Резонансные колебания и вращения маятника с вибрирующей точкой подвеса

А. Я. Гадионенко

Пусть точка подвеса маятника совершает некоторое движение $x(t)$, $y(t)$. Кинетическая и потенциальная энергии системы выражаются в следующем виде:

$$T = \frac{M}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{\alpha}(\dot{x}\cos\alpha + \dot{y}\sin\alpha) + l^2\dot{\alpha}^2 + \frac{M\rho^2}{2}\dot{\alpha}^2,$$

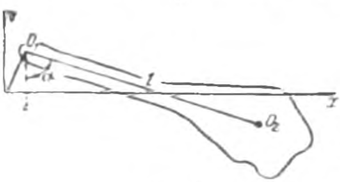

Рис. 1.

$$\Pi = Mg(y - l\cos\alpha) \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right), \tag{1}$$

где α — угол отклонения маятника от вертикального направления в момент времени t; x, y — закон движения точки подвеса; M — масса маятника; l — приведенная длина маятника; ρ— радиус инерции маятника относительно его центра инерции.

Закон движения маятника с вибрирующей точкой подвеса описывается уравнением

$$\ddot{\alpha} + \frac{gl}{\rho^2 + l^2}\sin\alpha = -\frac{l}{l^2 + \rho^2}(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}\sin\alpha) - \lambda_1\dot{\alpha} \tag{2}$$

где λ_1 — коэффициент затухания, g — ускорение земного притяжения.

Положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса, устойчивость положений равновесия, малые колебания в окрестности положений равновесия рассматривались в [1—3].

В настоящей статье изучаются резонансные явления колебания и вращения маятника. Методом исследования является метод усреднения, разработанный для существенно нелинейных систем в работе [4]. Резонансные явления в существенно нелинейных системах рассматривались в [5].

Будем рассматривать следующий вид движения точки подвеса маятника:

$$x(t) = a\cos\nu t,$$
$$y(t) = b\sin(\nu t + \chi), \tag{3}$$

где a, b, χ — постоянные. При $\chi = 0$ точка подвеса движется по окружности ($a = b$), по эллипсу ($a \neq b$), по вертикали ($a = 0$, $b \neq 0$), по горизонтали ($a \neq 0$, $b = 0$); при $\chi = \frac{\pi}{2}$ точка подвеса движется по прямой, составляющей с горизонталью угол $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

Предположим, что

$$\frac{a}{l} = \varepsilon_1 \ll 1, \ \frac{b}{l} = \varepsilon_2 \ll 1, \ \frac{\lambda_1}{\lambda} = \varepsilon_3 \ll 1, \ \frac{\varrho}{l} = \varepsilon_4 \ll 1. \tag{4}$$

Учитывая условия (4), уравнение (2) с точностью до ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ запишем в виде

$$\ddot{\alpha} + \beta^2 \sin\alpha = \varepsilon_1 \nu^2 \cos\nu t \cos\alpha + \varepsilon_2 \nu^2 \sin(\nu t + \chi)\sin\alpha - \varepsilon_3 \lambda \dot{\alpha}, \tag{5}$$

где $\beta^2 = \frac{g}{l}$.

Одновременно с уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \beta^2 \sin\alpha = 0, \tag{6}$$

которое получаем, положив в уравнении (5) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Уравнение (6) является невозмущенным уравнением, соответствующим уравнению (5).

Решение уравнения (6) выражается, как известно [6], в эллиптических функциях

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 2\arcsin\{k_1 \operatorname{sn}[(t + t_0)\beta, \ k_1]\}, \ k_1^2 = \frac{\alpha_0'^2}{4\beta^2}, \\ \alpha_2 = 2\operatorname{am}\{(t + t_0)\beta/k_2, \ k_2\}, \ k_2^2 = \frac{4\beta^2}{\alpha_0'^2}, \end{gathered} \tag{7}$$

где α_0' — начальная угловая скорость маятника в положении равновесия, α_1 соответствует колебательным $(-\pi < \alpha_1 < \pi)$, α_2 — вращательным движениям (α_2 монотонно возрастает, получая за цикл приращение 2π). При $k_1 = k_2$ α_1 и α_2 совпадают и описывают апериодическое движение $(\alpha \to \pi)$. Переход от одного режима к другому не рассматривается.

