О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями

В. В. Барковский, Я. А. Ройтберг

Целью настоящей заметки является изучение свойств регулярности функций из областей определения минимального и максимального операторов в пространстве $L_2(G) \oplus L_2(\Gamma) \oplus \ldots \oplus L_2(\Gamma)$ для общей эллиптической задачи с неоднородными граничными условиями. В случае второй краевой задачи для уравнения Лапласа подобные вопросы рассматривались в работе [1].

Ниже мы часто используем результаты работы [2], предполагая, что читатель знаком с нею.

1°. Пусть G — ограниченная область пространства E_n, $\dot{G}$ ее граница, $\Gamma \subset \dot{G}$ — открытое подмножество границы. В области $G \cup \Gamma$ рассмотрим эллиптическую граничную задачу:

$$\begin{gathered}(\mathfrak{L}u)(x) = f(x), \ x \in G, \\ (B_j u)(x) = \varphi_j(x), \ x \in \Gamma, \ j = 1, \ldots, m.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathfrak{L}$ — дифференциальное выражение с комплексными коэффициентами

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{2}$$

$$\left(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \ D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

правильно эллиптическое в $\overline{G}$ [3], а выражения

$$B_j = B_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha \, (x \in \Gamma, \; j = 1, \dots, m; \; m_j \leqslant 2m - 1) \tag{3}$$

нормальны и накрывают $\mathfrak{L}$ (см. [3]).

Если коэффициенты дифференциальных выражений и Γ достаточно гладки, то имеет место формула Грина [3, 4]

$$(\mathfrak{L}u, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C'_j v \rangle = (u, \mathfrak{L}^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B'_j v \rangle \tag{4}$$

$$(u \in C_0^{2m}(G \cup \Gamma), \; v \in C^{2m}(\overline{G})).$$

Здесь $\mathfrak{L}^+$ — выражение, формально сопряженное $\mathfrak{L}$;

$$B'_j = \sum_{|\alpha| \le m'_j} b'_{j\alpha}(x) D^\alpha \quad (j = 1, \dots, m) \tag{5}$$

— система нормальных дифференциальных выражений, накрывающих $\mathfrak{L}^+$; $\{C_j(x, D)\}_{j=1}^m$, $\{C'_j(x, D)\}_{j=1}^m$ — дифференциальные выражения типа (3) порядков l_j и l'_j, соответственно ($l_j + m'_j = l'_j + m_j = 2m - 1$), дополняющие системы (3) и (5) до системы Дирихле порядка $2m$; $c_{j\alpha}(x)$, $c'_{j\alpha}(x)$ — их соответствующие коэффициенты; $C^k(G \cup \Gamma)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых комплексных функций в $G \cup \Gamma$, $C_0^k(G \cup \Gamma)$ — его подмножество функций с компактным носителем в $G \cup \Gamma$.

Пусть $W_2^k(G)$ ($k \geqslant 0$ целое) — пространство С. Л. Соболева, $W_2^{-k}(G)$ — пространство с негативной нормой [5], построенное по нулевому $L_2(G)$ и позитивному $W_2^k(G)$; соответствующие нормы будем обозначать $\| \circ \|_k$, $\| \circ \|_{-k}$; $W_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ($k > 0$ целое) — пространство функций φ, определенных на Γ и являющихся значениями на Γ функций $u \in W_2^k(G)$. Норму в этом пространстве можно определить, например, так: $\langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{k-\frac{1}{2}} = \|\varphi, \Gamma\|_{k-\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{W_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf \|u\|_k$, где inf берется по всем $u \in W_2^k(G)$, равным φ на Γ; как известно, с помощью преобразования Фурье можно определить эквивалентную норму и соответствующее скалярное произведение, относительно которого $W_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ образует гильбертово пространство, $W_2^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$ — соответствующее негативное пространство относительно $L_2(\Gamma)$. Скалярное произведение в $L_2(G)$ и $L_2(\Gamma)$ будем обозначать (,) и $\langle , \rangle$. Мы будем рассматривать ортогональную сумму пространств $L^2 = L_2(G) \oplus L_2(\Gamma) \oplus \dots \oplus L_2(\Gamma)$, где $L_2(\Gamma)$ повторяется m раз. Если $F = (f, f_1, \dots, f_m)$ и $\mathfrak{F} = (g, g_1, \dots, g_m)$, то скалярное произведение и норму в L^2 обозначим

$$(F, \mathfrak{F})_0 = (f, g) + \sum_{j=1}^{m} \langle f_j, g_j \rangle,$$

$$\|F\|_0^2 = \|f\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle f_j \rangle\!\rangle^2.$$

Нам потребуется также пространство $\widetilde{W}_2^s(G)$ (см. [2]) — пополнение множества достаточно гладких функций по норме. $|||u|||_s = \|u\|_s + \sum_{j=1}^{2m} \left\| \frac{\partial^{k-1}}{\partial \nu^{k-1}} u, \dot{G} \right\|_{s-k+\frac{1}{2}}$ (ν — нормаль к $\dot{G}$; $s \cdot$ целое)*.

