' \in R \setminus \bar{G}_{-\beta}$. Так как $SG'_{-\beta} \subset \bar{G}_{-\beta}$ и $S^j x' \neq \beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то замкнутое множество $\bar{G}_{-\beta} \setminus G'_{-\beta} \setminus \beta$ содержит бесконечно много точек последовательности $\{S^j x'\}_{j=0}^{\infty}$ и, следовательно, содержит хотя бы одну точку множества Ω'.

Лемма 3. *Пусть* $\beta \in \Omega$, $T^k\beta = \beta$ *и не существует точек* $\beta' \neq \beta$: $\beta' \in \Omega$, $T^k\beta' = \beta$.

Если β — ω^-*-предельная точка и* $K_\beta^+ \in K_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной слева для точек множества* Ω.

Если β — ω^+*-предельная точка и* $K_\beta^- \in K_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной справа для точек множества* Ω.

Докажем первое утверждение. Пусть Ω' — множество ω-предельных точек последовательности $\{S^j x'\}_{j=0}^{\infty}$, где $S = T^k$, $x' = T^{j_0}x$, причем точка β является ω^--предельной точкой. Точек $\beta' \neq \beta$: $\beta' \in \Omega'$, $S\beta' = \beta$ нет. Поэтому для любой окрестности G_β найдутся окрестность $G'_\beta \subset G_\beta$ и открытое множество G, содержащее $\Omega' \setminus (\Omega' \cap G_\beta)$, такие, что $SG \subset R \setminus G'_\beta$.

Пусть $G_\beta = G_{-\beta} \cup \beta \cup G_{+\beta}$, $G'_\beta = G'_{-\beta} \cup \beta \cup G'_{+\beta}$. Покажем, что множество $\bar{G}_{-\beta} \setminus \beta$ содержит хотя бы одну точку множества Ω'. Можно считать, что $SG_{+\beta} \subset K_\beta^+$. В таком случае $S(G \cup G_{+\beta}) \subset R \setminus G'_{-\beta}$. Так как $\Omega' \subset G \cup G_\beta$, найдется номер n_0: $S^j x' \in G \cup G_\beta$ при $j \geqslant n_0$. Для любого $n \geqslant n_0$ найдется $n' > n$: $S^{n'}x' \in G \cup G_{+\beta}$ и $n'' > n'$: $S^{n''}x' \in G'_{-\beta}$. Так как $S(G \cup G_{+\beta}) \subset R \setminus G'_{-\beta}$ и $S^j x' \neq \beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то множество $G_{-\beta} \setminus G'_{-\beta}$ содержит бесконечно много точек последовательности $\{S^j x'\}_{j=0}^{\infty}$ и, следовательно, $\bar{G}_{-\beta} \setminus \beta$ содержит хотя бы одну точку множества Ω'. Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что множество Ω содержит неподвижную точку. Пусть это будет точка α.

Могут представиться следующие возможности:

1) K_α^-, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$;

2) $K_\alpha^- \in K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T)$ или $K_\alpha^- \overline{\in} K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$;

3) K_α^-, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T)$ и

а) K_α^-, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T^2)$,

б) K_α^-, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T^2)$.

Из того, что $K_\alpha^- \overline{\in} K_\alpha(T)$, $K_\alpha^- \in K_\alpha(T^2)$, следует $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T^2)$. Поэтому случай $K_\alpha^- \in K_\alpha(T^2)$, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T^2)$, так же, как случай $K_\alpha^- \overline{\in} K_\alpha(T^2)$, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T^2)$, не возможны. При переходе к отображению $S = T^2$ случай 3) а) переходит в 1), и мы пока будем предполагать, что этот случай для точки α не имеет места.

Лемма 4. *Во всякой окрестности H_α существует открытый интервал W такой, что $TW \supset W$, $\Omega \cap W \neq \varnothing$ и существуют*

а) *либо точка $\beta \in \Omega$, $T\beta = \alpha$, $\beta \neq \alpha$, и тогда в любой окрестности $G_{-\beta}$ (или $G_{+\beta}$) найдется замкнутый интервал V и номер m: $T^j V \subset \overline{W}$, если $2 \leqslant j < m$, $T^j V \supset \overline{W}$, если $j \geqslant m$, и при этом β — ω^- (соответственно ω^+)-предельная точка;*

б) *либо последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots \to \alpha$ такая, что для любой окрестности G_{β_i}, $i \geqslant 1$, и любой окрестности H_α' найдется замкнутый интервал $V \subset G_{\beta_i}$ и номер m: $T^j V \subset \overline{W}$, если $1 \leqslant j < m$, $T^j V \supset \overline{W} \setminus H_\alpha'$, если $j \geqslant m$, причем*

1) *при K_α^-, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$ точка α является предельной слева (справа) для точек β_i, если α — ω^- (ω^+)-предельная точка;*

2′) *при $K_\alpha^- \in K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T)$ точка α является предельной справа для точек β_i, если α — ω^+-предельная точка, и предельной слева, если α не является ω^+-предельной точкой;*

2″) *при $K_\alpha^- \overline{\in} K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$ точка α является предельной слева для точек β_i, если α — ω^--предельная точка, и предельной справа, если α не является ω^--предельной точкой;*

3) *при K_α^-, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T)$ точка α является предельной и слева и справа для точек β_i.*

Из того, что $T\beta = \alpha$ и $\beta_i \to \alpha$, следует, что W является окрестностью точки α (по крайней мере, односторонней).

Необходимость рассматривать отдельно различные случаи делает доказательство леммы весьма громоздким.

1) K_α^-, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$. Пусть α является, например, ω^--предельной точкой. Рассмотрим произвольную окрестность $G_{-\alpha}$, но такую, что $TG_{-\alpha} \subset K_\alpha^-$, $\Omega \not\subset \overline{G}_{-\alpha}$. $TG_{-\alpha} \supset G_{-\alpha} \setminus \alpha$, ибо в противном случае $T\overline{G}_{-\alpha} \subset \overline{G}_{-\alpha}$, и тогда $\Omega \subset \overline{G}_{-\alpha}$. Положим $W = G_{-\alpha}$. $TW \supset W$ и из леммы 2 вытекает, что $\Omega \cap W \neq \varnothing$.

Возьмем произвольную окрестность $G_{-\alpha}' \subset W$. По тем же соображениям найдется номер n: $T^j G_{-\alpha}' \supset \overline{W} \setminus \alpha$ при $j \geqslant n$; если n — наименьший из таких номеров, то $T^j G_{-\alpha}' \subset W$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Предположим, существует точка $\beta \in \Omega$, $T\beta = \alpha$, $\beta \neq \alpha$. Пусть, например, β является ω^--предельной точкой. Если для любой окрестности $G_{-\beta}$ найдется окрестность $G_{-\alpha} \subset TG_{-\beta}$, то тогда найдется и замкнутый интервал $V \subset G_{-\beta}$ и номер m: $T^j V \subset \overline{W}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $T^j V \supset \overline{W}$ при $j \geqslant m$.

Если же существует окрестность $G'_{-\beta}$: $TG'_{-\beta} \subset K^{+}_{\alpha}$, то точка α является ω^{+}-предельной точкой. В таком случае, рассуждая как и выше, в качестве W следовало бы взять некоторую окрестность $G_{+\alpha}$.

Допустим, такой точки $\beta \in \Omega$ не существует. Это означает, что для любой окрестности G_α найдутся окрестность $G'_{-\alpha} \subset G_\alpha$ и открытое множество G, содержащее множество $\Omega \setminus (\Omega \cap G_\alpha)$, такие, что $TG \subset R \setminus G'_{-\alpha}$.

Пусть $G_\alpha = W \cup \alpha \cup G_{+\alpha}$. Можно считать, что $TG_{+\alpha} \subset K^{+}_{\alpha}$ и тогда $T(G \cup G_{+\alpha}) \subset R \setminus G'_{-\alpha}$.

Множество $G \cup G_\alpha$ открыто и содержит Ω. Если $x \in P(\Omega)$, найдется номер j_0: $T^j x \in G \cup G_\alpha$ при $j \geqslant j_0$. Найдутся также номер $j_1 \geqslant j_0$: $T^{j_1} x \in G \cup G_{+\alpha}$ и номер $j_2 > j_1$: $T^{j_2} x \in G'_{-\alpha}$. Если номер j_2 — наименьший из возможных, то $T^{j_2-1} x \,\bar{\in}\, G'_{-\alpha}$. Поскольку $T(G \cup G_{+\alpha}) \subset R \setminus G'_{-\alpha}$, то $T^{j_2-1} x \,\bar{\in}\, G \cup G_{+\alpha}$. Следовательно, $T^{j_2-1} x \in W \setminus G'_{-\alpha}$.

Если $W = (\gamma, \alpha)$, $G'_{-\alpha} = (\gamma_0, \alpha)$, то $W \setminus G'_{-\alpha} = (\gamma, \gamma_0)$. Нами найдено, что $\max\limits_{x \in [\gamma, \gamma_0]} Tx > \gamma_0$. Так как проведенные выше рассуждения остаются справедливыми, если заменить $G'_{-\alpha}$ произвольной окрестностью $\tilde{G}'_{-\alpha} \subset G'_{-\alpha}$, то для любой точки $\gamma'_0 \in (\gamma_0, \alpha)$ $\max\limits_{x \in [\gamma, \gamma'_0]} Tx > \gamma'_0$. Поскольку $TW \supset W$, существует точка $\gamma' \in \overline{W}$, для которой $T\gamma' = \gamma$; можно считать, что $\gamma' \in [\gamma, \gamma_0]$. В таком случае $T[\gamma, \gamma_0] \supset [\gamma, \gamma_0]$.

Положим $\gamma_i = \max\limits_{x \in [\gamma, \gamma_{i-1}]} Tx$, $i = 1, 2, \ldots$; $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$ Утверждается, что $\lim\limits_{i \to \infty} \gamma_i = \alpha$. В самом деле, допустим $\gamma_\infty = \lim \gamma_i < \alpha$. Пусть $\gamma'_\infty = \max\limits_{x \in [\gamma, \gamma_\infty]} Tx$; $\gamma'_\infty > \gamma_\infty$. Но тогда найдется точка $\gamma''_\infty \in (\gamma, \alpha)$: $\gamma''_\infty < \gamma_\infty$, $T\gamma''_\infty > \gamma_\infty$ и номер i': $\gamma_{i'} > \gamma''_\infty$, что приводит к противоречию.

Итак, $T[\gamma, \gamma_0] \supset [\gamma, \gamma_1]$, $T[\gamma, \gamma_1] \supset [\gamma, \gamma_2], \ldots$ и $\gamma_i \to \alpha$. Для любой окрестности H'_α (или $H'_{-\alpha}$) найдутся замкнутый интервал $V' \subset [\gamma, \gamma_0]$ и номер n' такие, что $T^j V' \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n' - 1$, и $T^j V' \supset \overline{W} \setminus H'_\alpha$ при $j \geqslant n'$.

Покажем, что во всякой окрестности $\tilde{G}_{-\alpha} \subset W$ найдется точка $\xi \in \Omega$, для которой $T^j \xi \in \tilde{G}_{-\alpha}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Воспользуемся леммой 1. Положим $G_1 = \tilde{\tilde{G}}'_{-\alpha} \cup \alpha \cup G_{+\alpha}$, где $\tilde{\tilde{G}}'_{-\alpha} \subset \tilde{G}_{-\alpha}$, и $G_2 = G \cup G_{+\alpha}$. Очевидно, $TG_2 \subset \overline{G}_2 \cup (R \setminus \overline{G}_1)$; $\alpha \,\bar{\in}\, G_2$; точка α является предельной слева для точек множества Ω и потому не изолирована во множестве $\alpha \cup (\Omega \setminus (\Omega \cap \overline{G}_2))$. Следовательно (лемма 1), существует точка $\eta \in \Omega \setminus \alpha$: $T^j \eta \,\bar{\in}\, G_2$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $T^j \eta \in \overline{G}_1$, $j = 1, 2, \ldots$ Это означает, что $\eta \in W$, $T^j \eta \in \overline{\tilde{\tilde{G}}}_{-\alpha}$, $j = 1, 2, \ldots$ По предположению W не содержит точек $\beta \in \Omega$, для которых $T\beta = \alpha$ (ибо для любой окрестности G_y каждой точки $y \in W$ $TG_y \not\subset K^{+}_{\alpha}$). Следовательно, $T^j \eta \in \overline{\tilde{\tilde{G}}}_{-\alpha} \setminus \alpha$, $j = 1, 2, \ldots$; если положить $\xi = T\eta$, то $T^j \xi \in \tilde{G}_{-\alpha}$, $j = 0, 1, 2 \ldots$

Всякая окрестность G_ξ содержит точки последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in P(\Omega)$. Так как $\Omega \not\subset \overline{W}$, найдется номер n'': $T^{n''} G_\xi \not\subset \overline{W}$. Можно считать, что $T^j G_\xi \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n'' - 1$. Тогда $T^{n''} G_\xi \subset K^{-}_{\alpha}$. Если $\tilde{G}_{-\alpha} \subset (\gamma_0, \alpha)$, то $T^{n''} \xi > \gamma_0$ и $T^{n''} G_\xi \supset V'$. Таким образом, окрестность G_ξ содержит замкнутый интервал V: $T^{n''} V = V'$, $T^j V \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n'' - 1$; если $m = n' + n''$, то $T^j V \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, $T^j V \supset \overline{W} \setminus H'_\alpha$ при $j \geqslant m$.