Частоты колебаний и вращений соответственно равны

$$\omega_1 = \frac{\beta\pi}{2K(k_1)}, \ \omega_2 = \frac{\beta\pi}{k_2 K(k_2)}, \tag{8}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл I рода.

Введем в рассмотрение фазу φ, определяемую соотношением

$$\varphi = \omega(k)(t + t_0), \tag{9}$$

и запишем решение (7) в виде

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 2\arcsin\left\{k_1 \operatorname{sn}\left[\frac{2K(k_1)}{\pi}\varphi, \ k_1\right]\right\}, \\ \alpha_2 = 2\operatorname{am}\left\{\frac{K(k_2)}{\pi}\varphi, \ k_2\right\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Решение системы (5) при $\varepsilon_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ ищем в виде (10), считая в соотношениях

$$\begin{gathered} \alpha = \alpha(\varphi, \ k), \\ \dot{\alpha} = \omega(k)\,\alpha_\varphi'(\varphi, \ k), \end{gathered} \tag{11}$$

φ и k — новыми искомыми функциями. Если продифференцировать (11) и подставить результат в (5), то с учетом тождества

$$\omega^2(k)\,\alpha_{\varphi\varphi}'' + \beta^2 \sin\alpha = 0,$$

придем к системе

$$\alpha'_k \frac{dk}{dt} + \alpha'_\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \omega(k)\alpha'_\varphi, \tag{12}$$

$$(\omega\alpha'_\varphi)'_k \frac{dk}{dt} + \omega\alpha''_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\omega^2(k)\alpha''_{\varphi\varphi} + \varepsilon_1\nu^2\cos\nu t\cos\alpha +$$

$$+\varepsilon_2\nu^2\sin(\nu t+\chi)\sin\alpha - \varepsilon_3\lambda\alpha'_\varphi.$$

Решая систему (12) относительно $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{dk}{dt}$, получаем систему уравнений в стандартной форме:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\alpha'_k\,[\varepsilon_1\nu^2\cos\nu t\cos\alpha + \varepsilon_2\nu^2\sin(\nu t+\chi)\sin\alpha - \varepsilon_3\lambda\alpha'_\varphi]}{\alpha'_\varphi(\omega\alpha'_\varphi)'_k - \omega\alpha'_k\alpha''_{\varphi\varphi}},$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\alpha'_\varphi\,[\varepsilon_1\nu^2\cos\nu t\cos\alpha + \varepsilon_2\nu^2\sin(\nu t+\chi)\sin\alpha - \varepsilon_3\lambda\alpha'_\varphi]}{\alpha'_\varphi(\omega\alpha'_\varphi)'_k - \omega\alpha'_k\alpha''_{\varphi\varphi}}. \tag{13}$$

Знаменатель в правых частях (13) не зависит от φ и в дальнейшем будем обозначать его $\Delta(k)$.

Исследуем общий случай дробного резонанса, т. е. случай, когда частота собственных колебаний и вращений $\omega(k)$ близка к $\frac{r}{s}\nu$, где r и s — небольшие взаимно простые натуральные числа. Введем вместо φ переменную θ

$$\varphi = \frac{r}{s}\nu t + \theta. \tag{14}$$

Уравнения (13) принимают вид

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\alpha'_\varphi F(t, k, \theta)}{\Delta(k)},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(k) - \frac{r}{s}\nu - \frac{\alpha'_k F(t, k, \theta)}{\Delta(k)}. \tag{15}$$

Если разность $\omega(k) - \frac{r}{s}\nu$ — величина порядка ε_i, то k и θ являются медленно изменяющимися переменными. В силу этого уравнения (15) можно усреднить. В результате усреднения придем к системе вида

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\nu^2}{2\pi\Delta(k)}\left[\varepsilon_1 P_{jrs}(k)\cos s\theta + \varepsilon_2 R_{jrs}(k)\cos(s\theta-\chi) - \frac{\varepsilon_3\lambda}{\nu^2}M_{js}(k)\right], \tag{16}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{r}{s}\nu - \frac{\nu^2}{2\pi s\Delta(k)}\left[\varepsilon_1\sin s\theta\frac{\partial}{\partial k}P_{jrs}(k) + \varepsilon_2\sin(s\theta-\chi)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial k}R_{jrs}(k)\right], \tag{17}$$

