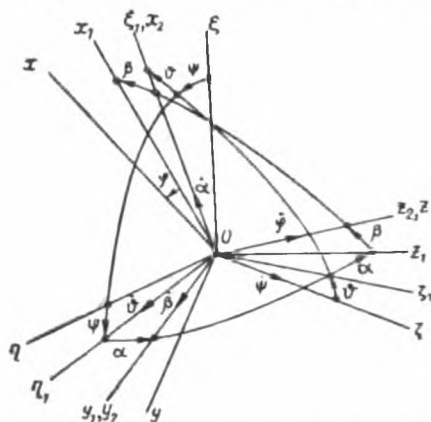


Гироскоп с переменными моментами инерции в кардановом подвесе на подвижном основании

В. И. Климчук

Рассмотрение нестационарных режимов в гиросистемах приводит к учету медленного изменения ряда параметров. Здесь рассмотрен вопрос о движении гироскопа с переменными моментами инерции ротора на подвижном основании (колебания вокруг двух взаимно перпендикулярных осей)*.

1. У р а в н е н и я д в и ж е н и я. Для определения положения системы и исследования ее движения выбираем следующие системы координат:



система $\xi\eta\zeta$ неподвижна в инерционном пространстве; система $\xi_1\eta_1\zeta_1$ связана с основанием; система $x_1y_1z_1$ — с внутренним кольцом, причем ось y_1 направлена по оси вращения внутреннего кольца, а z_1 — по оси вращения ротора; система $x_2y_2z_2$ — с внешним кольцом, ось x_2 совпадает с осью вращения внешнего кольца, а y_2 — с осью вращения внутреннего кольца; система xyz связана с ротором, причем ось z совпадает с осью вращения ротора. Начала координат всех систем совпадают с геометрическим центром подвеса.

Положение основания, кардановых колец и ротора определим углами $\psi, \vartheta, \alpha, \beta, \varphi$ (рисунок).

Для составления уравнений движения системы применяем обобщенную теорему о кинетическом моменте в подвижных осях координат [2].

Проекции угловой скорости составного вращения внутреннего кольца на оси $x_1y_1z_1$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} p_1 &= \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\vartheta} \sin \alpha \sin \beta - \dot{\psi} (\sin \vartheta \cos \beta + \cos \vartheta \cos \alpha \sin \beta), \\ q_1 &= \dot{\beta} + \dot{\vartheta} \cos \alpha + \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \alpha, \\ r_1 &= \dot{\alpha} \sin \beta - \dot{\vartheta} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\psi} (\cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \sin \vartheta \sin \beta), \end{aligned} \quad (1)$$

а проекциями угловой скорости ротора на те же оси будут:

$$p = p_1, \quad q = q_1, \quad r = r_1 + \dot{\varphi}. \quad (2)$$

Проекции угловой скорости составного вращения внешнего кольца на оси $x_2y_2z_2$ равны соответственно:

$$p_2 = \dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \vartheta,$$

* Фирма Sperry разрабатывает так называемый гидродинамический гироскоп с жидконаполненным ротором [1], где медленное изменение его моментов инерции имеет место.

$$q_2 = \dot{\vartheta} \cos \alpha + \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \alpha, \quad (3)$$

$$r_2 = -\dot{\vartheta} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \alpha.$$

Обозначим, далее, моменты инерции ротора относительно осей $x_1 y_1 z_1$ соответственно через A, B, C ; моменты инерции внутреннего кольца относительно тех же осей — через A_1, B_1, C_1 , а моменты инерции внешнего кольца относительно осей $x_2 y_2 z_2$, — соответственно, A_2, B_2, C_2 . Выбранные оси являются главными центральными осями инерции для ротора и колец.

Вычислим проекции кинетических моментов ротора и колец на оси $x_1 y_1 z_1$ и $x_2 y_2 z_2$ соответственно.