2) $K^{-}_{\alpha} \in K_\alpha(T)$, $K^{+}_{\alpha} \,\bar{\in}\, K_\alpha(T)$.

Если α — ω^--предельная точка, то для любой окрестности $G_{-\alpha}$, для которой $TG_{-\alpha} \subset K_\alpha^-$ и $\Omega \not\subset \bar{G}_{-\alpha}$, $TG_{-\alpha} \supset G_{-\alpha}$. Возьмем в качестве W произвольную такую окрестность. $W \cap \Omega \neq \varnothing$ (лемма 2). Для любой окрестности $G_{-\alpha} \subset W$ существует номер n: $T^j G_{-\alpha} \subset \bar{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $T^j G_{-\alpha} \supset \bar{W} \setminus \alpha$ при $j \geqslant n$.

Предположим, α не является ω^--предельной точкой. Пусть $x \in P(\Omega)$. Найдется окрестность $G_{-\alpha}$, не содержащая точек $T^j x$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $G_{+\alpha}$ — произвольная достаточно малая окрестность: $TG_{+\alpha} \subset K_\alpha^+ \cup G_{-\alpha}$ и $\Omega \not\subset \bar{G}_{+\alpha}$. Так как α — ω^+-предельная точка и $\Omega \not\subset \bar{G}_{+\alpha}$, найдется номер j': $T^{j'} x \in G_{+\alpha}$, $T^{j'+1} x \bar{\in} G_{+\alpha}$. Поскольку $T^{j'+1} x \bar{\in} G_{-\alpha}$, то точка $T^{j'+1} x$ лежит справа от $G_{+\alpha}$. Следовательно, $TG_{+\alpha} \supset G_{+\alpha}$. Полагаем $W = G_{+\alpha}$. Аналогичные рассуждения показывают, что для любой окрестности $G'_{+\alpha} \subset W$ найдется номер n: $\underbrace{T \ldots T}_{n} (TG'_{+\alpha} \cap \bar{W}) \cap \ldots \cap \bar{W} \supset \bar{W}$. Следовательно, существует замкнутый интервал $V' \subset G'_{+\alpha}$ такой, что $T^j V' \subset \bar{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $T^j V' \supset \bar{W}$ при $j \geqslant n$. Поскольку точка α не изолирована во множестве Ω, то $W \cap \Omega \neq \varnothing$.

Итак, множество W является левосторонней окрестностью точки α, если α — ω^--предельная точка, и правосторонней, если α не является ω^--предельной точкой.

а) Предположим, существует точка $\beta \in \Omega$, для которой $T\beta = \alpha$. Пусть, например, β — ω^--предельная точка.

Рассмотрим произвольную окрестность $G_{-\beta}$. Так как $K_\alpha^+ \bar{\in} K_\alpha(T)$, всегда найдется окрестность $G_{-\alpha}$: $T^2 G_{-\beta} \supset G_{-\alpha}$. Следовательно, если α — ω^--предельная точка, найдутся замкнутый интервал $V_1 \subset G_{-\beta}$ и номер m_1 такие, что $T^j V_1 \subset \bar{W}$, $j = 2, 3, \ldots, m_1 - 1$, $T^j V_1 \supset \bar{W}$ при $j \geqslant m_1$. Если α не является ω^--предельной точкой, то $TG_{-\beta} \not\subset K_\alpha^-$ и найдется окрестность $G_{+\alpha} \subset TG_{-\beta}$. В этом случае найдется замкнутый интервал $V_2 \subset G_{-\beta}$ и номер m_2: $T^j V_2 \subset \bar{W}$, $j = 1, 2, \ldots, m_2 - 1$, $T^j V_2 \supset \bar{W}$ при $j \geqslant m_2$.

б) Предположим, точек $\beta \in \Omega$, для которых $T\beta = \alpha$, не существует.

1°. Пусть α — ω^+-предельная точка. Точка α является предельной справа для точек множества Ω (лемма 3). Рассмотрим произвольную окрестность $G_\alpha = G_{-\alpha} \cup \alpha \cup G_{+\alpha}$, но такую, что $TG_{-\alpha} \subset K_\alpha^-$. Из леммы 1 следует: существует точка $\eta \in \Omega \setminus \alpha$, для которой $T^j \eta \in \bar{G}_{+\alpha}$, $j = 1, 2, \ldots$ Так как $T^j \eta \neq \alpha$, $j = 1, 2, \ldots$, то $T^j \eta \in \bar{G}_{+\alpha} \setminus \alpha$. Это означает, что во всякой окрестности $G'_{+\alpha}$ существует точка η': $T^j \eta' \in G'_{+\alpha}$, $j = 1, 2, \ldots$, а потому существует и точка ξ': $T\xi' > \alpha$.

Итак, точка α является предельной справа для точек ξ': $T\xi' > \alpha$ и точек ξ'': $T\xi'' < \alpha$ (ибо $K_\alpha^+ \bar{\in} K_\alpha(T)$). Поэтому точка α является предельной справа и для точек ξ: $T\xi = \alpha$ и для любой окрестности G_ξ существует окрестность $G_\alpha \subset TG_\xi$. Найдутся замкнутый интервал $V \subset G_\xi$ и номер m такие, что $T^j V \subset \bar{W}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $T^j V \supset \bar{W}$ при $j \geqslant m$.

2°. Предположим, α не является ω^+-предельной точкой. Для любой окрестности G_α найдутся окрестность $G'_\alpha \subset G_\alpha$ и открытое множество G, содержащее $\Omega \setminus (\Omega \cap G_2)$, такие, что $TG \subset R \setminus G'_\alpha$. Пусть $x \in P(\Omega)$. Если $G_\alpha = G_{-\alpha} \cup \alpha \cup G_{+\alpha}$, можно считать, что $G_{-\alpha} \subset W$, $TG_{-\alpha} \subset K_\alpha^-$ и множество $G_{+\alpha}$ не содержит точек $T^j x$, $j = 1, 2, \ldots$ Так как $\Omega \subset G_\alpha \cup G$, найдется номер j_0 такой, что $T^j x \in G_{-\alpha} \cup G$ при $j \geqslant j_0$. Повторяя далее соответствующие рассуждения пункта 1), получим: точка α является предельной слева для точек ξ: для любой окрестности G_ξ и всякой окрестности H'_α найдутся замкнутый интервал $V \subset G_\xi$ и номер m такие, что $T^j V \subset \bar{W}$ при $0 \leqslant j \leqslant m$, $T^j V \supset \bar{W} \setminus H_\alpha$ при $j \geqslant m$.

В случае $K_\alpha^- \in K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$ доказательства аналогичны.

3) K_α^-, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T^2)$.

Это эквивалентно тому, что точка α является предельной для точек

1°) $x' < \alpha$, $Tx' > \alpha$ и $x'' > \alpha$, $Tx'' < \alpha$,

2°) $y' < \alpha$, $Ty' < \alpha$ либо (и) $y'' > \alpha$, $Ty'' > \alpha$.

Следовательно, для любых окрестностей $G_{-\alpha}$ и $G_{+\alpha}$ найдется окрестность G_α: $T^2G_{-\alpha} \supset G_\alpha$, $T^2G_{+\alpha} \supset G_\alpha$.

Пусть $H_\alpha = (\beta, \gamma)$, причем $\Omega \not\subset \overline{H}_\alpha$. Либо для любой точки $\delta \in (\alpha, \gamma)$ $T[\alpha, \delta] \supset [\alpha, \delta]$, либо существует δ': $T[\alpha, \delta'] \not\supset [\alpha, \delta']$.

В первом случае $T[\alpha, \gamma] \supset [\alpha, \gamma]$ и для любого $\delta \in (\alpha, \gamma)$ найдется замкнутый интервал $V' \subset [\alpha, \delta]$ и номер n: $T^nV' = [\alpha, \gamma]$, $T^jV' \subset [\alpha, \gamma]$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть $\beta' = \min\limits_{x \in [\alpha, \gamma]} Tx$; $\beta' < \alpha$; положим $\beta'' = \max\{\beta', \beta\}$ и $W = (\beta'', \gamma)$. Очевидно, $TW \supset W$ и, более того, $TW \supset \overline{W}$, так как $\Omega \not\subset \overline{W}$: $T^jV' \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $T^jV' \supset \overline{W}$ при $j > n$.

Пусть существует $\delta' \in (\alpha, \gamma)$: $T[\alpha, \delta'] \supset [\alpha, \delta']$. Положим $\delta'' = \min\limits_{x \in [\alpha, \delta']} Tx$ и $\gamma' = \max\{\delta'', \beta\}$. Либо для любой точки $\eta \in (\gamma', \alpha)$ $T[\eta, \alpha] \supset [\eta, \alpha]$, и тогда для построения W нужно повторить проведенные выше рассуждения, либо существует точка $\eta' \in (\gamma', \alpha)$: $T[\eta', \alpha] \not\supset [\eta', \alpha]$. Положим $\zeta = \max\limits_{x \in [\eta', \alpha]} Tx$; $\zeta > \alpha$.

Если $\zeta > \delta'$, полагаем $W = (\eta', \delta')$. $TW \supset W$. Для любой окрестности $G_\alpha \subset W$ найдется окрестность $G_\alpha' \subset G_\alpha \cap TG_\alpha$. Найдется номер n: $T^jG_\alpha' \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $T^nG_\alpha' \not\subset \overline{W}$ (так как $\Omega \not\subset \overline{W}$). Следовательно, либо $T^nG_\alpha' \supset [\eta', \alpha]$, либо $T^nG_\alpha' \supset [\alpha, \delta']$. Так как $T[\eta', \alpha] \supset [\alpha, \delta']$, $T[\alpha, \delta'] \supset [\eta', \alpha]$, $T^{n+1}G_\alpha \supset T^{n+1}G_\alpha' \cup T^nG_\alpha'$, то $T^{n+1}G_\alpha \supset \overline{W}$ и найдется замкнутый интервал $V' \subset G_\alpha$: $T^jV' \subset \overline{W}$ при $j \leqslant n$, $T^jV' \supset \overline{W}$ при $j > n$.

Пусть $\zeta < \delta'$. Так как $\underbrace{T \ldots T}_{j}(T[\alpha, \zeta] \cap [\alpha, \delta']) \cap \ldots \cap [\alpha, \delta'] \not\supset [\alpha, \delta']$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и $\Omega \not\subset [\eta', \delta']$, то найдется номер n': $T^j[\alpha, \zeta] \not\supset [\eta', \alpha]$, $j = 0, 1, \ldots, n'-1$, $T^{n'}[\alpha, \zeta] \supset [\eta', \alpha]$. Пусть $\zeta' = \max\limits_{x \in T^{n'-1}[\alpha, \zeta]} x$. Полагаем $W = (\eta', \zeta')$. Так как $T[\eta', \alpha] \not\supset [\eta', \alpha]$, то $T[\alpha, \zeta] \supset [\alpha, \zeta]$ и $T^j[\alpha, \zeta] \subset T^{n'-1}[\alpha, \zeta]$, $j = 0, 1, \ldots, n'-2$. Поскольку $T[\eta', \alpha] \supset [\alpha, \zeta]$ и $T^{n'-1}[\alpha, \zeta] \supset [\eta', \alpha]$, то $TW \supset W$.