2°. Линейный оператор A_0, соответствующий задаче (1), определим на функциях $u \in C_0^{2m}(G \bigcup \Gamma)$ как оператор, действующий в L^2 по закону

$$(u, C_1 u, \ldots, C_m u) \to (\mathfrak{L} u, B_1 u, \ldots, B_m u). \tag{6}$$

Из формулы Грина (4) следует, что формально сопряженный оператор к A_0 в L^2 оператор A^+ естественно определить на функциях $v \in C^{2m}(\overline{G})$ по закону

$$(v, C_1' v, \ldots, C_m' v) \to (\mathfrak{L}^+ v, B_1' v, \ldots, B_m' v). \tag{6'}$$

Формулу Грина (4) можно теперь записать в виде

$$(A_0 U, V)_0 = (U, A^+ V)_0, \ U \in D(A_0), \ V \in D(A^+). \tag{4'}$$

Сужение оператора A^+ на функции $V \in C_0^{2m}(G \bigcup \Gamma)$ обозначим через A_0^+.

Лемма 1. *Области определения $D(A_0)$, $D(A_0^+)$, $D(A^+)$ операторов A_0, A_0^+, A^+ плотны в L^2.*

Из формулы Грина (4) и леммы 1 легко следует, что операторы A_0, A_0^+, A^+ допускают замыкание в L^2. Их замыкания будем обозначать через $\overline{A}_0$, $\overline{A}_0^+$, $\overline{A}^+$.

Определение 1. Оператор $\overline{A}_0$ назовем минимальным; оператор $(\overline{A}_0^+)^*$, сопряженный в L^2 к $\overline{A}_0^+$, назовем максимальным оператором.

Определение 2. Пусть Δ — некоторая область, $\dot{\Delta}$ — ее граница, γ — кусок $\dot{\Delta}$. Мы будем говорить, что $u \in W_2^s(\Delta)$ (s произвольное целое) принадлежит $W_2^t(\Delta)$ (соответственно $\widetilde{W}_2^t(\Delta)$), $t > s$, если u как функционал на достаточно гладких функциях совпадает с $v \in W_2^t(\Delta)$ $(v \in \widetilde{W}_2^t(\Delta))$.

Далее, скажем, что $u \in W_{2,\text{лок}}^t(\Delta, \gamma)$ (соответственно $\widetilde{W}_{2,\text{лок}}^t(\Delta, \gamma)$), если для каждой достаточно гладкой функции ζ, аннулирующейся в некоторой окрестности в $\overline{\Delta}$ множества $\dot{\Delta} \setminus \gamma$, и такой, что в некоторой окрестности в $\overline{\Delta}$ множества γ, $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0$ (ν — нормаль к $\dot{\Delta}$), $\zeta u \in W_2^t(\Delta)$ $(\widetilde{W}_2^t(\Delta))$ (ср. [6 — 8]).

Для изучения свойств регулярности функций из $D(\overline{A}_0)$, $D((\overline{A}_0^+)^*)$, $D(\overline{A}^+)$ нам понадобится следующая

Лемма 2. *Предположим, что $\Gamma = \dot{G}$. Пусть $u \in L_2(G)$, $u_j \in L_2(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, $f \in W_2^{-2m}(G)$, $\varphi_j \in W_2^{-m_j - \frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$ такие, что выполняется равенство*

$$(u, \mathfrak{L}^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, B_j' v \rangle = (f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j' v \rangle \ (v \in C^{2m}(\overline{G})). \tag{7}$$

Если для целого s $(0 \leqslant s \leqslant 2m)$ $f \in W_2^{-2m+s}(G)$, $\varphi_j \in W_2^{-m_j - \frac{1}{2} + s}(\Gamma)$, Γ — поверхность класса C^{4m}, $a_\alpha(x) \in C^{2m+|\alpha|}(\overline{G})$.

