

Конформное отображение полуплоскости на полуплоскость с вырезом

Г. Г. Гребенкин

Рассмотрим отображение полуплоскости на полуплоскость с вырезом. Вырезом D назовем односвязную область, ограниченную отрезком оси x ($0 \in D$) и непрерывной кривой, которая может быть задана аналитически, графически или дискретным рядом точек. Предполагаем, что кривая имеет с осью x две общие точки.

Функцию, позволяющую с любой заданной степенью точности осуществить указанное отображение, будем искать в виде

$$z = \sum_{i=0}^{m-2} D_i w^i + \sum_{i=0}^{m-3} D_i w^i \sqrt{w^2 - 1},$$

$$z|_{w=1} = x_0, \quad z|_{w=\infty} = \infty.$$
(1)

Обозначим через G область, полученную путем объединения заданной области и симметричной к ней относительно оси x .

При помощи функции

$$\zeta = w + \sqrt{w^2 - 1},$$
(2)

обратной к функции Жуковского, отобразим внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность единичного круга $|\zeta| \geq 1$. Для получения искомой функции необходимо теперь отобразить внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ на область G . Последняя задача решалась В. П. Фильчаковой [3, 4] методом тригонометрической интерполяции. Здесь рассматривается решение этой задачи путем применения вариационных методов конформных отображений М. А. Лаврентьева к методу тригонометрической интерполяции.

Функцию, с любой заданной точностью отображающую внешность единичного круга $|\zeta| \geq 1$ на область G найдем в виде отрезка ряда, т. е. аппроксимирующего полинома:

$$z = \sum_{j=-1}^{m-2} c_j \zeta^{-j}, \quad C_j = A_j + iB_j,$$

$$z|_{\zeta=1} = x_0, \quad z|_{\zeta=\infty} = \infty.$$
(3)

Для определения коэффициентов C_j единичную окружность разобьем на $2m$ равных частей и выберем две системы точек: четную $\varphi_{2\nu} = \frac{2\nu\pi}{m}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$) и нечетную $\varphi_k = \frac{k\pi}{m}$ ($k = 1, 3, 5, \dots, 2m - 1$). Образы четных

и нечетных точек называются соответственно четными и нечетными узловыми точками. Коэффициенты полинома, построенного на базе четных узловых точек, выражаются через координаты этих точек следующим образом [4]:

$$A_i^{(+m)} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m x_{2v} \cos j\varphi_{2v} - y_{2v} \sin j\varphi_{2v}, \quad (4)$$

$$B_i^{(+m)} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m x_{2v} \sin j\varphi_{2v} + y_{2v} \cos j\varphi_{2v}.$$

Положение узловых точек на границе области вначале неизвестно. Построим итерационный процесс, позволяющий определить координаты узловых точек.

Заметим, что образы \tilde{z}_k нечетных точек при отображении полиномом, построенным на базе четных узловых точек, вообще говоря, не будут лежать на контуре области G . Назовем их внеконтурными нечетными узловыми точками. Связь между этими точками и четными узловыми точками устанавливается по формулам [4]

$$\tilde{x}_k = \sum_{v=1}^m x_{2v} \gamma_{2v-k}^I - y_{2v} \gamma_{2v-k}^{II}, \quad (5)$$

$$\tilde{y}_k = \sum_{v=1}^m x_{2v} \gamma_{2v-k}^{II} + y_{2v} \gamma_{2v-k}^I,$$

где

$$\gamma_{2v-k}^I = \frac{1}{m} \sum_{j=-1}^{m-2} \sin j\varphi_{2v-k}, \quad \gamma_{2v-k}^{II} = \frac{1}{m} \sum_{j=-1}^{m-2} \cos j\varphi_{2v-k}.$$

По величине отклонения δ_k внеконтурных узловых точек от контура данной области можно уточнить положение четных узловых точек с помощью формул М. А. Лаврентьева для отображения близких областей [1]:

$$z = \zeta \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta^*(t) \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} dt \right), \quad (6)$$

$$\Delta\varphi_{2v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi_{2v} - t}{2} dt,$$

где $\delta^*(t)$ — функция, которая дает отклонение единичной окружности от контура, полученного из заданного отображением $P_{+m}^{-1}(\zeta)$. Отклонение считаем положительным, если контур лежит внутри единичной окружности, и отрицательным, если — вне ее.

