О единственности представления эрмитово-индефинитных функций и последовательностей

В. И. Горбачук

1. Пусть $\varkappa$—целое неотрицательное число. Непрерывная функция $f(x)=\overline{f(-x)}$ $(x \in (-2l, 2l),\ 0 < l \leqslant \infty)$ называется эрмитово-индефинитной (э.и.) с $\varkappa$ отрицательными квадратами, если эрмитовы формы

$$\sum_{j,k=1}^{m} f(x_j - x_k)\,\xi_k\bar{\xi}_j \qquad (m = 1, 2, \ldots), \quad (x_j \in (-l, l),\ j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

имеют не более $\varkappa$ отрицательных квадратов и хотя бы одна из этих форм имеет точно $\varkappa$ отрицательных квадратов. Если $\varkappa = 0$, то это определение совпадает с определением непрерывной положительно определенной (п. о.) функции.

Как показано в [1, 2] всякой э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами функции $f(x)$ отвечает по крайней мере один многочлен $Q(\lambda)$ степени $\varkappa$ такой, что

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} f(x-s)\,Q\left(-i\frac{d}{ds}\right)\varphi(s)\,\overline{Q\left(-i\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)}\,ds\,dx \geqslant 0 \tag{2}$$

для произвольной финитной бесконечно дифференцируемой в $(-l, l)$ функции $\varphi(x)$, а функция $f(x)$ допускает абсолютно сходящееся представление

$$f(x) = h_\varrho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x} - S_\varrho(x, \lambda)}{Q_0^2(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) \quad (x \in (-2l, 2l)), \tag{3}$$

где $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$, $\sigma(-\infty) = 0$ — некоторая неубывающая функция, $Q_0(\lambda) = \prod\limits_{j}(\lambda - \alpha_j)^{p_j}$, где α_j — все различные вещественные корни $Q(\lambda)$, а p_j — их кратности, $S_\varrho(x, \lambda)$ $(\varrho > 0)$ — какая-либо поправка, регуляризирующая интеграл, а $h_\varrho(x) = \overline{h_\varrho(-x)}$ — соответственно подобранное эрмитово решение однородного уравнения

$$\bar{Q}\left(-i\frac{d}{dx}\right)Q\left(-i\frac{d}{dx}\right)h(x) = 0.$$

Поясним, что функция $S_\varrho(x, \lambda)$ называется регуляризирующей поправкой в интеграле (3), если $S_\varrho(x, \lambda) = 0$ при $|\lambda| \geqslant \varrho$, а при $|\lambda| < \varrho$ функция $S_\varrho(x, \lambda)$ равна произведению $Q_0^2(\lambda)$ на сумму главных частей функции $e^{i\lambda x}/Q_0^2(\lambda)$ относительно всех ее полюсов.

Если $l = \infty$, т. е. функция $f(x)$ задана на всей оси, то [1] всякий полином $Q_1(\lambda)$ будет обладать свойством (2) тогда и только тогда, когда $Q_1(\lambda)\overline{Q_1(\lambda)}$ будет делиться без остатка на $Q(\lambda)\overline{Q(\lambda)}$, т. е. при соответствующей нормировке (например, коэффициент при старшем члене равен 1) существует только один многочлен степени $\varkappa$, обладающий свойством (2). Кроме того, при $l = \infty$ мера $d\sigma(\lambda)$ в представлении (3) определяется единственным образом по $f(x)$.

Рассмотрим, при каких условиях на функцию $f(x)$ многочлен $Q(\lambda)$ и мера $d\sigma(\lambda)$, соответствующим образом нормированные, однозначно определяются по $f(x)$, заданной в конечном интервале $(-2l, 2l)$. Ясно, что однозначность или неоднозначность определения $Q(\lambda)$ и $d\sigma(\lambda)$ по $f(x)$ $(x \in (-2l, 2l),\ l < \infty)$ равносильна единственности или неединственности продолжения $f(x)$ до э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами функции на всей числовой оси. Для простоты изложения все рассуждения и формулировки будем давать для случая $\varkappa = 1$, хотя они справедливы и при любом конечном $\varkappa$.