---

* По поводу целесообразности введения нормы $|||u|||_s$ см. [2].

$$b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-1,\, 2m-m_j)}(\Gamma),\ b'_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-1,\, 2m-m'_j)}(\Gamma),$$

$$c_{j\alpha}(x) \in C^{\max(m'_j+1-s,\, 0)}(\Gamma),\ c'_{j\alpha}(x) \in C^{\max(m_j+1-s,\, 0)}(\Gamma),$$

то $u \in \widetilde{W}_2^s(G), C_j u = u_j \in W_2^{s-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$*.

Доказательство. Из формулы (7) непосредственно следует, что для всех v таких, что $\mathfrak{L}^+ v = 0$, $B'_j v = 0$ ($j = 1, \ldots, m$), выполняется равенство $(f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C'_j v \rangle = 0$ ($[(f, f_1, \ldots, f_m), N^+] = 0$ в обозначениях работы [2]), поэтому из теоремы о полном наборе гомеоморфизмов [2] вытекает, что существует решение $\tilde{u} \in \widetilde{W}_2^s(G)$ задачи

$$(\mathfrak{L}\tilde{u})(x) = f(x),\ x \in \overset{\circ}{G},$$

$$(B_j\tilde{u})(x) = \varphi_j(x)\ (x \in \Gamma,\ j = 1, \ldots, m).$$

С помощью предельного перехода убеждаемся, что формула Грина (4) справедлива и для $\tilde{u} \in \widetilde{W}_2^s(G)$, $v \in W_2^{2m}(G)$, из нее и равенства (7) получаем $(u - \tilde{u}, \mathfrak{L}^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle u_j - C_j\tilde{u}, B'_j v \rangle = 0$.

Отсюда следует [6], что $u - \tilde{u} \in W_2^{2m}(G)$, $\mathfrak{L}(u - \tilde{u}) = 0$, $B_j(u - \tilde{u}) = 0$ ($j = 1, \ldots, m$), т. е. и $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$. Записав для функции u формулу Грина, из нее и (7) получаем $\sum_{j=1}^{m} \langle u_j - C_j u, B'_j v \rangle = 0$ $(v \in C^{2m}(\overline{G}))$ и, значит, $u_j = C_j u \in W_2^{s-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $U = (u, u_1, \ldots, u_m) \in D(\overline{A}_0)$, *коэффициенты дифференциальных выражений и граница достаточно гладки. Тогда* 1) $u \in W_2^{2m}(G_1)$, *если* $\overline{G}_1 \subset G$; 2) *для каждой достаточно гладкой в* $\overline{G}$ *функции* ζ, *анулирующейся в некоторой окрестности в* $\overline{G}$ *множества* $\overline{G} \setminus (G \cup \Gamma)$ *и такой, что в некоторой окрестности в* $\overline{G}$ *множества* Γ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0$ (ν — нормаль Γ)

$$\zeta u \in \widetilde{W}_2^{\min_j m_j}(G),\ \zeta u_j \in W_2^{\max\left(-l_j-\frac{1}{2}+\min_j m_j,\, 0\right)}(\Gamma);$$

3) *если вся граница* $\dot{G}$ *достаточно гладка, то* $u \in \widetilde{W}_2^{\min_j m_j}(G)$, $u_j = C_j u \in W_2^{\max\left(-l_j-\frac{1}{2}+\min_j m_j,\, 0\right)}(\Gamma)$; 4) *Если граница подобласти* $G_2 \subset G$ *пересекается с* $\dot{G}$ *лишь по достаточно гладкому куску* γ, *содержащему* Γ *как строго внутреннюю подобласть, то* $u \in \widetilde{W}_{2\,\text{лок}}^{\min_j m_j}(G_2, \gamma)$, $u_j = C_j u \in W_2^{\max\left(-l_j-\frac{1}{2}+\min_j m_j,\, 0\right)}(\Gamma)$; *если* $\min_j m_j > 0$, *то* $D^\alpha u|_{\dot{G}\setminus\Gamma} = 0$ ($|\alpha| \leqslant \min_j m_j - 1$); 5) *если граница под-*

---

* Применение дифференциальных выражений к функциям из $\widetilde{W}_2^s(G)$ понимается в смысле замечания работы [2].

области $G_3 \subset G$ *пересекается с* $\dot{G}$ *лишь по достаточно гладкому открытому множеству* $S \subset \dot{G} \setminus \Gamma$, $\bar{S} \cap \bar{\Gamma}$ *пусто, то* $u \in W^{2m}_{2\,\text{лок}}(G_3, S)$, $D^\alpha u/_{S_1} = 0$ $(|\alpha| \leqslant 2m-1)$, *где* $\bar{S}_1 \subset S$.