Для любой окрестности $G_\alpha \subset W$ найдется номер n'': $T^jG_\alpha \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n''-1$, $T^{n''}G_\alpha \not\subset \overline{W}$. Следовательно, либо $T^{n''}G_\alpha \supset [\eta', \alpha]$, и тогда во всяком случае $T^{n''}G_\alpha \supset T^j[\alpha, \zeta]$, $j = 0, 1, \ldots, n'-2$, либо $T^{n''}G_\alpha \supset [\alpha, \zeta']$, и тогда $T^{n''}G_\alpha \supset T^j[\alpha, \zeta]$, $j = 0, 1, \ldots, n'-1$. В обоих случаях $T^{n''+1}G_\alpha \supset \overline{W}$; найдется замкнутый интервал $V' \subset G_\alpha$: $T^jV' \subset \overline{W}$ при $j \leqslant n$, $T^jV' \supset \overline{W}$ при $j > n$.

Из 1°), 2°) вытекает, что точка α является предельной и слева и справа для точек ξ: $T\xi = \alpha$ или $T^2\xi = \alpha$, причем $TG_\xi \neq \alpha$, $T^2G_\xi \neq \alpha$. Следовательно, точка α является предельной и слева и справа для точек ξ: для любой окрестности G_ξ найдутся замкнутый интервал $V \subset G_\xi$ и номер m: $T^jV \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, $T^jV \supset \overline{W}$ при $j \geqslant m$.

Лемма 4 доказана.

Под окрестностью множества Ω ради простоты будем понимать любое открытое содержащее Ω множество, каждая компонента которого содержит по крайней мере одну точку множества Ω. Так как Ω — множество замкнутое, то всякая такая окрестность состоит из конечного числа компонент (открытых в R интервалов).

Пусть H — окрестность множества Ω и H_α — компонента, содержащая неподвижную точку α. Согласно лемме 4 найдется открытое множество $W \subset H_\alpha$ такое, что $TW \supset W$ и удовлетворяющее еще ряду условий (см. лемму 4), которые будем предполагать выполненными.

Определим W-окрестность множества Ω.

Пусть $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, где H_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — открытые в R интервалы. Всякой конечной последовательности целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, $1 \leqslant m_i \leqslant r$, $i = 1, 2, \ldots, s$, поставим в соответствие открытое множество $V_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ следующим образом.

Обозначим U_{m_1} множество точек $x \in W$, для которых $Tx \in H_{m_1}$; U_{m_1} — открытое множество. Обозначим $U_{m_1 m_2}$ множество точек $x \in U_{m_1}$, для которых $T^2 x \in H_{m_2}$ и т. д.; $U_{m_1 \ldots m_s}$ — множество точек $x \in U_{m_1 \ldots m_{s-1}}$, для которых $T^s x \in H_{m_s}$. Наконец, обозначим $V_{m_1 \ldots m_s}$ множество точек $x \in U_{m_1 \ldots m_s}$, для которых $T^{s+1} x \in W$. Множество $V_{m_1 \ldots m_s}$ открыто и, в частности, может быть пустым. Положим $W_{m_1 \ldots m_s} = \bigcup_{j=1}^{s} T^j V_{m_1 \ldots m_s}$.

Очевидно, $T^j V_{m_1 \ldots m_s} \subset H_{m_j}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. $TW_{m_1 \ldots m_s} \subset W_{m_1 \ldots m_s} \cup W$.

Положим $U = \bigcup_{\substack{1 \leqslant m_1, \ldots, m_s \leqslant r \\ s < \infty}} W_{m_1 \ldots m_s} \cup W$. Множество $U = U(H, W)$ назовем W-окрестностью множества Ω.

$U \subset TU \subset U \cup TW$. Если $x \in U$, $Tx \overline{\in} U$, то $x \in W$.

Если $x \in P(\Omega)$, найдется номер j_1: $T^j x \in \bar{H}$ при $j \geqslant j_1$. Так как $\Omega \cap \cap W \neq \varnothing$, найдется номер $j_2 \geqslant j_1$: $T^{j_2} x \in W$, и тогда $T^j x \in U$ при $j \geqslant j_2$ согласно определению W-окрестности U.

Множество Ω содержится в $\bar{U}$.

Точку x назовем W-точкой, если для любой окрестности G_x и любой окрестности G_α найдутся замкнутый интервал $V \subset G_x$ и номер m такие, что $T^j V \subset H$ при $0 \leqslant j < m$ и $T^j V \supset \overline{W} \setminus G_\alpha$ при $j \geqslant m$.

Лемма 4 утверждает, что существует либо W-точка $\beta_0 \in \Omega$, $T\beta_0 = \alpha$, либо последовательность W-точек $\beta_1, \beta_2, \ldots \to \alpha$.

Наша цель — доказать, что всякая точка $x \in P(\Omega)$, предельная для множества $R \setminus P(\Omega)$, для которой $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, является W-точкой.

Множество W-точек замкнуто и содержится в $\bar{H}$. Если x — W-точка, то и Tx также является W-точкой. Поэтому α — W-точка.

W-точки обладают следующим важным свойством, непосредственно вытекающим из определений W-точек и W-окрестности U. Пусть x — произвольная W-точка. Каковы бы ни были окрестность G_x и замкнутое множество $V_1 \subset U$, найдутся замкнутое множество $V_2 \subset G_x$ и номер m: $T^j V_2 \subset H$ при $0 \leqslant j < m$, $T^j V_2 \supset V_1$ при $j \geqslant m$; если V_1 — замкнутый интервал, то и в качестве V_2 можно взять замкнутый интервал.

Если x — W-точка, $T^s x' = x$, $T^j x' \in H$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$, и для любой окрестности $G_{x'}$ найдется окрестность $G_x \subset T^s G_{x'}$, то x' — W-точка. Поэтому если U содержит хотя бы одну W-точку, отличную от неподвижной точки (утверждать это мы пока не можем), то всякая W-точка является предельной для W-точек; множество W-точек плотно в себе и, следовательно, совершенно.

Скажем, что x — W^- (W^+)-точка, если для любой окрестности G_{-x} (G_{+x}) и любой окрестности G_α найдутся замкнутый интервал $V \subset G_{-x}$ ($\subset G_{+x}$) и номер m такие, что $T^j V \subset H$ при $0 \leqslant j < m$ и $T^j V \supset \overline{W} \setminus G_\alpha$ при $j \geqslant m$.

Пусть x — W^- (W^+)-точка, $x' \in H$, $Tx' = x$. Если для любой окрестности $G_{-x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{-x'}$ ($G_{+x} \subset TG_{-x'}$), то x' — W^--точка. Если для любой окрестности $G_{+x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset \subset TG_{+x'}$ ($G_{+x} \subset TG_{+x'}$), то x' — W^+-точка.

Это замечание делает следующие утверждения почти очевидными.

Лемма 5. *Если точка β является одновременно ω^--предельной и W^--точкой или ω^+-предельной и W^+-точкой, то существует точка β', для которой $T\beta' = \beta$, являющаяся одновременно ω^--предельной и W^--точкой или ω^+-предельной и W^+-точкой.*

Лемма 6. *Если β является W^- (W^+)-точкой, как только β — ω^-(ω^+)-предельная точка, и $T\beta' = \beta$, то β' является W^- (W^+)-точкой, как только β' — ω^- (ω^+)-предельная точка.*

Докажем, например, последнее утверждение. Пусть β — ω^+-предельная и W^+-точка, $x \in P(\Omega)$ и $T^{j_1}x > T^{j_2}x > \ldots \to \beta'$. Если β не является ω^--предельной точкой, то точки $T^{j_s+1}x$, $s = 1, 2, \ldots$, приближаются к β справа, и для любой окрестности $G_{+\beta'}$ найдется окрестность $G_{+\beta} \subset TG_{+\beta'}$. Если β — ω^--предельная точка, то тогда β и W^--точка и для любой окрестности $G_{+\beta'}$ найдется окрестность либо $G'_{-\beta}$, либо $G'_{+\beta}$, содержащаяся в $TG_{+\beta'}$. Таким образом, β' является W^+-точкой.

Обозначим c и d соответственно левый и правый концы множества Ω. Если x — W^- (W^+)-точка, для любой окрестности G_{-x} (G_{+x}) и любого замкнутого множества $E \subset (c, d)$ найдется номер m: $T^jG_{\mp x} \supset E$ при $j \geqslant m$.

В самом деле, возьмем точку $x' \in P(\Omega) \cap W$. Для любой окрестности G_{-x} (G_{+x}) найдется номер m': $T^jG_{+x} \supset x'$ при $j \geqslant m'$. Так как $c, d \in \Omega$, найдутся номера $j_1, j_2 \geqslant m'$ такие, что $E \subset [T^{j_1}x', T^{j_2}x']$. Следовательно, $T^jG_{\mp x} \supset E$ при $j \geqslant m$, где $m = \max\{j_1, j_2\}$.

Лемма 7. *Пусть $x \in P(\Omega)$. Для любой окрестности G_{-x} (G_{+x}), содержащей хотя бы одну точку множества $R \setminus P(\Omega)$, и любого замкнутого множества $E \subset (c, d)$ найдется номер m: $T^jG_{\mp x} \supset E$ при $j \geqslant m$.*

Если интервал $G \subset \bigcup\limits_{\Omega' \supset \alpha} P(\Omega')$, то существует $\Omega'' \supseteq \alpha$ такое, что $G \subset \subset P(\Omega'')$ (лемма 5 работы [2]). Поэтому найдется точка $x' \in G_{-x}$ (G_{+x}) и окрестность G'_α: $T^jx' \,\overline{\in}\, G'_\alpha$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ (в противном случае $G_{+x} \subset \bigcup\limits_{\Omega' \supset \alpha} P(\Omega')$; найдется $\Omega'' \supset \alpha$: $G_{\mp x} \subset P(\Omega'')$; $\Omega'' = \Omega$ и $G_{\mp x} \subset P(\Omega)$).

Пусть $G'_\alpha = G'_{-\alpha} \cup \alpha \cup G'_{+\alpha}$. Если K_α^-, $K_\alpha^+ \,\overline{\in}\, K_\alpha(T^2)$, то точка α является предельной и слева и справа для W-точек (лемма 4). Возьмем окрестность $G''_\alpha = G''_{-\alpha} \cup \alpha \cup G''_{+\alpha}$ так, чтобы каждое из множеств $G'_{-\alpha} \setminus G''_{-\alpha}$ и $G'_{+\alpha} \setminus G''_{+\alpha}$ содержало хотя бы одну W-точку. Так как α — ω-предельная точка, найдется номер m': $T^{m'} x \in G''_\alpha$. Так как $T^{m'} x' \,\overline{\in}\, G'_\alpha$, то либо $T^{m'} G_{\mp x} \supset \supset G'_{-\alpha} \setminus G''_{-\alpha}$, либо $T^{m'} G_{+x} \supset G'_{+\alpha} \setminus G''_{+\alpha}$. Это означает, что $T^{m'}G_{\mp x}$ содержит вместе с некоторой окрестностью W-точку; следовательно, найдется номер m: $T^jG_{+x} \supset E$ при $j \geqslant m$.

Если исключить из рассмотрения случай K_α^-, $K_\alpha^+ \,\overline{\in}\, K_\alpha(T^2)$, то тогда найдется интервал $[\gamma, \alpha] \subset G'_\alpha$ (либо $[\alpha, \gamma] \subset G'_\alpha$) такой, что для любого $\gamma' \in [\gamma, \alpha)$ $\min\limits_{x \in [\gamma', \alpha]} Tx < \gamma'$ и $(\gamma', \alpha) \cap \Omega \neq \varnothing$ (см. доказательство леммы 4). Точка α является предельной слева для точек циклов [3]. Пусть β_1 — точка цикла порядка k_1, β_2 — точка цикла порядка k_2, причем $\beta_1, \beta_2 \in [\gamma, \alpha)$ и $(\beta_1, \beta_2) \cap \Omega \neq \varnothing$. Пусть $\beta' = \min\{\beta_1, T\beta_1, \ldots, T^{k_1-1}\beta_1, \beta_2, \ldots, T^{k_2-1}\beta_2\}$,

$\beta''=\max\{\beta_1, T\beta_1, \ldots, T^{k_1-1}\beta_1, \beta_2, \ldots, T^{k_2-1}\beta_2\}$. $T[\beta', \beta'']\supseteq[\beta', \beta'']$ и $(\beta', \beta'')\cap \cap\Omega\neq\varnothing$; найдется номер n: $T^j[\beta', \beta'']\supset E$ при $j\geqslant n$. Так как $T[\gamma, \alpha)\supset \supset[\gamma, \alpha)$, существует точка δ_1 такая, что $T^j\delta_1\in[\gamma, \alpha)$, $j=0, 1, \ldots, k$, $T^k\delta_1= =\beta_1$, где $k=\max\{k_1-1, k_2-1\}$, точка δ_2 такая, что $T^j\delta_2\in[\gamma, \alpha)$, $j=0, 1, \ldots \ldots, k$, $T^k\delta_2=\beta_2$. Если $\gamma' = \max\limits_{j=0,1,\ldots,k}\{T^j\delta_1, T^j\delta_2\}$, то интервал $T^k[\gamma, \gamma']$ содержит точки $\beta_1, \ldots, T^{k_1-1}\beta_1, \beta_2, \ldots, T^{k_2-1}\beta_2$. Следовательно, $T^k[\gamma, \gamma']\supset[\beta', \beta'']$ и $T^j[\gamma, \gamma']\supseteq E$ при $j\geqslant k+n$.