где

$$P_{11s}(k) = \frac{8\pi q^{\frac{s}{2}}}{1+q^s}\left(1 - 2k^2 + \frac{s^2\pi^2}{2K^2(k)}\right),$$

$$R_{11s}(k)=\frac{2\pi^3 s^2}{K^2(k)}\,\frac{q^{\frac{s}{2}}}{1+q^s},$$

$$M_{1s}(k)=16\omega\,[E-k'^2K(k)]\quad (s=1,\ 3,\ 5,\ldots),$$

$$P_{21s}(k)=\frac{8\pi^3 s^3}{k^2K^2(k)}\,\frac{q^s}{1+q^{2s}},$$

$$R_{21s}(k)=\frac{4\pi s^2}{k^2}\,\frac{q^s}{1-q^{2s}},$$

$$M_{2s}(k)=\frac{8\omega}{\pi}\,EK(k)\quad (s=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

$$P_{jrs}(k)=R_{jrs}(k)=0\quad (r=2,\ 3,\ 4,\ldots;\ \ s=1,\ 2,\ 3,\ldots;\ \ j=1,\ 2),$$

$k'^2=1-k^2$, $q=e^{-\pi\frac{K'(k)}{K(k)}}$, E — полный эллиптический интеграл II рода, индекс $j=1$ соответствует колебательному движению, индекс $j=2$ — вращательному движению.

Для системы (5) характерен параметрический резонанс.

Усредненные уравнения (16)—(17) дают решение исходной системы с точностью до величин порядка ε_i на временном интервале порядка $\frac{1}{\varepsilon_i}$.

Однако систему (16) — (17) нельзя решить в замкнутом виде, поэтому заменим ее, без значительного ущерба для точности, приближенной, положив в коэффициентах системы (16) — (17) $k=k_0=\text{const}$. При $\lambda=0$, $\chi=0$ можем легко найти первый интеграл системы (16) — (17). Действительно, разделив (17) на (16), для $\sin s\theta$ как функции k получим линейное дифференциальное уравнение, из которого и получаем следующее соотношение:

$$\sin s\theta=\frac{2\pi s\Delta(k_0)\omega'(k_0)[\varepsilon_1 P_{j1s}(k_0)+\varepsilon_2 R_{j1s}(k_0)]}{\nu^2\left[\dfrac{\partial}{\partial k}(\varepsilon_1 P_{j1s}+\varepsilon_2 R_{j1s})\right]^2}\left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial k}(\varepsilon_1 P_{j1s}+\varepsilon_2 R_{j1s})}{\varepsilon_1 P_{j1s}(k_0)+\varepsilon_2 R_{j1s}(k_0)}(k-k_0)-1\right]+$$

$$+C\exp\left\{-\frac{\dfrac{\partial}{\partial k}[\varepsilon_1 P_{j1s}+\varepsilon_2 R_{j1s}]}{\varepsilon_1 P_{j1s}(k_0)+\varepsilon_2 R_{j1s}(k_0)}(k-k_0)\right\},\tag{18}$$

где C — постоянная интегрирования.

Рассмотрим стационарные режимы. Для получения в первом приближении стационарных значений k^* и θ^* необходимо приравнять нулю правые части уравнений (16) — (17). После несложных преобразований получим уравнение для определения стационарного значения k^*:

$$(k-k_0)^2+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\lambda M_{js}\sin\chi\,[R'_{j1s}P_{j1s}-P'_{j1s}R_{j1s}]}{\pi s\Delta\omega'\,[\varepsilon_1^2P_{j1s}^2+\varepsilon_2^2R_{j1s}^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2P_{j1s}R_{j1s}\cos\chi]}(k-k_0)+$$

$$+\frac{\varepsilon_3^2\lambda^2M_{js}^2\,[\varepsilon_1^2P'^2_{j1s}+\varepsilon_2^2R'^2_{j1s}+2\varepsilon_1\varepsilon_2R'_{j1s}P'_{j1s}\cos\chi]}{4\pi^2s^2\Delta^2\omega'^2\,[\varepsilon_1^2P_{j1s}^2+\varepsilon_2^2R_{j1s}^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2P_{j1s}R_{j1s}\cos\chi]}-$$

$$-\frac{\nu^4\,[\varepsilon_1^2P_{j1s}P'_{j1s}+\varepsilon_2^2R_{j1s}R'_{j1s}+\varepsilon_1\varepsilon_2(P_{j1s}R'_{j1s}+P'_{j1s}R_{j1s})\cos\chi]^2}{4\pi^2s^2\Delta^2\omega'^2\,[\varepsilon_1^2P_{j1s}^2+\varepsilon_2^2R_{j1s}^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2P_{j1s}R_{j1s}\cos\chi]}=0.\tag{19}$$