2. Итак, пусть $\varkappa = 1$. Тогда $f(x)$ представляется в одном из двух видов [3]:

$$f(x) = C_1 e^{iax} + \overline{C}_1 e^{i\overline{a}x} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\sigma(\lambda) \quad (\operatorname{Im} a \neq 0) \tag{4}$$

или

$$f(x) = (\widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2) e^{i\widetilde{a}x} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x} - e^{i\widetilde{a}x}[ix(\lambda - \widetilde{a}) + 1]\,\theta_{\widetilde{a}}(\lambda)}{(\lambda - \widetilde{a})^2} d\widetilde{\sigma}(\lambda) \quad (\operatorname{Im} \widetilde{a} = 0), \tag{5}$$

где C_1, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, a, $\widetilde{a}$ — некоторые константы; $d\sigma(\lambda)$, $d\widetilde{\sigma}(\lambda)$ — неотрицательные меры, $d\sigma(\lambda)$ — конечная, а $d\widetilde{\sigma}(\lambda)$ такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\widetilde{\sigma}(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$; $\theta_{\widetilde{a}}(\lambda)$ — характеристическая функция интервала $|\lambda - \widetilde{a}| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Формулы (4) и (5) имеют смысл и при $x \in (-\infty, \infty)$ и задают всевозможные продолжения $f(x)$ до э. и. функции на всей числовой оси с сохранением количества отрицательных квадратов [2, 4].

Теорема 1. *Пусть* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(m_n > m > 0,\ n = 0, 1, \ldots)$ — *последовательность чисел такая, что ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}} = \infty,$$

и пусть $f(x)$ $(x \in (-2l, 2l),\ l < \infty)$ — *бесконечно дифференцируемая в нуле э. и. функция с одним отрицательным квадратом такая, что*

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant m_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Тогда $f(x)$ *допускает единственное э. и. с одним отрицательным квадратом продолжение на всю ось с любого конечного интервала.*

Доказательство. Пусть $\hat{f}(x)$ — э. и. с одним отрицательным квадратом продолжение функции $f(x)$ с интервала $(-2l, 2l)$ на всю числовую ось. Тогда $\hat{f}(x)$ допускает одно из представлений (4) или (5). Предположим для определенности, что $\hat{f}(x)$ представляется в виде (5) (рассуждения в случае (4) аналогичны). Обозначим

$$r(x) = (\widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2) e^{i\widetilde{a}x} + \int_{|\lambda - \widetilde{a}| < \varepsilon} \frac{e^{i\lambda x} - e^{i\widetilde{a}x}[ix(\lambda - \widetilde{a}) + 1]}{(\lambda - \widetilde{a})^2} d\widetilde{\sigma}(\lambda) \tag{6}$$

и

$$q(x) = \int_{|\lambda - \widetilde{a}| \geqslant \varepsilon} \frac{e^{i\lambda x}}{(\lambda - \widetilde{a})^2} d\widetilde{\sigma}(\lambda). \tag{7}$$

Тогда

$$\hat{f}(x) = r(x) + q(x).$$

Так как $r(x)$ — аналитическая функция на всей числовой оси (это следует из ограниченности подынтегральной функции в (6) по λ при $|\lambda - \widetilde{a}| < \varepsilon$

и по x в любом конечном интервале) и $f(x)$ бесконечно дифференцируема в нуле, то $q(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией в нуле. В силу того, что $q(x)$ п. о., из бесконечной дифференцируемости в нуле следует ее бесконечная дифференцируемость при любом x. Поэтому и функция $\hat{f}(x)$ бесконечно дифференцируема. Таким образом, *если э. и. функция $f(x)$ $(x \in (-2l, 2l))$ бесконечно дифференцируема в нуле, то любое ее э. и. продолжение является бесконечно дифференцируемой функцией на всей числовой оси.*