Найдется номер j': $T^{j'}x\in[\gamma', \alpha)$. Так как $T^{j'}x'\,\overline{\in}\,[\gamma, \alpha]$, то либо $T^jG_{\mp x}\supset \supset[\gamma, \gamma']$ и тогда $T^jG_{\mp x}\supset E$ при $j\geqslant j'+k+n$, либо $T^{j'}G_{\mp x}\supset[T^{j'}x, \alpha]$. В последнем случае $T[T^{j'}x, \alpha]\supset[T^{j'}x, \alpha]$, $(T^{j'}x, \alpha)\cap\Omega\neq\varnothing$ и потому найдется номер j'': $T^{j''}[T^{j'}x, \alpha]\supset E$ при $j\geqslant j''$; следовательно, $T^jG_{\mp x}\supset E$ при $j\geqslant j'+j''$. Лемма доказана.

Из леммы 7 можно немедленно получить следующее. Обозначим $P_1(\Omega)$ множество точек x, принадлежащих $P(\Omega)$ вместе с некоторой окрестностью G_x; $P_1(\Omega)$—открытое множество. Положим $\overline{P_2(\Omega)}=P(\Omega)\diagdown P_1(\Omega)$.

Следствие 1. *Если неподвижная точка α является предельной слева (справа) для притягивающих множеств Ω_1 и Ω_2, то $\overline{P_2(\Omega_1)}=\overline{P_2(\Omega_2)}$.*

Пусть c_i, d_i—левый и правый концы множеста Ω_i, $i=1, 2$. Найдется замкнутый интервал $E\subset(c_1, d_1)\cap(c_2, d_2)$, содержащий хотя бы одну точку каждого из множеств $P(\Omega_i)$ $i=1, 2$. Пусть, например, $x'\in P(\Omega_1)\cap E$. Если $x''\in P_2(\Omega_2)$, то любая окрестность $G_{x''}$ содержит хотя бы одну точку множества $R\diagdown P(\Omega_2)$, и согласно лемме найдется номер m: $T^mG_{x''}\supset E$. Существует точка $x'''\in G_{x''}$: $T^mx'''=x'$, т. е. $x'''\in P(\Omega_1)$. Пусть, для определенности, $x'''<x''$. Если открытый интервал принадлежит $P(\Omega_1)$, то и концы интервала также принадлежат $P(\Omega_1)$ (лемма 4 [2]). Следовательно, найдется точка $\tilde{x}'''\in P_2(\Omega_1)$, $x'''\leqslant\tilde{x}'''<x''$. Итак, в любой окрестности точки множества $P_2(\Omega_2)$ содержатся точки множества $P_2(\Omega_1)$ и, наоборот, в любой окрестности произвольной точки множества $P_2(\Omega_1)$ содержатся точки множества $P_2(\Omega_2)$.

Следствие 2. *Если существует множество $\Omega'\supset\Omega$, то $P(\Omega)$ не является G_δ-множеством.*

В самом деле, $\bigcup\limits_{\Omega''\supseteq\Omega'}P(\Omega'')$ есть G_δ-множество [1] и лежит всюду плотно на на $P_2(\Omega)$. Любые два G_δ-множества, замыкания которых совпадают, имеют непустое пересечение. Так как $P_2(\Omega)\cap\bigcup\limits_{\Omega''\supseteq\Omega'}P(\Omega'')=\varnothing$, то $P_2(\Omega)$, а следовательно, и $P(\Omega)$ не является G_δ-множеством.

Следствие 3. *Отображение T имеет цикл нечетного порядка* >1.

В самом деле, возьмем открытые интервалы G_1, G_2, каждый из которых содержит по крайней мере одну точку множества $P(\Omega)$ и одну точку множества $R\diagdown P(\Omega)$, причем $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2\subset(c,d)$, $\overline{G}_1\cap\overline{G}_2=\varnothing$. Такие интервалы G_1, G_2 всегда существуют. Возьмем замкнутый интервал E так, чтобы $\overline{G}_1\subset E$, $\overline{G}_2\subset E$, $E\subset(c, d)$. Согласно лемме найдется номер m_1: $T^j\overline{G}_1\supset E$ при $j\geqslant m_1$ и номер m_2: $T^j\overline{G}_2\supset E$ при $j\geqslant m_2$. Найдется замкнутый интервал $E'\subseteq\overline{G}_1$ такой, что $T^{m_1}E'=\overline{G}_2$. Пусть m—произвольное нечетное число $\geqslant m_1+m_2$. $T^mE'=T^{m-m_1}\overline{G}_2\supset E\supset E'$. Следовательно, существует точка $x\in E'$, для которой $T^mx=x$. Так как m—нечетное число, точка x принадлежит циклу нечетного порядка. Так как $x\in\overline{G}_1$, $T^{m_1}x\in\overline{G}_2$, то этот цикл имеет порядок >1.

Следствие 3 справедливо в предположении, что множество Ω содержит неповиджную точку α и притом не имеет места случай K_α^-, $K_\alpha^+\in K_\alpha(T^2)$,

K_α^-, $K_\alpha^+ \overline{\in} K_\alpha(T)$. Если предполагать только, что множество Ω содержит цикл порядка k, то отображение $S = T^{2k}$ имеет притягивающее множество Ω', содержащее неподвижную точку β, и притом случай K_β^-, $K_\beta^+ \in K_\beta(S^2)$, K_β^-, $K_\beta^+ \overline{\in} K_\beta(S)$ не имеет места. Следовательно, отображение S имеет цикл нечетного порядка >1; отображение T имеет цикл порядка $\neq 2^i$, $i=0, 1, 2, \ldots$

В [6] доказано: если отображение имеет цикл порядка $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то существует бесконечное притягивающее множество. Нетрудно показать, что при этом существует и бесконечное притягивающее множество, содержащее цикл.

Таким образом, *бесконечное притягивающее множество, содержащее цикл, существует тогда и только тогда, когда отображение имеет цикл порядка* $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Если отображение имеет лишь циклы порядка 2^i, $i=0, 1, 2, \ldots$, *то всякое притягивающее множество либо конечно и, следовательно, образует цикл, либо бесконечно и тогда не содержит циклов.*

Если множество Ω содержит плотное на R подмножество, то Ω должно состоять из конечного числа замкнутых интервалов [1]. Поскольку Ω содержит к тому же неподвижную точку α, то $\Omega = [c, d]$. $T[c, d] = [c,d]$; W-окрестность $U \subset [c, d]$. Интервал $[c, d]$ согласно лемме 4 содержит либо последовательность W-точек, сходящихся к α, либо W-точки α и β: $T\beta = \alpha$, $\beta \neq \alpha$, причем β является либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой (см. доказательство леммы 4). В последнем случае лемма 5 утверждает, что существует W-точка $\beta' \in \Omega$: $T\beta' = \beta$; так как $\beta \neq \alpha$, $T\alpha = \alpha$, то $\beta' \neq \beta, \alpha$.

Итак, интервал (c, d) содержит по крайней мере одну W-точку; из леммы 7 вытекает, что W-точки лежат на $[c, d]$ всюду плотно.

Таким образом, можно в дальнейшем предполагать, что множество Ω нигде не плотно на R. Это позволяет считать, что $[c, d] \not\subset H$. В таком случае, если точка $x \in P(\Omega)$ и является предельной для множества $R \setminus P(\Omega)$ слева (справа) или точка x — ω^- (ω^+)-предельная точка, то какова бы ни была окрестность G_{-x} (G_{+x}) найдется номер m: $T^m G_x \not\subset H$.

Поскольку мы пока не можем утверждать, что каждая W-точка является предельной для W-точек, дадим следующие определения.

Всякую точку, предельную для W-точек, назовем W-предельной точкой. Всякую точку, предельную слева (соответственно, справа) для W-точек назовем W^- (W^+)-предельной точкой.

Каждая W (W^-, W^+)-предельная точка является W (W^-, W^+)- точкой.

Пусть x — W^- (W^+)-предельная точка, $x' \in H$, $Tx' = x$.

Если для любой окрестности $G_{-x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{-x'}$ ($G_{+x} \subset TG_{-x'}$), то x' — W^--предельная точка.

Если для любой окрестности $G_{+x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{+x'}$ ($G_{+x} \subset TG_{+x'}$), то x' — W^+-предельная точка.

Поэтому леммы 5, 6 остаются справедливыми, если в их формулировках W-точки заменить W-предельными точками.

Лемма 5′. *Если точка β является ω^-- и W^--предельной точкой или ω^+- и W^+-предельной точкой, то существует точка β', для которой $T\beta' = \beta$, являющаяся ω^-- и W^--предельной точкой или ω^+- и W^+-предельной точкой.*

Лемма 6′. *Если β является W^-(W^+)-предельной точкой, когда β—ω^-(ω^+)-предельная точка, и $T\beta' = \beta$, то β' является W^-(W^+)-предельной точкой, если β' — ω^- (ω^+)-предельная точка.*

Лемма 8. *Всякая ω^- (ω^+)-предельная точка является W^-(W^+)- предельной точкой.*

Доказательство. Существует замкнутое множество $F \subseteq \Omega$, обладающее свойствами:

A — 1) $TF = F$;

А — 2) всякая точка множества F является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Действительно, лемма 4 утверждает: или существует точка $\beta_0 \neq \alpha$, для которой $T\beta_0 = \alpha$ и являющаяся либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой, или α является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Таким образом, если согласно лемме 4 α — W-предельная точка, то множество $F = \alpha$ удовлетворяет условиям А. Если же существует W-точка β_0: $T\beta_0 = \alpha$, то множество F можно построить следующим образом.

Найдется точка β_1, для которой $T\beta_1 = \beta_0$ и являющаяся либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой (лемма 5); найдется точка β_2, для которой $T\beta_2 = \beta_1$ и являющаяся либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой и т. д. Точки $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ попарно различны, так как $\beta_0 \neq \alpha$, $T\beta_0 = \alpha$, $T\alpha = \alpha$.

Обозначим F множество, состоящее из предельных точек последовательности $\{\beta_i\}_{i=0}^{\infty}$. Множество F замкнуто и не пусто. Очевидно, $TF = F$ и всякая точка множества F является либо ω^-- и W^--предельной, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Лемма 6′ позволяет предполагать, что

А — 3) если $\beta \in F$ является W^- (W^+)-предельной точкой, когда β — ω^- (ω^+)-предельная точка, и $\beta' \in F$, $T\beta' = \beta$, то β' является W^-(W^+)-предельной точкой, если β' — ω^- (ω^+)-предельная точка.

Из того, что всякая точка множества F является W-предельной, вытекает:

А — 4) если $\beta \in F$, точки $T^j\beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны и β — ω^- (ω^+)-предельная точка, то β является W^- (W^+)-предельной точкой;

А — 5) если точка $\beta \in F$ принадлежит циклу порядка k и пока неизвестно*, является ли β — W^- (W^+)-предельной точкой, то $K_\beta^- \in K_\beta(T^k)$ (соответственно $K_\beta^+ \in K_\beta(T_k)$); таких точек β конечное число.

Докажем это. Обозначим a_i и b_i соответственно левый и правый концы множества $F \cap H_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Если множество $F \cap H_{i'}$ состоит из одной точки, то $a_{i'} = b_{i'}$; если множество $F \cap H_{i''}$ пусто, то точки a_i, b_i с номером $i = i''$ отсутствуют.