Из уравнения (19) определяем два значения для стационарных значений k, а затем определяем соответственно 2 стационарные значения θ из уравнения

$$\sin s\theta^* = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3\lambda M_{js}R'_{j1s}\sin\chi + 2\pi s\Delta\omega'(k^*-k_0)[\varepsilon_1 P_{j1s}+\varepsilon_2 R_{j1s}\cos\chi]}{\varepsilon_1^2 P_{j1s}P'_{j1s}+\varepsilon_2^2 R_{j1s}R'_{j1s}+\varepsilon_1\varepsilon_2(P_{j1s}R'_{j1s}+P'_{j1s}R_{j1s})\cos\chi}. \qquad (20)$$

Для исследования устойчивости стационарных режимов составляется характеристическое уравнение для линеаризированной в окрестности точки k^*, θ^* системы (16) — (17), имеющее вид:

$$\mu^2 + \frac{\nu^2}{2\pi\Delta}[\varepsilon_1 P'_{j1s}\cos s\theta^* + \varepsilon_2 R'_{j1s}\cos(s\theta^*-\chi)]\mu +$$

$$+ \frac{s\nu^2\omega'}{2\pi\Delta}[\varepsilon_1 P_{j1s}\sin s\theta^* + \varepsilon_2 R_{j1s}\sin(s\theta^*-\chi)] = 0. \qquad (21)$$

Из (21) получаем следующие условия устойчивости стационарных режимов:

$$\frac{1}{\Delta}[\varepsilon_1 P'_{j1s}\cos s\theta^* + \varepsilon_2 R'_{j1s}\cos(s\theta^*-\chi)] > 0,$$

$$\frac{\omega'}{\Delta}[\varepsilon_1 P_{j1s}\sin s\theta^* + \varepsilon_2 R_{j1s}\sin(s\theta^*-\chi)] > 0. \qquad (22)$$

Чтобы получить представление о практической эффективности полученных приближенных формул, была произведена сверка точного решения системы (5) (под точным решением системы (5) понимается решение, полученное на вычислительной машине «Интеграл-1») и приближенного решения.

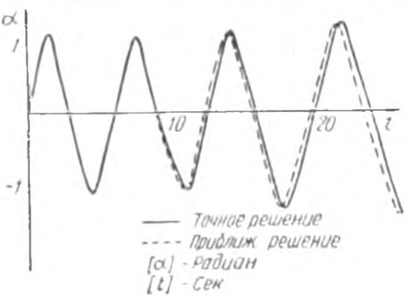

Рис. 2.

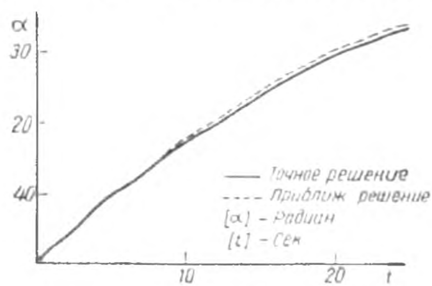

Рис. 3.

Результаты сверки показывают о вполне удовлетворительной точности. Результаты сверки приведены на рис. 2, 3 (рис. 2 — $\beta = 1{,}45$; $\varepsilon_1 = 0{,}02$; $\varepsilon_2 = 0{,}04$; $\varepsilon_3\lambda = 0{,}05$; $\nu = 1$; $\dot{\alpha}_0 = 1{,}38$; рис. 3 — $\beta = 0{,}44$; $\nu = 2$; $\varepsilon_1 = 0{,}02$; $\varepsilon_2 = 0{,}01$; $\varepsilon_3\lambda = 0{,}1$; $\dot{\alpha}_0 = 2{,}08$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Теория возмущений в нелинейной механике, Сб. Тр Ин-та строит. мех. АН УССР, № 14, 1950.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. П. Л. Капица, Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса, ЖЭТФ, т. 21, № 5, 1951.
4. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд-во «Наука», М., 1964.
5. Ф. Л. Черноусько, О резонансе в существенно нелинейной системе, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 3, № 1, 1963.
6. А. М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, М., 1941

Поступила 27. XI 1965 г.
Киев