Предположения гладкости следующие: в случае 1) $a_\alpha(x) \in C^{2m+|\alpha|}(G)$; во всех остальных случаях на рассматриваемых кусках поверхности $\dot{G}$ выполняются такие же предположения гладкости, как и в лемме 2 на поверхности Γ, коэффициенты $a_\alpha(x)$ принадлежат в замыканиях рассматриваемых областей к $C^{2m+|\alpha|}$.

Наметим доказательство. Пусть

$$U = (u, u_1, \ldots, u_m) \in D(\bar{A}_0),$$

$$\bar{A}_0 U = F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in L^2.$$

Из формулы Грина (4) предельным переходом получаем

$$(u, \mathfrak{L}^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, B_j' v \rangle = (f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j' v \rangle \; (v \in C^{2m}(\bar{G})). \tag{8}$$

Рассматривая в (8) $v \in C_0^{2m}(G)$, легко получаем первое утверждение теоремы (см., например, [6]); утверждение 3) теоремы непосредственно следует из леммы 2. Наметим доказательство утверждения 2). Остальные утверждения получаются подобным образом. Пусть $G_1 \subset G$, $\dot{G}_1$ ее граница, $\dot{G}_1 \cap \Gamma = \Gamma_1$ $\dot{G}_1 \in C^{4m}$. Продолжим выражения B_j и C_j $(j = 1, \ldots, m)$ с Γ_1 на $\dot{G}_1$ («продолженные» выражения будем обозначать B_j^1, C_j^1) так, чтобы коэффициенты B_j^1, C_j^1 были достаточно гладкими и чтобы $\{B_j^1\}_{j=1}^m$ накрывали $\mathfrak{L}$, а $\{C_j^1\}_{j=1}^m$ дополняли их до системы Дирихле порядка $2m$. Пусть $\omega \in C^{2m}(\bar{G}_1)$, а ζ — достаточно гладкая функция в $\bar{G}$, аннулирующаяся в некоторой окрестности в $\bar{G}$ множества $\bar{G} \setminus \bar{G}_1$ и равная 1 в подобласти $G_2 \subset G_1$, $\dot{G}_2 \cap \Gamma_1 = \Gamma_2$. Подставим в (8) вместо v $\zeta\omega$. Получим

$$(\zeta u, \mathfrak{L}^+ \omega)_{G_1} + (u, M\omega)_{G_1} + \sum_{j=1}^{m} \langle \zeta u_j, B_j^{1\prime} \omega \rangle_{\dot{G}_1} + \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, N_j^1 \omega \rangle_{\dot{G}_1} =$$

$$= (\zeta f, \omega)_{G_1} + \sum_{j=1}^{m} \langle \zeta \varphi_j, C_j^{1\prime} \omega \rangle_{\dot{G}_1} + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, P_j^1 \omega \rangle_{\dot{G}_1}. \tag{9}$$

Здесь $(,)_{G_1}$, $\langle , \rangle_{\dot{G}_1}$ обозначают скалярные произведения соответственно в $L_2(G_1)$, $L_2(\dot{G}_1)$, M — дифференциальное выражение порядка $2m-1$, коэффициенты которого аннулируются там, где $\zeta = 0$ или $\zeta = 1$. Аналогично N_j^1 (P_j^1)—дифференциальные выражения порядков $m_j' - 1$ $(l_j' - 1)$, если $m_j' > 1$ $(l_j' > 1)$, и $N_j^1 = 0$ $(P_j^1 = 0)$, если $m_j' = 0$ $(l_j' = 0)$. Отображение $H: u \to M\dot{u}$ непрерывно действует из $W_2^{2m-1}(G_1)$ в $L_2(G_1)$, поэтому существует сопряженный оператор M^*, непрерывно действующий из $L_2(G_1)$ в $W_2^{-(2m-1)}(G_1)$ такой, что $(u, M\omega)_{G_1} = (M^* u, \omega)_{G_1}$. Далее, $|\langle u_j, N_j^1 \omega \rangle_{\dot{G}_1}| \leqslant \langle\!\langle u_j \rangle\!\rangle_{\dot{G}_1} \|N_j^1 \omega, G_1\|_1 \leqslant c \langle\!\langle u_j \rangle\!\rangle_{\dot{G}_1} \|\omega, G_1\|_{m_j'}$ (c — константа), поэтому существует $\alpha_j \in W_2^{-m_j'}(G_1)$ такой, что $\langle u_j, N_j^1 \omega \rangle_{\dot{G}_1} =$