Предположим, существует точка $\beta \in F$, для которой $T^j \beta \in \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} (a_i, b_i)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Если β — ω^--предельная точка, для любой окрестности $G_{-\beta}$ найдется номер j': $T^j G_{-\beta} \subset \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} [a_i, b_i]$ при $j < j'$, $T^{j'} G_{-\beta} \not\subset \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} [a_i, b_i]$. Так как $T^{j'}\beta \in \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} (a_i, b_i)$, то множество $T^{j'} G_{-\beta}$ содержит вместе с некоторой окрестностью хотя бы одну из W-точек a_i, b_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Следовательно, окрестность $G_{-\beta}$ также содержит хотя бы одну W-точку и β является W^--предельной точкой. Аналогично, если β — ω^+-предельная точка, то β является и W^+-предельной точкой.

Если $\beta' \in F$ и точки $T^j\beta'$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны, то найдется номер j': $T^j\beta' \in \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} (a_i, b_i)$ при $j \geqslant j'$. Точка $T^{j'}\beta'$ обладает свойством А — 4. Следовательно (лемма 6′), точка β' также обладает свойством А — 4.

---

* Т. е. не может быть установлено при использовании сформулированных выше свойств W-предельных точек.

Пусть точка $\beta' \in F$ принадлежит циклу порядка k. Если $T^j\beta' \in \in \bigcup_{1 \leq i \leq r} (a_i, b_i)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, то, как показано выше, точка β' является W^- (W^+)-предельной точкой, как только β' — ω^- (ω^+)-предельная точка. Циклов, у которых по крайней мере одна точка принадлежит множеству $\{a_i, b_i, i = 1, \ldots, r\}$, конечное число. Если точка β' принадлежит такому циклу и пока неизвестно, является ли β', например, W^--предельной точкой, то поскольку β' — W^+-предельная точка, $K_{\beta'}^- \in K_{\beta'}(T^k)$. Таким образом, можно считать, что множество F обладает и свойством А—5.

Ниже мы докажем: если существует последовательность замкнутых множеств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\zeta \subset \ldots, \zeta < \varrho$, где ϱ—некоторое порядковое число, удовлетворяющих условиям А, причем $F_\zeta \neq \Omega$, то можно построить замкнутое множество F_ϱ, удовлетворяющее условиям А и такое, что $F_\zeta \subset F_\varrho$ при $\zeta < \varrho$. Так как всякая последовательность расширяющихся замкнутых множеств стационарна, найдется порядковое число $\varrho' < \omega_1$ такое, что $F_{\varrho'} = \Omega$. Таким образом, отсюда будет следовать, что множество Ω удовлетворяет условиям А.

Если Ω удовлетворяет условиям А, то всякая ω^- (ω^+)-предельная точка является W^- (W^+)-предельной точкой. В самом деле, если $\beta \in \Omega$ и точки $T^j\beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны, то об этом говорит А — 4. Допустим, точка β принадлежит циклу порядка k и, используя свойства W-предельных точек, нельзя установить, что β является, например, W^--предельной точкой. В таком случае точка β не является предельной слева для множества Ω (ввиду А—2) и $K_\beta^- \in K_\beta(T^k)$; из леммы 2 вытекает, что β не является ω^--предельной точкой. Таким образом, утверждение верно и для точек циклов. Из А—3 следует, что утверждение верно тогда и для любой точки $\beta \in \Omega$, для которой существует номер j' такой, что $T^{j'}\beta$—точка цикла.

Итак, для доказательства леммы 8 нужно уметь для любой последовательности замкнутых множеств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\zeta \subset \ldots$, $F_\zeta \neq \Omega$, $\zeta < \varrho$, удовлетворяющих условиям А, построить замкнутое множество F_ϱ, удовлетворяющее условиям А и такое, что $F_\zeta \subset F_\varrho$ при $\zeta < \varrho$. Если ϱ—предельное порядковое число, то полагаем $F_\varrho = \overline{\bigcup_{\zeta < \varrho} F_\zeta}$. Множество F_ϱ удовлетворяет условиям А (достаточно проверить лишь А—1 и А—2). Следовательно, остается доказать, что для любого замкнутого множества $F \neq \Omega$, удовлетворяющего условиям А, можно построить замкнутое множество $F' \supset F$, также удовлетворяющее условиям А.

Будем считать нашу задачу выполненной всякий раз, когда будет найдена точка $\beta_0 \in \Omega \setminus F$ такая, что точки $\beta_i = T^i\beta_0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, являются либо ω^-- и W^--предельными точками, либо ω^+- и W^+-предельными точками*.

В самом деле, в этом случае найдутся точка β_{-1}: $T\beta_{-1} = \beta_0$, точка β_{-2}: $:T\beta_{-2} = \beta_{-1}$ и т. д., каждая из которых является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+- предельной точкой (лемма 5′). Положим $F' = F \cup \cup \overline{\{\beta_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}}$. Множество F' замкнуто и, очевидно, выполняются условия А—1 и А—2.

---

* Если лемма 8 справедлива, то справедливо и утверждение: если β — ω^-- и W^--предельная точка или ω^+- и W^+-предельная точка, то и $\beta' = T\beta$ также является ω^-- и W^--предельной или ω^+- и W^+- предельной точкой. Однако доказывать это утверждение непосредственно мы не умеем.

Отыскание точки $\beta_0 \in \Omega \setminus F$ существенно опирается на лемму 1. Как при этом используется лемма 1, будет видно на простейшем случае, который сейчас будет рассмотрен.

Итак, пусть всякая точка множества F, являющаяся $\omega^-(\omega^+)$-предельной, является и $W^-(W^+)$-предельной точкой. Обозначим, как и ранее, a_i, b_i—левый и правый концы множества $F \cap H_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ (можно считать, что $F \cap H_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, r$). Пусть $a'_i \in H_i \cap \{x < a_i\}$ и является W-точкой, если a_i — ω^--предельная точка, или произвольной точкой, но такой, что $(a'_i, a_i) \cap \Omega = \varnothing$, если a_i не является ω^--предельной точкой. Аналогично, $b'_i \in H_i \cap \{x > b_i\}$ и является W-точкой, если b_i — ω^+-предельная точка, или произвольной точкой, но такой, что $(b_i, b'_i) \cap \Omega = \varnothing$, если b_i не является ω^+-предельной точкой.

Положим $G_1 = \bigcup\limits_i (a'_i, b'_i)$, $G_2 = \varnothing$. $F \subset G_1$; множество F не изолировано в Ω[1]. Из леммы 1 следует, что существует точка $\beta \in \Omega \setminus F$, для которой $T^j\beta \in \in \bar{G}_1$, $j = 1, 2, \ldots$

Если существует номер j': $T^{j'}\beta \in F$, то всякая точка $T^j\beta$, $0 \leqslant j < j'$, является $W^-(W^+)$-предельной точкой, как только $T^j\beta$—$\omega^-(\omega^+)$-предельная точка (лемма 6′).

Пусть $T^j\beta \bar{\in} F$, $j = 1, 2, \ldots$ Положим

$$c_i = \begin{cases} a'_i, & \text{если } a_i \text{—}\omega^-\text{-предельная точка,} \\ a_i, & \text{если } a_i \text{ не является } \omega^-\text{-предельной точкой;} \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} b'_i, & \text{если } b_i \text{—}\omega^+\text{-предельная точка,} \\ b_i, & \text{если } b_i \text{ не является } \omega^+\text{-предельной точкой.} \end{cases}$$

Можно считать, что $T^j\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Если β—$\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, то для любой окрестности $G_{-\beta}(G_{+\beta})$ найдется номер m: $T^jG_{\mp\beta} \subset H$ при $j < m$, $T^mG_{\mp\beta} \not\subset H$. Так как $T^m\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, $T^mG_{\mp\beta} \not\subset \bigcup\limits_i [c_i, d_i]$,, то множество $T^mG_{\mp\beta}$ содержит хотя бы одну из W-точек c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, вместе с некоторым открытым множеством. Следовательно, окрестность $G_{-\beta}$ $(G_{+\beta})$ содержит хотя бы одну W-точку; точка β является $W^-(W^+)$-предельной точкой. Аналогично доказывается, что и любая точка $\beta' = T^j\beta$, $j > 0$, является $W^-(W^+)$-предельной точкой, как только β'—$\omega^-(\omega^+)$-предельная точка.

Перейдем к рассмотрению общего случая, т. е. не будем предполагать, что всякая $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка множества F является $W^-(W^+)$-предельной точкой. Последнее означает, что может существовать ω^-- и ω^+-предельная точка, являющаяся, например, W^--предельной, о которой неизвестно, является ли она W^+-предельной точкой.

Предположим, существует точка $\beta \in \Omega \setminus F$, для которой $T\beta \in F$.

Если $\beta' = T\beta$—$W^-(W^+)$-предельная точка, как только β'—$\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, то и точка β является $W^-(W^+)$-предельной точкой, если β—$\omega^-(\omega^+)$-предельная точка (лемма 6′).

Предположим, $\beta' = T\beta$—ω^-- и ω^+-предельная точка—является, например, W^--предельной точкой и еще не установлено, является ли β' W^+-предельной точкой. Если β—ω^--предельная точка и для любой окрестности $G_{-\beta}$ найдется окрестность $G_{-\beta'} \subset TG_{-\beta}$, то β—W^--предельная точка; если β—ω^+-предельная точка и для любой окрестности $G_{+\beta}$ найдется окрестность $G_{-\beta'}\subset TG_{+\beta}$, то β—W^+-предельная точка. Следовательно, точка β является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Остается рассмотреть случай: (*) существует окрестность $G_{-\beta}$: $: TG_{-\beta}\subset \overset{*}{K}_{\beta'}$, если β—ω^--предельная точка, и окрестность $G_{+\beta}: TG_{+\beta}\subset \subset \overset{*}{K}_{\beta'}$, если β—ω^+-предельная точка, где * заменяет «—», если неизвестно является ли β' W^--предельной точкой, и «+», если неизвестно, является ли β'—W^+-предельной точкой. При этом найдется номер j' такой, что $T^{j'}\beta$ — точка цикла (ввиду А—4 и А—3).

Итак, ниже будем предполагать, что для любой точки $\beta\in\Omega\setminus F$ либо $T\beta\in\Omega\setminus F$, либо, если $T\beta\in F$, то для точек β и $\beta'=T\beta$ имеет место случай (*).

Обозначим $B_1, B_2, \ldots, B_s$ циклы, входящие во множество F и содержащие хотя бы одну ω^-- и ω^+-предельную точку, о которой неизвестно, является ли она W^*-предельной точкой (* заменяет либо «–», либо «+»). Ввиду А—3 и любая точка цикла B_i, $1\leqslant i\leqslant s$, является таковой.

Пусть k_i—порядок цикла B_i, $1\leqslant i\leqslant s$. Если $\beta\in B_i$, то согласно А—5 $\overset{*}{K}_\beta\in K_\beta(T^{k_i})$. Выберем произвольным образом из каждого цикла B_i по одной точке β_i, $1\leqslant i\leqslant s$. Найдутся окрестности $G_{*T^j\beta_i}$, $j=0, 1, \ldots, k_i-1$, $i=1, 2, \ldots, s$, такие, что $T^j\overline{G}_{*\beta_i}=\overline{G}_{*T^j\beta_i}$, $j=1, 2, \ldots, k_i-1$, $T^{k_i}\overline{G}_{*\beta_i}\subset \subset \overset{*}{K}_{\beta_i}$, $F\cap T^{k_i}\overline{G}_{*\beta_i}=\{\beta_i\}$ и $G_{*T^j\beta_i}\subset H$. Очевидно, $F\cap G_{*T^j\beta_i}=\varnothing$ для всех i, j; $T^{k_i}\overline{G}_{*\beta_i}\supset\overline{G}_{*\beta_i}$.

Положим, $G_1=H\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s}(T^{k_i}\overline{G}_{*\beta_i}\setminus G_{*\beta_i}\setminus\beta_i)$ и $G_2=\bigcup\limits_{i=1}^{s}\bigcup\limits_{j=0}^{k_i-1}G_{*T^j\beta_i}$. G_1 и G_2— открытые множества, $F\subset G_1$, $F\cap G_2=\varnothing$; $T\overline{G}_2=\overline{G}_2\cup\bigcup\limits_{i=1}^{s}(T^{k_i}\overline{G}_{*\beta_i}\setminus G_{*\beta_i}\setminus\beta_i)\subset \subset\overline{G}_2\cup(R\setminus G_1)$.

Для любой ω^*-предельной точки $\beta\in F$, о которой неизвестно, является ли она W^*-предельной точкой, существует номер j' и окрестность $G_{*\beta}$ такие, что $T^j\beta\,\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{s}B_i$ при $j<j'$, $T^{j'}\beta\in\bigcup\limits_{i=1}^{s}B_i$, $T^{j'}\overline{G}_{*\beta}\subset\overline{G}_2$.