Функцию $\delta^*(\varphi)$ представим как интерполяционный тригонометрический полином, принимающий в $2m$ точках заданные значения: в четных узловых точках — нуль, в нечетных $\delta_k^* = -\delta_k \frac{1}{|P_{+m}'(\zeta_k)|}$. Этот полином, построенный методом К. Ланцоша [2], имеет вид

$$\delta^*(\varphi) = \sum_{j=1}^{m-1} b_j \sin j\varphi + \sum_{j=0}^m a_j \cos j\varphi, \quad (7)$$

где

$$b_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{2m-1} \delta_k^* \sin j\varphi_k, \quad a_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{2m-1} \delta_k^* \cos j\varphi_k, \quad (8)$$

$k = 1, 3, 5, \dots, 2m - 1$. Штрих при Σ' означает, что два крайних члена суммы взяты с весом, равным половине.

Подставив (7) в (6) и проинтегрировав, получим величину $\Delta\varphi_{2\nu}$, которую можно считать приближенным сдвигом четных узловых точек:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{2\nu} &= \sum_{i=1}^m a_i \sin j\varphi_{2\nu} - b_i \cos j\varphi_{2\nu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{2m-1} \delta_k^* (\cos j\varphi_k \sin j\varphi_{2\nu} - \\ &- \sin j\varphi_k \cos j\varphi_{2\nu}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=1}^m \delta_k^* \sin j\varphi_{2\nu-k} = \sum_{k=1}^{2m-1} \delta_k^* \gamma_{2\nu-k}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\gamma_{2\nu-k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \sin j\varphi_{2\nu-k}, \quad \varphi_{2\nu-k} = \frac{(2\nu - k)\pi}{m}. \quad (10)$$

Для определения величины δ_k^* необходимо еще получить формулы для определения модуля производной аппроксимирующего полинома, построенного на базе четных узловых точек, в нечетных точках. Растяжение в нечетных точках можно предвставить в виде

$$|P'_{+m}(\zeta_k)| = \left| \frac{\zeta_k P'_{+m}(\zeta_k)}{\zeta_k} \right| = |\zeta_k P'_{+m}(\zeta_k)| = \sqrt{(x'_k)^2 + (y'_k)^2}. \quad (11)$$

Коэффициенты производной определяются равенствами

$$\begin{aligned} -jA_i^{(+m)} &= \frac{-j}{m} \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} \cos j\varphi_{2\nu} - y_{2\nu} \sin j\varphi_{2\nu}, \\ -jB_i^{(+m)} &= \frac{-j}{m} \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} \sin j\varphi_{2\nu} + y_{2\nu} \cos j\varphi_{2\nu}. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{\nu=1}^m -j[(x_{2\nu} \cos j\varphi_{2\nu} - y_{2\nu} \sin j\varphi_{2\nu}) \cos j\varphi_k + \\ &+ (x_{2\nu} \sin j\varphi_{2\nu} + y_{2\nu} \cos j\varphi_{2\nu}) \sin j\varphi_k] = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} \sum_{i=1}^{m-2} - \\ &- j \cos j\varphi_{2\nu-k} - y_{2\nu} \sum_{i=1}^{m-2} -j \sin j\varphi_{2\nu-k}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$x'_k = \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} (\gamma_{2\nu-k}^1) - y_{2\nu} (\gamma_{2\nu-k}^2).$$

$$y'_k = \sum_{v=1}^m x_{2v} (\gamma_{2v-k}^I)' + y_{2v} (\gamma_{2v-k}^{II})', \quad (14)$$

где

$$(\gamma_{2v-k}^I)' = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-2} -j \sin j\varphi_{2v-k}, \quad (\gamma_{2v-k}^{II})' = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-2} -j \cos j\varphi_{2v-k}.$$

Следует заметить, что коэффициенты γ_{2v-k} , γ_{2v-k}^I , γ_{2v-k}^{II} , $(\gamma_{2v-k}^I)'$ и $(\gamma_{2v-k}^{II})'$ являются постоянными при данном m и не зависят от отображаемой области.

Опишем кратко методику вычислений. Графически [5] определяем в нулевом приближении четные узловые точки, которые сносим по нормали или по лучу из начала координат на контур области G . Определив величину отклонения внеконтурных узловых точек от контура и вычислив по формулам (11), (13), (14) растяжение в точках ξ_k , определяем по формуле (9) величину сдвига $\Delta\varphi_{2v}$, осуществив который, получим первое приближение четных узловых точек и т. д.

Итерационный процесс заканчивается тогда, когда все δ_k не превышают величину допустимой ошибки. Если этого не удастся достичь при выбранном m , то число точек увеличивается вдвое. Коэффициенты A_j ($B_j = 0$) вычисляются по формулам (4).

Для упрощения вычислений по формулам (5), (9), (13) и (14) составляются шаблоны. Подробная методика пользования шаблоном γ_{2v-k} описана в работе [6]. Шаблоны для γ_{2v-k}^I , γ_{2v-k}^{II} , $(\gamma_{2v-k}^I)'$ и $(\gamma_{2v-k}^{II})'$ строятся и используются аналогично.