Пусть теперь $(-d, d) \supset (-2l, 2l)$. Тогда $(x \in (-d, d))$

$$r^{(n)}(x) = \widetilde{C}_1 (i\widetilde{a})^n x e^{i\widetilde{a}x} + n\widetilde{C}_1 (i\widetilde{a})^{n-1} e^{i\widetilde{a}x} + \widetilde{C}_2 (i\widetilde{a})^n e^{i\widetilde{a}x} +$$

$$+ \int\limits_{|\lambda-\widetilde{a}|<\varepsilon} \frac{(i\lambda)^n e^{i\lambda x} - (i\widetilde{a})^n e^{i\widetilde{a}x} - (\lambda-\widetilde{a})[in(i\widetilde{a})^{n-1} e^{i\widetilde{a}x} + (i\widetilde{a})^n e^{i\widetilde{a}x}\cdot ix]}{(\lambda-\widetilde{a})^2} d\widetilde{\sigma}(\lambda) =$$

$$= \widetilde{C}_1 (i\widetilde{a})^n x e^{i\widetilde{a}x} + n\widetilde{C}_1 (i\widetilde{a})^{n-1} e^{i\widetilde{a}x} + \widetilde{C}_2 (i\widetilde{a})^n e^{i\widetilde{a}x} +$$

$$+ i^n \int\limits_{|\lambda-\widetilde{a}|<\varepsilon} \frac{d\widetilde{\sigma}(\lambda)}{(\lambda-\widetilde{a})^2} \int\limits_{\widetilde{a}}^{\lambda} [n(n-1)t^{n-2} + 2inxt^{n-1} - x^2 t^n] e^{itx}\, dt.$$

Поэтому

$$|r^{(n)}(x)| \leqslant B_d^n n^2,$$

где B_d — некоторая константа, зависящая от d.

Далее,

$$|q^{(n)}(0)| = |\hat{f}^{(n)}(0) - r^{(n)}(0)| \leqslant m_n + B_d^n n^2$$

Так как функция $q(x)$ $(x \in (-d, d))$ п. о., то

$$|q^{(2n)}(x)| \leqslant |q^{(2n)}(0)|,$$

в силу чего

$$|\hat{f}^{(2n)}(x)| \leqslant |q^{(2n)}(0)| + |r^{(2n)}(x)| \leqslant m_{2n} + 2B_d^{2n}(2n)^2 = M_{2n}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{M_{2n}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n} + 2B_d^{2n}(2n)^2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}} + \sqrt[2n]{2B_d^{2n}(2n)^2}} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}} + b_d},$$

где b_d — некоторая константа, зависящая от d.

Так как $m_{2n} > m$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{M_{2n}}} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}} C_d \quad (C_d = \text{const})$$

при любом $d > 2l$.

Следовательно, любое продолжение $f(x)$ с интервала $(-2l, 2l)$ в $(-d, d)$ $(d > 2l$ произвольно) является на основании признака Данжуа [5] квазианалитической функцией. Отсюда следует единственность продолжения $f(x)$ на всю ось.

С л е д с т в и е 1. *Если э. и. с одним отрицательным квадратом функция $f(x)$ $(x \in (-2l, 2l))$ аналитическая, то она допускает единственное э. и. с одним отрицательным квадратом продолжение на всю числовую ось.*

Это следует из того, что в этом случае

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant CM^n n! = m_n \ (n = 0, 1, \ldots),$$

где C и M — константы.

С л е д с т в и е 2. *Если э. и. с одним отрицательным квадратом функция $f(x)$ $(x \in (-2l, 2l))$ допускает хотя бы одно представление вида (4) или (5), в котором мера сосредоточена на конечном интервале, то $f(x)$ допускает единственное э. и. с одним отрицательным квадратом продолжение на всю ось.*

Положим

$$m_n = \sqrt{|f^{(2n)}(0)|}$$

и

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n} \qquad (r \geqslant 1).$$

Т е о р е м а 2. *Если э. и. с одним отрицательным квадратом функция $f(x)$ $(x \in (-2l, 2l))$ такова, что $m_n > m > 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty,$$

то $f(x)$ единственным образом продолжается до э. и. с одним отрицательным квадратом функции на всей числовой оси.

Обратно, если

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr < \infty,$$

то существует бесконечно дифференцируемая э. и. функция $g(x) \not\equiv 0$ $(x \in (-2l, 2l))$ такая, что

$$|g^{(n)}(0)| \leqslant Cm_n \quad (C = \text{const}), \tag{8}$$

и которая допускает неединственное э. и. продолжение на всю числовую ось.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямое утверждение доказывается непосредственным повторением доказательства теоремы 1 с тем только отличием, что вместо признака квазианалитичности функции Данжуа нужно использовать признак Карлемана в формулировке Островского [5].

Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что существует бесконечно дифференцируемая п. о. функция $k(x) \not\equiv 0$ $(x \in (-2l, 2l))$, для которой

$$|k^{(n)}(0)| \leqslant Bm_n \qquad (B = \text{const}, \ n = 0, 1, \ldots), \tag{9}$$

которая допускает неединственное п. о. продолжение на всю ось. В самом деле, пусть $k(x)$ допускает два различных п. о. продолжения $k_1(x)$ и $k_2(x)$ на всю ось. Тогда, полагая

$$g(x) = -C + k(x) \ (x \in (-2l, 2l), \ C > k(0)),$$

получаем, что э. и. с одним отрицательным квадратом функция $g(x)$ $(x \in (-2l, 2l))$ допускает два различных э. и. с одним отрицательным квадратом продолжения

$$g_j(x) = -C + k_j(x) \quad (j = 1, 2)$$

с интервала $(-2l, 2l)$ на всю ось. Ясно, что функция $g(x)$ удовлетворяет оценкам вида (8).

Итак, пусть

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Тогда [5] существует бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ ($x \in (-\varrho, \varrho)$, $\varrho > 0$) со свойствами:

$$\psi(x) \not\equiv 0, \quad \psi^{(n)}(-\varrho) = \psi^{(n)}(\varrho) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$|\psi^{(n)}(x)| \leqslant m_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Функцию $\psi(x)$ продолжим нулем на всю ось. Как показал М. Г. Крейн [6], можно построить п. о. конвексную функцию $K(x)$ в $(-2l-\delta, 2l+\delta)$, $\delta > 0$, допускающую два различных продолжения $K_1(x)$ и $K_2(x)$ на всю ось, причем $K_j(x)$ $(j = 1, 2)$ можно выбрать так, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_j(x)|\, dx < \infty$.

Обозначим

$$k_j(x) = (K_j * \psi * \psi^*)(x) \qquad (j = 1, 2),$$

$$\psi^*(x) = \overline{\psi(-x)}, \qquad (\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi)\, \varphi_2(x - \xi)\, d\xi.$$

Нетрудно видеть, что $k_j(x)$ п. о. Из свойств свертки и того, что $K_1(x) = K_2(x)$ $(x \in (-2l-\delta, 2l+\delta))$, вытекает, что при достаточно малом $\varrho = \varrho(\delta, l)$, $k_1(x) = k_2(x) = k(x)$ на $(-2l, 2l)$. Но $k_1(x) \neq k_2(x)$, когда x пробегает всю ось. В противном случае совпадали бы и преобразования Фурье этих функций $\widetilde{k}_i(x) = \widetilde{K}_i(x)\,|\widetilde{\psi}(x)|^2$ $(i = 1, 2)$. Учитывая, что $\widetilde{\psi}(x)$ — целая функция, получаем равенство $\widetilde{K}_1(x) = \widetilde{K}_2(x)$, что невозможно.

Соотношения (9) следуют из свойств свертки и соответствующих неравенств для $\psi(x)$.

3. Пусть $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Будем говорить, что числа s_n $\{n = 0, 1, \ldots\}$ образуют э. и. моментную последовательность с $\varkappa$ отрицательными квадратами, если формы

$$\sum_{j,k=0}^{m} s_{j+k} \xi_j \bar{\xi}_k \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

имеют не более $\varkappa$ отрицательных квадратов и существует хотя бы одна такая форма, которая имеет точно $\varkappa$ отрицательных квадратов.