При сделанных выше предположениях либо

Б—1: множество F не изолировано во множестве $F\cup\{\gamma\in\Omega,\ T^j\gamma\,\overline{\in}\, F\cup G_2,\ j=0, 1, 2, \ldots\}$, либо

Б—2: существует ω^-- и W^-(ω^+- и W^+-)-предельная точка $\beta\in F$, предельная слева (справа) для точек $\gamma\in\Omega\setminus F$, $T\gamma\,\overline{\in}\, F$, $\gamma\,\overline{\in}\, G_2$.

Докажем это. Обозначим D множество точек $\delta\in\Omega\cap(R\setminus G_2)$, для которых $T\delta\in F$. Множество D замкнуто и $F\subset D$. Для любой точки $\delta\in D\setminus F$ существует номер $j_\delta: T^{j_\delta}\delta\in\bigcup\limits_{i=1}^{s}B_i$, $T^j\delta\,\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{s}B_i$ при $j<j_\delta$.

Предположим, $D\setminus F$—замкнутое множество. В этом случае существует m такое, что $j_\delta\leqslant m$ для $\delta\in D\setminus F$. В самом деле, допустим $j_{\delta_1}<j_{\delta_2}<\ldots$, $\delta_i\in \in D\setminus F$, $j=1, 2, \ldots$ Точки $T\delta_i\in F$, $i=1, 2, \ldots$, и попарно различны; если, например, $T\delta_{i_1}<T\delta_{i_2}<\ldots\to\delta'$, то $\delta'\in F$ и является ω^-- и W^--предельной точкой. Если точка δ'' является предельной для множества $\{\delta_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ слева (справа), то δ^{*} — ω^{-}- и W^{-} (ω^{+}- и W^{+}-)-предельная точка; $\delta^{*}\in D\setminus F$; однако по предположению может иметь место лишь случай (*).

Положим $B=\bigcup_{j=1}^{m}T^{j}(D\setminus F)$. $B\subseteq F$. Множество B замкнуто и, в частности, может быть пустым. Любая точка $\delta\in B$ такова, что относительно нее нельзя утверждать: δ является W^{-} (W^{+})-предельной точкой, как только δ — ω^{-} (ω^{+})-предельная точка (ввиду леммы 6′ и предположения (*)).

Если $B\neq F$, возьмем открытое множество G_B: $B\subset G_B$, $F\not\subset\overline{G}_B$. Для любой точки $\delta\in B$ найдется односторонняя окрестность $G_{*\delta}$: $G_{*\delta}\subset G_B$, $G_{*\delta}\cap F=\varnothing$, $T\overline{G}_{*\delta}\subset\overline{G}_{*\delta'}$, если $\delta'=T\delta$, и $T^{j}\,\overline{G}_{*\delta}\subset\overline{G}_2$, если $T^{j'}\delta\in\bigcup_{i=1}^{s}B_i$, $T^{j}\delta\in\bigcup_{i=1}^{s}B_i$ при $j<j'$. $G^{*}=\bigcup_{\delta\in B}G_{*\delta}$ — открытое множество, $F\cap G^{*}=\varnothing$, $T\overline{G}^{*}\subset\overline{G}'\cup\overline{G}_2$. Положим $G_2'=G_2\cup G^{*}$; G_2' — открытое множество, $F\cap G_2'=\varnothing$, $T\overline{G}_2'\subset\overline{G}_2\cup(R\setminus G_1)$.

Если $B=F$, полагаем $G_2'=G_2$.

Пусть $x\in P(\Omega)$. Для любого открытого множества $G\supset F$ и любого n найдется $n'>n$: $T^{n'}x\in G\setminus\overline{G}_2'$.

Для всякой точки $\delta\in D\setminus F$, являющейся ω^{-} (ω^{+})-предельной точкой, существует окрестность $G_{-\delta}$ ($G_{+\delta}$): $T\overline{G}_{\mp\delta}\subset\overline{G}_2'$. Однако, если $\delta\in D\setminus F$ и точка δ не является ω^{*}-предельной точкой, то не исключено, что для любой окрестности $G_{*\delta}T\overline{G}_{*\delta}\not\subset\overline{G}_2'$ (и тогда δ — W^{+}-предельная точка). Обозначим $\widetilde{D}$ множество точек, принадлежащих $D\setminus F$ и являющихся либо только ω^{-}-предельными, либо только ω^{+}-предельными. Если $\delta\in\widetilde{D}$ и не является, например, ω^{-}-предельной точкой, возьмем окрестность $G_{-\delta}$, не содержащую точек $T^{j}x$, $j=0, 1, 2, \ldots$, и точки η_δ, $\eta_\delta'\in G_{-\delta}$, $\eta_\delta<\eta_\delta'$. На интервале $[\eta_\delta, \delta]$ построим непрерывное кусочно-линейное отображение $\widetilde{T}$: $\widetilde{T}\eta_\delta=T\eta_\delta$, $\widetilde{T}\eta_\delta'=T\delta$, $\widetilde{T}\delta=T\delta$. Найдется окрестность $G_{-\delta}'$: $\widetilde{T}\overline{G}_{-\delta}'\subset\overline{G}_2'$. Аналогично построим отображение $\widetilde{T}$ для каждой точки $\delta\in\widetilde{D}$; отображение $\widetilde{T}$ определено на совокупности интервалов $[\eta_\delta,\delta]$ (или $[\delta, \eta_\delta]$), $\delta\in\widetilde{D}$. Полагаем, что вне интервалов $[\eta_\delta, \delta]$ $\widetilde{T}$ совпадает с T. Отображение $\widetilde{T}$ определено и непрерывно на R и совпадает с T на множествах $\{T^{j}x\}_{j=0}^{\infty}$ и Ω. Для любой точки $\delta\in D\setminus F$ найдется окрестность G_δ: $\widetilde{T}\overline{G}_\delta\subset\overline{G}_2'$. Положим $G''=\bigcup_{\delta\in D\setminus F}G_\delta$. $D\setminus F\subset G''$, $\widetilde{T}\overline{G}''\subset\overline{G}_2'$. Можно считать, что $F\cap\overline{G}_2=\varnothing$.

Возьмем произвольное открытое множество G: $F\subset G\subset G_1$ и последовательность чисел $j_1<j_2<\ldots$ таких, что $\widetilde{T}^{j_n}x\in G\setminus\overline{G}_2'$, $\widetilde{T}^{j_n-1}x\in G\setminus\overline{G}_2'$, $n=1, 2, \ldots$. $\widetilde{T}^{j_n-1}x\notin\overline{G}_2'$, так как $\widetilde{T}\overline{G}_2'\subset R\setminus(G_1\setminus\overline{G}_2')$, $G\subset G_1$. $\widetilde{T}^{j_n-1}x\notin G''$, так как $\widetilde{T}\overline{G}''\subset\overline{G}_2'$. Если точка $\widetilde{\gamma}$ является предельной для множества $\{\widetilde{T}^{j_n-1}x\}_{n=1}^{\infty}$, то $\widetilde{\gamma}\notin G_2'\cup G''$. Следовательно, точка $\gamma=\widetilde{T}\widetilde{\gamma}$ не принадлежит F; $\gamma\in\overline{G}\setminus G_2'$. Множество G можно всегда выбрать так, что $\overline{G}\setminus G_2'\subset F\cup(\overline{G}\setminus\overline{G}_2)$, и тогда $\gamma\in\overline{G}\setminus\overline{G}_2$, так как $\gamma\notin F$. Итак, F не изолировано во множестве $F\cup(\Omega\setminus(\Omega\cap\overline{G}_2))$.

Множество $G_2''=G_2'\cup G''$ открыто, $F\cap\overline{G}_2''=\varnothing$, $\widetilde{T}\overline{G}_2''\subset\overline{G}_2''\cup(R\setminus G_1)$. Множество F не изолировано во множестве $F\cup(\Omega\setminus(\Omega\cap\overline{G}_2))$, так как $F\cap\overline{G}''=\varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $\widetilde{G}$: $F\subset\widetilde{G}$, $\overline{\widetilde{G}}\subset G_1$. Найдется точка $\gamma\in\Omega\setminus F$: $\gamma\,\overline{\in}\,G_2$, $\widetilde{T}^j\gamma\in\overline{\widetilde{G}}\setminus G_2$, $j=1,2,\ldots$ (лемма 1). На множестве Ω отображения $\widetilde{T}$ и T совпадают. Следовательно, $T^j\gamma\,\overline{\in}\,G_2$, $j=0,1,2,\ldots$ Поскольку $D\setminus F\subset G_2$, то $T^j\gamma\,\overline{\in}\,F$, $j=1,2,\ldots$ Таким образом, всякое открытое множество, содержащее F, содержит точку $\gamma\in\Omega$, для которой $T^j\gamma\,\overline{\in}\,F\bigcup G_2$, $j=0,1,2,\ldots$; множество F обладает свойством Б — 1.

Пусть $D\setminus F$ — незамкнутое множество, т. е. F не изолировано в D.

Предположим, существует ω^-- и W^- (ω^+- и W^+-)-предельная точка $\beta'\in F$ и последовательность точек $\gamma_1'<\gamma_2<\ldots\to\beta'$ (соответственно, $\gamma_1'>\gamma_2'>\ldots\to\beta'$), $\gamma_i'\in D\setminus F$, $i=1,2,\ldots$ Так как $T\Omega=\Omega$, для каждой точки γ_i' найдется точка γ_i: $T\gamma_i=\gamma_i'$, $\gamma_i\in\Omega$. Так как $TF=F$, $T\gamma_i\,\overline{\in}\,F$, то $\gamma_i\,\overline{\in}\,F$, $i=1,2,\ldots$ Можно считать, что $\gamma_i'\in G_1$, $i=1,2,\ldots$; тогда $\gamma_i\,\overline{\in}\,G_2$, так как $\gamma_i'\in G_2$, $T\overline{G}_2\subset\overline{G}_2\bigcup(R\setminus G_1)$. Пусть точка β является предельной для множества $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$. Если β является предельной слева, то β — ω^-- и W^--предельная точка, если β является предельной справа, то β — ω^+- и W^+-предельная точка. Точка $\beta\in F$ (в силу предложения (*)); множество F обладает свойством Б — 2.

Предположим, для любой точки множества F, предельной слева (справа) для множества $D\setminus F$, неизвестно, является ли она W^- (W^+)-предельной точкой. В этом случае существует лишь конечное число точек множества F, предельных для множества $D\setminus F$ (если множество таких точек бесконечно, то всякая предельная для них точка является ω^--, W^--предельной и предельной слева для множества $D\setminus F$ или ω^+-, W^+-предельной и предельной справа для множества $D\setminus F$). Существует открытое множество G: $F\bigcap G=\varnothing$, $T\overline{G}\subset\overline{G}\bigcup\overline{G}_2$, множество $(D\setminus F)\bigcap(R\setminus G)$ замкнуто, для любой ω^*- и W^*-предельной точки $\beta\in F$ найдется окрестность $G_{*\beta}$: $G\bigcap G_{*\beta}=\varnothing$. Повторяя далее рассуждения, приведенные в случае, когда $D\setminus F$ — замкнутое множество, найдем, что множество F обладает свойством Б — 1.

Итак, множество F обладает свойством Б — 1, либо свойством Б — 2.