$=(\alpha_j, \omega)_{G_1}$. Аналогично доказывается существование элемента $\beta_j \in W_2^{-l_j'}(G_1)$ такого, что $\langle \varphi_j, P_j^1\omega\rangle_{\dot{G}_1} = (\beta_j, \omega)_{G_1}$. Формула (9) запишется в виде

$$(\zeta u, \mathfrak{L}^+\omega)_{G_1} + \sum_{j=1}^{m} \langle \zeta u_j, B_j^{1\prime}\omega\rangle_{\dot{G}_1} = (\theta, \omega)_{G_1} + \sum_{j=1}^{m} \langle \zeta\varphi_j, C_j^{1\prime}\omega\rangle_{\dot{G}_1} \tag{10}$$

$$(\omega \in C^{2m}(\overline{G}_1)),$$

где $\theta = \zeta f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - M^* u \in W_2^{-(2m-1)}(G_1)$. Используя теперь лемму 2, получаем $\zeta u \in \widetilde{W}_2^{\min(1, \min_j m_j)}(G_1)$, $\zeta u_j = C_j^1(\zeta u) \in W_2^{\min(1, \min_j m_j) - l_j - \frac{1}{2}}(\dot{G}_1)$. Если $\min_j m_j > 0$, то рассуждаем так. Пусть $\zeta_1 \geqslant 0$ — достаточно гладкая функция, аннулирующаяся в некоторой окрестности в $\overline{G}$ множества $\overline{G} \setminus \overline{G}_2$. Кроме того, предположим, что вблизи Γ_2 в G_2 $\frac{\partial \zeta_1}{\partial \nu} = 0$ (ν — нормаль к Γ), $\zeta_1 = 1$ в подобласти $G_3 \subset G_2$, $\dot{G}_3 \cap \Gamma_2 = \Gamma_3$. Так как $\zeta u \in \widetilde{W}_2^1(G_1)$, то $\zeta_1 \zeta u = \zeta_1 u \in \widetilde{W}_2^1(G_2)$, поэтому можно вычислить

$$\mathfrak{L}(\zeta_1 u) = \zeta_1 f + M_1 u \in W_2^{2-2m}(G_2),$$

$$B_j^2(\zeta_1 u) = \zeta_1 \varphi_j + P_j^2 u \in W_2^{\max\left(2-m_j-\frac{1}{2},\, 0\right)}(\dot{G}_2)\ (j = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Здесь B_j^2 построены на $\dot{G}_2$ точно так же, как выше B_j^1 на $\dot{G}_1$. Применения выражений $\mathfrak{L}$ и B_j^2 к $\zeta_1 u \in \widetilde{W}_2^1(G_2)$ понимаются в смысле замечания работы [2]. Воспользовавшись теоремой о локальном повышении гладкости сильных обобщенных решений из [2], получим, что $\zeta_1 u \in \widetilde{W}_2^{\min(2, \min_j m_j)}(G_2)$. Продолжая эти рассуждения, получаем доказательство теоремы в этом случае.

Совершенно аналогично можно изучить свойства регулярности функций из области определения максимального оператора. Если коэффициенты и граница достаточно гладки, то справедлива

Теорема 2. *Пусть* $U = (u, u_1, \ldots, u_m) \in D((\overline{A}_0^+)^*)$. *Тогда* 1) $u \in W_2^{2m}(G_1)$, *если* $\overline{G}_1 \subset G$; 2) $u \in \widetilde{W}_{2,\text{лок}}^{\min_j m_j}(G \cup \Gamma)$, $\zeta u_j \in W_2^{\max\left(-l_j-\frac{1}{2}+\min_j m_j,\, 0\right)}(\Gamma)$ (здесь ζ такая же, как в 2) теоремы 1).

Требования гладкости в теореме 2 такие же, как и в соответствующих частях предыдущей теоремы.

Заметим, что, используя результаты работы [9], можно доказать теоремы 1 и 2 в пространстве L^p.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Ю. М. Березанскому за постановку вопроса и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Odhnoff, Operators generated by differential problems with eigenvalue parameter in eqvation and boundary condition, Lund, 1959.
2. Я. А. Ройтберг, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
3. М. Шехтер, Сб. переводов, Математика № 5, 6, 1960.
4. J. L. Lions, E. Magenes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis.e. Mat., Ser. III, 15, N 1, 2, 1961; 16, N 1, 1962.
5. Ю. М. Березанский, УМН, т. 18, № 1, 1963.
6. Я. А. Ройтберг, УМЖ, т. XV, № 4, 1963.

7. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.
8. M. Schechter, Math. Scand., v. 13, F. 1., 1963, 47—69.
9. Я. А. Ройтберг, УМЖ, т. XVII, № 5, 1965.

Поступила 22. VI 1965 г.
Киев