В [7] дается интегральное представление таких последовательностей. В частности, если $\varkappa = 1$,

$$s_n = ca^n + \bar{c}\,\bar{a}^n + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\sigma(\lambda) \qquad (\operatorname{Im} a \neq 0) \tag{10}$$

или

$$s_n = (bn + d)\bar{a}^n + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n - [n\bar{a}^{n-1}\lambda + \bar{a}^n (n-1)]\, \theta_{\bar{a}}(\lambda)}{(\lambda - \bar{a})^2} \quad (\operatorname{Im} \bar{a} = 0), \tag{11}$$

где c, b, d, a, $\tilde{a}$ — некоторые константы; $d\sigma(\lambda)$, $d\tilde{\sigma}(\lambda)$ $(\sigma(-\infty)=\tilde{\sigma}(-\infty)=0$, $\sigma(\lambda-0)=\sigma(\lambda)$, $\tilde{\sigma}(\lambda-0)=\tilde{\sigma}(\lambda))$ — неотрицательные меры такие, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^n d\sigma(\lambda)<\infty$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^n d\tilde{\sigma}(\lambda)<\infty$ $(n=0, 1, \ldots)$.

Теорема 3. *Пусть $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ — э. и. моментная последовательность с одним отрицательным квадратом такая, что*

$$|s_n| \leqslant m_n \ (n=0, 1, \ldots), \tag{12}$$

где m_n удовлетворяют условию теоремы 1. Тогда последовательность $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ допускает единственное представление вида (10) *или* (11).

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ допускает два разных представления, например, вида (10) и вида (11):

$$s_n = ca^n + \bar{c}\bar{a}^n + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^n d\sigma(\lambda) \quad (\operatorname{Im} a \neq 0)$$

и

$$s_n = (bn+d)\tilde{a}^n + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^n - [n\tilde{a}^{n-1}\lambda - \tilde{a}^n(n-1)]\,\theta_{\tilde{a}}(\lambda)}{(\lambda-\tilde{a})^2}\, d\tilde{\sigma}(\lambda) \ (\operatorname{Im}\tilde{a}=0).$$

Построим э. и. функции с одним отрицательным квадратом

$$f_1(x) = ce^{iax} + \bar{c}e^{i\bar{a}x} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda)$$

и

$$f_2(x) = (i\tilde{a}bx + d)\,e^{i\tilde{a}x} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x} - e^{i\tilde{a}x}[ix(\lambda-\tilde{a})+1]\,\theta_{\tilde{a}}(\lambda)}{(\lambda-\tilde{a})^2}\, d\tilde{\sigma}(\lambda).$$

Тогда

$$f_1^{(n)}(x) = c\,(ia)^n e^{iax} + \bar{c}\,(i\bar{a})^n e^{i\bar{a}x} \int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\lambda)^n e^{i\lambda x} d\sigma(\lambda),$$

$$f_2^{(n)}(x) = i\tilde{a}b\,[(i\tilde{a})^n x + n\,(i\tilde{a})^{n-1}]\,e^{i\tilde{a}x} + d\,(i\tilde{a})^n e^{i\tilde{a}x} +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\lambda)^n e^{i\lambda x} - \{(i\tilde{a})^n e^{i\tilde{a}x} - (\lambda-\tilde{a})\,[in(i\tilde{a})^{n-1} + (i\tilde{a})^n ix]\,e^{i\tilde{a}x}\}\,\theta_{\tilde{a}}(\lambda)}{(\lambda-\tilde{a})^2}\, d\tilde{\sigma}(\lambda).$$

Как видим,

$$f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0) = i^n s_n \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Из соотношений (12) и доказательства теоремы 1 следует, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются квазианалитическими на всей оси, а поэтому совпадают, что невозможно.

Заметим, что для э. и. моментной последовательности также можно сформулировать аналог теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Об интегральном представлении непрерывной эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов, ДАН СССР, т. 125, № 1, 1959.
2. В. И. Плющева, Об интегральном представлении непрерывных эрмитово-индефинитных ядер, ДАН СССР, т. 145, № 3, 1962.

3. В. И. Горбачук, Интегральное представление эрмитово-индефинитных ядер, Автореферат дис., К., 1964.
4. В. И. Горбачук, Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер, УМЖ, № 3, 1965.
5. С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, Гостехиздат М.— Л., 1937
6. М. Г. Крейн, Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), УМЖ, № 2, 1949.
7. В. И. Горбачук, Об индефинитной степенной проблеме моментов, Тр. 1-й Респ. конф. молод. уч., Изд-во АН УССР, К., 1965.

Поступила 26.VI 1965 г.
Киев