Из Б — 1 следует Б — 2. Действительно, если, например, точка β является предельной слева для множества $\{\gamma\in\Omega,\ T^j\gamma\,\overline{\in}\,F\bigcup G_2,\ j=0,1,2,\ldots\}$, то β — ω^-- и W^--предельная точка, так как для любой окрестности $G_{-\beta}$ $T^j\overline{G}_{-\beta}\not\subset\overline{G}_2$, $j=0,1,2,\ldots$

Выберем последовательность точек $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i\in D\setminus F$, $T\gamma_i\,\overline{\in}\,F$, $\gamma_i\,\overline{\in}\,G_2$, $i=1,2,\ldots$, сходящуюся слева (справа) к некоторой ω^-- и W^- (ω^+- и W^+-)-предельной точке $\beta\in F$. Можно всегда предположить, что $\gamma_i\,\overline{\in}\,\overline{G}_2$, $i=1,2,\ldots$

Обозначим $\widehat{F}$ — множество точек, принадлежащих F, являющихся ω^-- и ω^+-предельными, о которых неизвестно, являются ли они W^*-предельными точками. Если $\delta\in\widehat{F}$, то и $T\delta\in\widehat{F}$ (ввиду А — 3); существует номер j_δ: $T^j\delta\,\overline{\in}\,\bigcup\limits_{i=1}^{k}B_i$ при $j<j_\delta$, $T^{j_\delta}\delta\in\bigcup\limits_{i=1}^{k}B_i$ (ввиду А — 4). Для любой точки $\delta\in\widehat{F}$ найдется окрестность $G_{*\delta}$:

$$\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}\bigcap G_{*\delta}=\varnothing,\quad F\bigcap G_{*\delta}=\varnothing,\quad T\overline{G}_{*\delta}\subset\overline{G}_{*T\delta},\quad T^{j_\delta}\overline{G}_{*\delta}\subset\overline{G}_2.$$

Обозначим $\widehat{G}$ множество $\bigcup\limits_{\delta\in\widehat{F}}G_{*\delta}$. $\widehat{G}$ — открытое множество, $F\bigcap\widehat{G}=\varnothing$, $T\overline{\widehat{G}}\subset\overline{\widehat{G}}\bigcup\overline{G}_2$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}\bigcap\overline{\widehat{G}}=\varnothing$, так как $\overline{\widehat{G}}\subset\bigcup\limits_{\delta\in\widehat{F}}\overline{G}_{*\delta}\bigcup F$.

Рассмотрим множество $D \setminus F$. Точки γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, не принадлежат $D \setminus F$. $T(D \setminus F) \subset F$; если точка $\delta \in D \setminus F$ является ω^- (ω^+)-предельной точкой, найдется окрестность $G_{-\delta}(G_{+\delta})$: $TG_{+\delta} \subset \hat{G}$ (согласно предположениям). Однако если точка $\delta \in D \setminus F$ не является ω^*-предельной точкой, то возможно, что для любой окрестности $G_{*\delta}$ $T\overline{G}_{*\delta} \not\subset \overline{\hat{G}}$. Поэтому, как и при доказательстве свойств Б, перейдем к отображению $\tilde{T}$, изменив отображение T указанным выше способом. Для любой точки $\delta \in D \setminus F$ найдется окрестность G_δ: $\widetilde{TG_\delta} \subset \hat{G}$, $F \cap G_\delta = \varnothing$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{G}_\delta = \varnothing$.

Множество $\tilde{G} = \bigcup\limits_{\delta \in D \setminus F} G_\delta$ открыто, $F \cap \overline{\tilde{G}} = \varnothing$, $\widetilde{T\tilde{G}} \subset \hat{G}$; $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{\tilde{G}} = \varnothing$, так как $\overline{\tilde{G}} \subset \bigcup\limits_{\delta \in D \setminus F} \overline{G}_\delta \cup D$.

Множество $\tilde{G}_2 = G_2 \cup \hat{G} \cup \tilde{G}$ открыто, $F \cap \overline{\tilde{G}}_2 = \varnothing$, $\tilde{T}\tilde{G}_2 \subset \tilde{G}_2 \cup (R \setminus G_1)$. Множество F не изолировано в $F \cup (\Omega \setminus (\Omega \cap \tilde{G}_2))$, так как $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{G}_2 = \varnothing$.

Возьмем произвольное открытое множество G_1': $F \subset G_1'$, $\overline{G_1'} \subset G_1$. Существует точка $\delta \in \Omega \setminus F$: $\delta \bar{\in} \tilde{G}_2$, $\tilde{T}^j\delta \in G_1' \setminus \tilde{G}_2$, $j = 1, 2, \ldots$ (лемма 1). Так как $\delta \bar{\in} F$, $\tilde{T}^j\delta \bar{\in} \tilde{G}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $\tilde{G} \supset D \setminus F$ и на множестве Ω отображения $\tilde{T}$ и T совпадают, то $T^j\delta \bar{\in} F$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, в любом открытом множестве $H' \supset F$ найдется точка $\gamma \in \Omega$, для которой $T^j\gamma \in H' \setminus F$, $T^j\gamma \bar{\in} G_2 \cup \hat{G}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Множество H' построим следующим образом. Пусть a_i, b_i — левый и правый концы множества $F \cap H_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ (если $F \cap H_{i'} = \varnothing$, то точек a_i, b_i с номером $i = i'$ нет и множество $H_{i'}$ можно не рассматривать). Возьмем точку $a_i' \in H_i$, $a_i' < a_i$, причем

1) a_i' — W-точка, если a_i — ω^-- и W^--предельная точка;

2) $(a_i', a_i) \subset G_2 \cup \hat{G}$, если a_i — ω^--предельная точка и неизвестно, является ли W^--предельной точкой; точку $b_i' \in H_i$, $b_i' > b_i$, причем 1) b_i' — W-точка, если b_i — ω^+- и W^+- предельная точка, 2) $(b_i, b_i') \subset G_2 \cup \hat{G}$, если b_i — ω^+-предельная точка и неизвестно, является ли b_i W^+-предельной точкой.

Множество $H' = \bigcup\limits_i (a_i', b_i')$ содержит F. Найдется точка $\beta \in \Omega$, для которой $T^j\beta \in H' \setminus F$, $T^j\beta \bar{\in} G_2 \cup \hat{G}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Положим

$$c_i = \begin{cases} a_i', & \text{если } a_i \text{ — } \omega^-\text{- и } W^-\text{-предельная точка,} \\ a_i & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} b_i', & \text{если } b_i \text{ — } \omega^+\text{- и } W^+\text{-предельная точка,} \\ b_i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, $T^j\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Точки c_i, d_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, являются W-точками. Если β — ω^- (ω^+)-предельная точка, для любой окрестности $G_{-\beta}(G_{+\beta})$ найдется номер m: $T^jG_{+\beta} \subset \bigcup\limits_i [c_i, d_i]$ при $j < m$, $T^mG_{\mp\beta} \not\subset \bigcup\limits_i [c_i, d_i]$. Так как $T^m\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, то множество $T^mG_{+\beta}$ содержит хотя бы одну из W-точек c_i, d_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, вместе с некоторой окрестностью (двусторонней); следовательно, множество $G_{\mp\beta}$ содержит хотя бы одну W-точку и точка β является W^- (W^+)-предельной. Аналогично доказывается, что и каждая точка $T^j\beta$, $j = 1, 2, \ldots$, является W^- (W^+)-предельной точкой, как только $T^j\beta$ — ω^- (ω^+)-предельная точка.

Лемма 8 полностью доказана.

Лемма 9. *Всякая точка $x \in P(\Omega)$, для которой $T^jx \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, предельная слева (справа) для множества $R \setminus P(\Omega)$, является W^- (W^+)-предельной точкой.*

Если точка x является предельной, например, слева для множества $R \setminus P(\Omega)$, то для любой окрестности G_{-x} найдется либо окрестность $G_{-Tx} \subset \subset TG_{-x}$, причем точка Tx является предельной слева для множества $R \setminus P(\Omega)$, либо окрестность $G_{+Tx} \subset TG_{-x}$, причем точка Tx является предельной справа для множества $R \setminus P(\Omega)$. Следовательно, если лемма справедлива для точки $x' = Tx$, то она справедлива и для точки x; лемму достаточно доказать для некоторой точки $T^{j'}x$, $j > 0$.

Если существует номер j': $T^{j'}x \in \Omega$, то лемма 9 справедлива (лемма 8). Ниже будем предполагать, что $T^jx \,\overline{\in}\, \Omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть a_i, b_i — левый и правый концы множества $\Omega \cap H_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Обозначим c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, W-точки, принадлежащие H_i, причем

1) $c_i < a_i$, если a_i — ω^--предельная точка, и $c_i = a_i$, если a_i не является ω^--предельной точкой;

2) $d_i > b_i$, если b_i — ω^+-предельная точка и $d_i = b_i$, если b_i не является ω^+-предельной точкой.

Найдется номер j': $T^jx \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} (c_i, d_i)$ при $j \geqslant j'$.

Предположим, точка $x' = T^{j'}x$ является предельной слева для множества $R \setminus P(\Omega)$. Покажем, что любая окрестность $G_{-x'}$ содержит хотя бы одну W-точку. Действительно, найдется номер m: $T^jG_{-x'} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} [c_i, d_i]$ при $j < m$, $T^mG_{-x'} \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} [c_i, d_i]$ (следствие леммы 7). Так как $T^mx' \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} (c_i, d_i)$, интервал $T^mG_{-x'}$ содержит по крайней мере одну из W-точек c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, вместе с некоторой окрестностью. Следовательно, и множество $G_{-x'}$ содержит W-точку. Лемма доказана.

На этом подготовительная работа закончена и можно перейти к доказательству сформулированных в начале статьи результатов.

Докажем теорему 1 в предположениях: (B) множество Ω содержит неподвижную точку α, причем либо

1) $K_\alpha^-, K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$, либо

2′) $K_\alpha^- \in K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \,\overline{\in}\, K_\alpha(T)$, либо

2″) $K_\alpha^- \,\overline{\in}\, K_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \in K_\alpha(T)$, либо

3) $K_\alpha^-, K_\alpha^+ \,\overline{\in}\, K_\alpha(T)$, $K_\alpha^-, K_\alpha^+ \,\overline{\in}\, K_\alpha(T^2)$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $H \supset \Omega$. Пусть $H = \bigcup\limits_{i=1}^{r} H_i$, где H_i — открытые интервалы и $\Omega \cap H_i = \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, r$. При предположениях (B) имеет место лемма 4, можно построить открытое множество W и W-окрестность U; для этой W-окрестности справедлива лемма 9.

Возьмем произвольную точку $x \in P(\Omega) \cap W$, для которой $T^jx \in H$, $j = 1, 2, \ldots$, предельную для множества $R \setminus P(\Omega)$. Найдется номер m': для каждой компоненты H_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, существует номер $m_i \leqslant m'$ такой, что $T^{m_i}x \in H_i$. Возьмем окрестность $G_x: T^j G_x \subset H$ при $0 \leqslant j \leqslant m'$, $\overline{G_x} \subset W$. Обозначим I_1 замкнутый интервал $\overline{G_x}$. Существуют замкнутый интервал $I_2 \subset I_1$ и номер $m \geqslant m'$ такие, что $T^j I_2 \subset H$ при $j < m$, $T^m I_2 \supseteq I_1$ (следствие леммы 9 и свойств W-точек). Так как $T^m I_2 \supset I_2$, существует точка $y \in I_2$, для которой $T^m y = y$. Точки $y, Ty, \ldots, T^{m-1}y$ образуют цикл порядка $\leqslant m$. Этот цикл содержится в H. Каждая компонента H_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, содержит хотя бы одну точку цикла.

Рассмотрим теорему 1 в общем случае, когда известно только, что множество Ω содержит цикл. Пусть цикл имеет порядок k и α — точка этого цикла.

Для отображения $S = T^{2k}$ α является неподвижной точкой и удовлетворяет условиям 1) — 3). Если $x \in P(\Omega)$, то для отображения $S = T^{2k}$ последовательность $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ распадается на $2k$ подпоследовательностей и множество Ω распадается на $2k$ притягивающих множеств $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \ldots, \Omega^{(2k)}$ (быть может, некоторые из них или даже все они совпадают), причем

$$T\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)},\ T\Omega^{(2)} = \Omega^{(3)}, \ldots, T\Omega^{(2k)} = \Omega^{(1)},\ \bigcup_{q=1}^{2k} \Omega^{(1)} = \Omega. \qquad (*)$$

Если $\alpha \in \Omega^{(q')}$, то для множества $\Omega^{(q')}$ теорема 1 справедлива (ибо выполнены условия 1 — 3). Для любого открытого множества $H \supset \Omega$ открытое множество $H^{(q')} \supset \Omega^{(q')}$ можно выбрать так, что множества $H^{(q')}, TH^{(q')}, \ldots$ $\ldots, T^{2k-1}H^{(q')}$ содержатся в H (ввиду свойств (*) и непрерывности отображения). Если точки $y, Sy, \ldots, S^{m-1}y$ образуют цикл отображения S, содержащийся в $H^{(q')}$, то точки $y, Ty, \ldots, T^{2mk-1}y$ образуют цикл отображения T, содержащийся в H. Каждая компонента H_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, содержит по крайней мере одну из компонент множества $H^{(q')}$ или образ одной из компонент $H^{(q')}$, принадлежащий $TH^{(q')}, \ldots, T^{2k-1}H^{(q')}$. Следовательно, если каждая компонента множества $H^{(q')}$ содержит точку цикла отображения S, то и каждая компонента H_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, содержит точку цикла отображения T.