Для облегчения вычисления коэффициентов D_j и D'_j построим две вспомогательные матрицы $A = (a_{ij})$ и $A' = (a'_{ij})$:

$$a_{ii} = 3, \quad a_{i/j+1} = a_{ij} + 1, \quad a_{i+1,i} = a_{ii} + 2, \quad a_{i+1/j+1} = a_{i+1j} + a_{ij+1},$$

$$a'_{ii} = 2, \quad a'_{i/j+1} = a'_{ij+1} + 1, \quad a'_{i+1,i} = a'_{ii} + 1, \quad a'_{i+1/j+1} = a'_{i+1j} + a'_{ij+1}.$$

С помощью этих матриц построим матрицы $B = (b_{kj})$ и $B' = (b'_{kj})$:

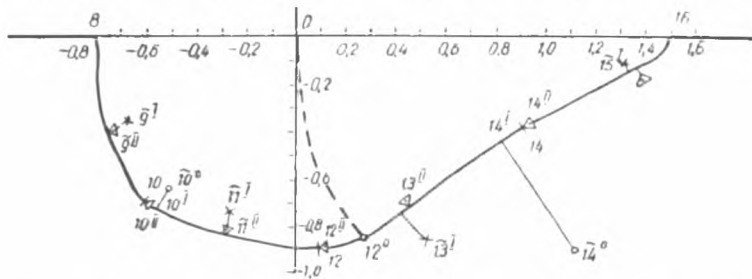
$$b_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < j \text{ или } j+k = 2n+1, k \neq -1 \text{ при } j=1, \\ 2^{j-1} & \text{при } k = j \geq 1, \\ (-1)^{\frac{k-j}{2}} b_{ij} a_{\frac{k-j}{2}, i} & \text{при } k > j \geq 1 \text{ и } k+j = 2n, \\ (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{при } k = 2n, j = 0, \\ 1 & \text{при } k = -1, j = 1, \\ 0 & \text{при } k \leq j \text{ или } k+j = 2n, k \neq 1 \text{ при } j=0 \\ -2^j & \text{при } k = j+1 \geq 2, \\ (-1)^{\frac{k-j+1}{2}} b_{i+1j} a_{\frac{k-j+1}{2}, i} & \text{при } j \geq 1 \text{ и } k+j = 2n+1 \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} & \text{при } k = 2n-1, j=0. \end{cases}$$

Коэффициенты D_i и D'_j являются линейной комбинацией A_k :

$$D_i = \sum_{k=-1}^{m-2} b_{ki} A_k, \quad D'_j = \sum_{k=-1}^{m-2} b'_{kj} A_k. \quad (15)$$

Заметим, что матрицы B и B' строятся один раз для всех областей и вычисление D_j и D'_j по найденным A_k не представляет труда.

Пример. Отобразим с точностью до $|\delta| \leq 0,005$ нижнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость с вырезом, изображенную на рисунке



(такие области часто встречаются при расчете фильтрации из каналов и русел).

Для получения нужного отображения прежде всего найдем коэффициенты A_k полинома, отображающего внешность единичного круга на область, полученную путем объединения данной области и симметричной к ней относительно оси x :

$$z = 0,9717\zeta + 0,1868 + 0,1325\zeta^{-1} + 0,1378\zeta^{-2} + 0,0533\zeta^{-3} + \\ + 0,0372\zeta^{-4} - 0,0075\zeta^{-5} - 0,0118\zeta^{-6}.$$

По формулам (15) находим D_i и D'_j :

$$z = 0,0980 + 0,9068\omega - 0,2344\omega^2 + 0,3632\omega^3 + 0,8640\omega^4 - 0,1200\omega^5 - \\ - 0,3776\omega^6 - (0,9000 - 0,0560\omega - 0,3032\omega^2 - 0,6752\omega^3 + 0,1200\omega^4 + \\ + 0,3776\omega^5) \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

В заключение выражаю благодарность П. Ф. Фильчакову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1958.
2. К. Ланцош, Практические методы прикладного анализа, Физматгиз, М., 1961.
3. В. П. Фильчакова, Про один чисельний метод конформного відображення зовнішніх однозв'язних областей, Доп. АН УРСР, № 9, 1964.
4. В. П. Фильчакова, Конформное отображение внешних областей методом тригонометрической интерполяции, Прикладная механика, т. 1, вып. 3, 1965.
5. П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы конформных отображений, Справочное руководство, Изд-во «Наукова думка», К., 1964.
6. П. Ф. Фильчаков, Конформное отображение заданных областей при помощи метода тригонометрической интерполяции. II, УМЖ, т. XVI, № 6, 1964.

Поступила 23.VI 1965 г.

Киев