Этим самым теорема 1 доказана.

Теорема 2′. *Если множество Ω содержит цикл и существует точка $x \in P(\Omega)$, для которой $T^j x \in \Omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то $P(\Omega)$ — множество 3-го класса классификации Бэра — Валле-Пуссена.*

Доказательство теоремы повторяет в основном доказательство аналогичного утверждения в случае, когда Ω — неподвижная точка, приведенное в [2]. Поэтому ниже мы отметим лишь некоторые отличия от доказательства в [2], относящиеся к подготовительной части доказательства.

Пусть выполняются предположения (В).

Скажем, что открытое множество G удовлетворяет условию (Г), если всякая точка, являющаяся концом одной из компонент множества G, либо принадлежит множеству $R \diagdown \bigcup\limits_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$, либо, если она принадлежит $P(\Omega')$, $\Omega' \supset \Omega$, то множеству $P(\Omega')$ принадлежит и некоторый открытый в R интервал, содержащий эту точку. Выберем окрестность H множества Ω так, чтобы множество H удовлетворяло условию (Г). Это всегда можно сделать, учитывая, что всякая ω^- (ω^+)-предельная точка является предельной слева (справа) для множества $R \diagdown \bigcup\limits_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$, всякая точка множества $P(\Omega')$,

$\Omega' \supseteq \Omega$, предельная для множества $R \setminus P(\Omega')$ слева (справа), является предельной слева (справа) и для множества $R \setminus \bigcup\limits_{\Omega'' \supseteq \Omega} P(\Omega'')$ (лемма 7).

Построим W-окрестность U. При этом множество W можно выбрать так, чтобы W удовлетворяло условию (Г). Действительно, если окрестность W' неподвижной точки α такова, что $TW' \supset W'$, то, как легко видеть, можно взять окрестность $W \subseteq W'$, $TW \supset W$, удовлетворяющую условию (Г).

Обозначим I множество, состоящее из точек $x \in \bigcup\limits_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega') \cap \overline{W}$, предельных для множества $R \setminus \bigcup\limits_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$, для которых $T^j x \in \overline{H}$, $j = 1, 2, \ldots$ Множество I непусто (условие теоремы); $TI \supset I$; I — множество типа G_δ. Если точка $x \in I$ является предельной слева (справа) для множества $R \setminus \bigcup\limits_{\Omega' \supseteq \Omega} P(\Omega')$, то для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ и любой точки $x' \in I$ найдется номер m: $T^m(G_{\mp x} \cap I) \ni x'$ (ибо x — $W^-(W^+)$-точка). Поэтому множество I плотно в себе и, учитывая лемму 7 нигде не компактно. Следовательно [7], I гомеоморфно множеству иррациональных чисел.

Далее, как и в [2], показывается, что $I \cap P(\Omega)$ — множество 3-го класса.

Если вместо выполнения условий (В) требовать только, чтобы множество Ω содержало цикл, например, порядка k, то непосредственный переход к отображению $S = T^{2k}$, использованный при доказательстве теоремы 1, в данном случае ничего не дает: точки множества $P(\Omega)$ могут вести себя в окрестности множества Ω существенно различным образом и при переходе к отображению $S = T^{2k}$ множество $P(\Omega)$ может притягиваться не $2k$ притягивающими множествами, а быть может, и счетным числом таких множеств.

Если множество Ω содержит цикл порядка k, можно построить открытое множество $W \subset H: TW \supset W$, $\Omega \cap W \neq \varnothing$, цикл содержится в $\overline{W}$ и при этом W-окрестность $U = U(H, W)$ обладает свойством: если точка $x \in P(\Omega)$ является предельной слева (справа) для множества $R \setminus P(\Omega)$ и $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ и любого замкнутого множества $V \subset U$ найдется замкнутое множество $V' \subset \bigcup\limits_{j=0}^{2k-1} T^j G_{\mp x}$ (а не $\subset G_{\mp x}$, как в случае, когда W — окрестность неподвижной точки) и номер m: $T^j V' \subset H$ при $j < m$, $T^j V' \supset V$ при $j \geqslant m$. Этот факт нетрудно получить как следствие аналогичных результатов, полученных при предположениях (В). Отмеченное выше отличие в свойствах W-окрестности не существенно для приведенного ранее доказательства того, что $P(\Omega)$ — множество 3-го класса.

Следствие 1. *Если множество Ω содержит цикл и существует точка $x \in P(\Omega)$, для которой $T^j x \overline{\in} \Omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то существует множество $\Omega' \supset \Omega$.*

В самом деле, для любого множества $\widetilde{\Omega}$ $\bigcup\limits_{\Omega' \supseteq \widetilde{\Omega}} P(\Omega')$ является G_δ-множеством [1]. Поэтому можно утверждать даже больше: существует по крайней мере счетное число множеств Ω_ζ: $\Omega_\zeta \supset \Omega$, $\Omega_{\zeta'} \not\subset \Omega_{\zeta''}$ для любых ζ', ζ''.

Следствие 2. *Если множество Ω содержит цикл и изолированную в Ω точку, то $P(\Omega)$ — множество 3-го класса.*

Действительно, если Ω содержит изолированную точку, то $\Omega \cap P(\Omega) = \varnothing$.

Если не предполагать, что множество Ω содержит цикл, то можно построить примеры, когда утверждения теоремы 2 и следствий *1*, *2* не имеют места.

Лемма 10*. *Если существует окрестность множества Ω, не содержащая множеств $\Omega' \supset \Omega$, то $P(\Omega)$ — $G_{\delta\sigma}$-множество.*

Пусть $\sum$ — система открытых множеств σ_i, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что

1) $\sigma_i \cap \Omega \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots$,

2) для всякой окрестности G_x, $x \in \Omega$, найдется $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \subset G_x$.

Пусть G — открытое множество, $\Omega \subset G$ и для любого множества $\Omega' \supset \Omega$ $\Omega' \not\subset \overline{G}$. Обозначим $T_G^{-1}M$ множество точек $x \in G$, для которых $Tx \in M$; если M — открытое множество, то и $T_G^{-1}M$ — открытое множество. Для каждого $i \geqslant 1$ построим последовательность открытых множеств $\sigma_i^0, \sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots$, где $\sigma_i^0 = \sigma_i$, $\sigma_i^k = T_G^{-1}\sigma_i^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Множество $Q_i = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_i^k$ открыто; $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ — множество типа G_δ; $Q \subset G$. $T\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} TQ_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (Q_i \cup T\sigma_i)$. Если $y \in \Omega \cap \sigma_{i'}$ и $y' \in \Omega$, $Ty' = y$, то существует окрестность $G_{y'} : TG_{y'} \subset \sigma_{i'}$; найдется номер $i'' : \sigma_{i''} \subset G_{y'}$. Следовательно, $Q_{i'} \supset Q_{i''} \cup T\sigma_{i''}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (Q_i \cup T\sigma_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ и $TQ \subseteq Q$.

Множество $P(\Omega) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}Q$, где $T^{-j}Q$ — множество точек $x \in R$, для которых $T^j x \in Q$. В самом деле, для любой точки $x \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}Q$ существует номер $j_x : T^j x \in Q$ при $j \geqslant j_x$.

Если $x' \in P(\Omega')$, $\Omega' \supset \Omega$, то $\Omega' \not\subset \overline{G}$ и для любого $n > 0$ найдется $n' > n$: $T^{n'} x' \overline{\in} G$; поэтому $x' \overline{\in} \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^j Q$.

Если $x'' \in P(\Omega'')$ и существует точка $y \in \Omega$, не принадлежащая Ω'', то найдется $\sigma_{i'}$, не содержащее ни одной точки последовательности $\{T^j x''\}_{j=0}^{\infty}$.

Следовательно, $\{T^j x''\}_{j=0}^{\infty}$ не имеет общих точек с множествами $Q_{i'}$, Q, $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}Q$.

Итак, $P(\Omega) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}Q$ и есть $G_{\delta\sigma}$-множество.

Следствие. *Если существует окрестность множества Ω, не содержащая множеств $\Omega' \supset \Omega$,* то *$P(\Omega)$ — множество второго класса.*

Действительно, $P(\Omega)$ — множество класса > 1, если Ω — бесконечное множество [1, 2]. Так как $P(\Omega)$ всегда $F_{\sigma\delta}$-множество [1], то из леммы 10 вытекает, что $P(\Omega)$ — множество класса $\leqslant 2$.

---

* Леммы 10 и 12 имеют место и тогда, когда R — произвольный компакт.

Лемма 11. *Если множество Ω содержит цикл, то точка $x \in P(\Omega)$, для которой $T^j x \,\overline{\in}\, \Omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, существует тогда и только тогда, когда во всякой окрестности множества Ω существует множество $\Omega' \supset \Omega$.*

Из теоремы 2′ и следствия леммы 10 вытекает: если существует точка $x \in P(\Omega)$, для которой $T^j x \,\overline{\in}\, \Omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то во всякой окрестности множества Ω существует множество $\Omega' \supset \Omega$.

Докажем обратное утверждение. Будем предполагать, что выполнены условия (B). Доказательство в общем случае почти ничем не отличается от приводимого ниже.

Рассмотрим последовательность окрестностей множества Ω $H_1 \supset H_2 \supset \ldots, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$, и последовательность W-окрестностей $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, $U_n \subset H_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Для каждого $n \geqslant 1$ выберем множество Ω_n: $H_n \supset \Omega_n \supset \Omega$; точку $x_n \in P(\Omega_n)$, для которой $T^j x_n \in H_n$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и $x_n \in W_{n-1}$ при $n > 1$; окрестность G_{x_n}: $\Omega \bigcap \overline{G}_{x_n} = \varnothing$ и $\overline{G}_{x_n} \subset W_{n-1}$ при $n > 1$. Найдется номер j'_n такой, что каждая компонента множества H_n содержит по крайней мере одну точку множества $\{T^j x_n\}_{j=0}^{j'_n}$; найдется номер $j_n \geqslant j'_n$ и замкнутое множество $V_n \subset \overline{G}_{x_n}$: $T^j V_n \subset H_n$ при $j < j_n$, $T^{j_n} V_n \supset \overline{G}_{x_{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$ Возьмем замкнутое множество $M_1 \subset V_1$, для которого $T^{j_1} M_1 = V_2$, замкнутое множество $M_2 \subset M_1$, для которого $T^{j_1 + j_2} M_2 = V_3$, замкнутое множество $M_3 \subset M_2$, для которого $T^{j_1 + j_2 + j_3} M_3 = V_4$ и т. д. Множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ непусто и, если $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, то $x \in P(\Omega)$, $T^j x \,\overline{\in}\, \Omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 2 следует из теоремы 2′ и леммы 11.

Лемма 12. *Если $\Omega \bigcap P(\Omega) \neq \varnothing$ и существует замкнутое множество $F \subset \Omega : F \neq \Omega$, $TF = F$, то $P(\Omega)$ не является F_σ-множеством.*

Действительно, множество $\Omega \bigcap P(\Omega)$ лежит всюду плотно на Ω и является G_δ-множеством [1]. Множество $R \setminus P(\Omega)$ также всюду плотно на Ω [5]. Следовательно, $\Omega \bigcap (R \setminus P(\Omega))$ не является G_δ-множеством. Так как Ω — замкнутое множество, то $R \setminus P(\Omega)$ не является G_δ и $P(\Omega)$ — F_σ-множеством.

Таким образом, указанное в начале работы соответствие между тремя типами притягивающих множеств и структурой соответствующих притягивающихся множеств вытекает из [1], следствия 2 леммы 7, лемм 10, 12 и теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Шарковский, О притягивающих и притягивающихся множествах, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.
2. А. Н. Шарковский, Об одной классификации неподвижных точек, УМЖ, т. XVII, № 5, 1965.
3. Х. К. Кенжегулов, А. Н. Шарковский, О свойствах множества предельных точек итерационной последовательности, Волжский матем. сб., Изд-во Куйбышевск. пед. ин-та, вып. 3,1965.
4. Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах, Собр. соч., 2, Изд-во АН СССР, 1958.
5. О. М. Шарковський, Про неперервне відображення на множині ω-граничних точок, Доп. АН УРСР, № 11, 1965.
6. А. Н. Шарковский, О циклах и структуре непрерывного отображения, УМЖ, т. XVII, № 3, 1965.
7. П. С. Александров, П. С. Урысон, О нульмерных множествах, Math. Ann., 98, 1927.

Поступила 22.IX 1965 г.
Киев