Для ротора:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= A\rho, & K_{y_1} &= Bq, & K_{z_1} &= Cr; \\ K_{x_2} &= K_{x_1} \cos \beta + K_{z_1} \sin \beta; \\ K_{y_2} &= K_{y_1}; \\ K_{z_2} &= K_{z_1} \cos \beta - K_{x_1} \sin \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Для внутреннего кольца:

$$\begin{aligned} K_{1x_1} &= A_1\rho_1, & K_{1y_1} &= B_1q_1, & K_{1z_1} &= C_1r_1; \\ K_{1x_2} &= K_{1x_1} \cos \beta + K_{1z_1} \sin \beta; \\ K_{1y_2} &= K_{1y_1}; \\ K_{1z_2} &= K_{1z_1} \cos \beta - K_{1x_1} \sin \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Для внешнего кольца

$$K_{2x_2} = A_2\rho_2, \quad K_{2y_2} = B_2q_2, \quad K_{2z_2} = C_2r_2. \quad (6)$$

Уравнения моментов имеют вид:

а) для ротора относительно оси z_1 :

$$\frac{dK_{z_1}}{dt} + \rho K_{y_1} - q K_{x_1} = M_{z_1}; \quad (7)$$

б) для системы «ротор + внутреннее кольцо» относительно оси y_1 .

$$\frac{d}{dt}(K_{y_1} + K_{1y_1}) + r_1(K_{x_1} + K_{1x_1}) - \rho_1(K_{z_1} + K_{1z_1}) = M_{y_1}; \quad (8)$$

в) для всей системы относительно оси x_2 :

$$\frac{d}{dt}(K_{x_2} + K_{1x_2} + K_{2x_2}) + q_2(K_{z_2} + K_{1z_2} + K_{2z_2}) - r_2(K_{y_2} + K_{1y_2} + K_{2y_2}) = M_{x_2}, \quad (9)$$

где $M_{z_1}, M_{y_1}, M_{x_2}$ — моменты внешних сил относительно указанных осей, приложенные к соответствующим системам тел.

2. Упрощение уравнений. Случай взаимной перпендикулярности колец. Для упрощений примем

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon a_1 \sin \omega_1 t, & \vartheta &= \varepsilon a_2 \sin \omega_2 t, & M_{z_1} &= M_{y_1} = M_{x_2} = 0, \\ A &= A(\tau), & B &= B(\tau), & C &= C(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

где ε — некоторый положительный параметр, характеризующий порядок малости рассматриваемых величин, а параметр $\tau = \varepsilon t$.

Варьируя α и β около их начальных (нулевых) значений $\alpha \sim \varepsilon a_1, \beta \sim \varepsilon b_1$ и сохраняя в уравнениях для α_1 и β_1 члены с точностью до ε^2 , полу-

чаем, с учетом (1) — (10), следующие уравнения возмущенного движения гироскопа:

$$C(\tau) \cdot r = H = \text{const},$$

$$\ddot{\beta}_1 - \nu_1^2(\tau) \dot{\alpha}_1 = a_2 \omega_2^2 \sin \omega_2 t + \varepsilon f_1(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \beta_1, \dot{\beta}_1, \omega_1 t, \omega_2 t, \tau). \quad (11)$$

$$\ddot{\alpha}_1 + \nu_2^2(\tau) \dot{\beta}_1 = -\nu_2^2(\tau) a_2 \omega_2 \cos \omega_2 t + \varepsilon f_2(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \beta_1, \dot{\beta}_1, \omega_1 t, \omega_2 t, \tau).$$

где обозначено

$$\frac{H}{B(\tau) + B_1} = \nu_1^2(\tau), \quad \frac{d}{d\tau} \ln [B(\tau) + B_1] = n_1(\tau),$$

$$\frac{A(\tau) + A_1 + B(\tau) + B_1 - C_1}{B(\tau) + B_1} = L(\tau),$$

$$\frac{H}{A(\tau) + A_1 + A_2} = \nu_2^2(\tau), \quad \frac{A(\tau) + A_1 + A_2 + B(\tau) + B_1 + B_2 - C_1 - C_2}{A(\tau) + A_1 + A_2} = L_1(\tau),$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln [A(\tau) + A_1 + A_2] = n_2(\tau), \quad \frac{A(\tau) + A_1 + B(\tau) + B_1 - C_1}{A(\tau) + A_1 + A_2} = L_2(\tau),$$

$$f_1(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \beta_1, \dot{\beta}_1, \omega_1 t, \omega_2 t, \tau) = -n_1(\tau) \dot{\beta}_1 - n_1(\tau) a_2 \omega_2 \cos \omega_2 t + \\ + a_1 \omega_1^2 \alpha_1 \sin \omega_1 t - L(\tau) \dot{\alpha}_1 a_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - \nu_1^2(\tau) a_1 a_2 \omega_1 \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t - \\ - \nu_1^2(\tau) a_1 \omega_1 \dot{\beta}_1 \cos \omega_1 t.$$

$$f_2(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \beta_1, \dot{\beta}_1, \omega_1 t, \omega_2 t, \tau) = -n_2(\tau) \dot{\alpha}_1 - L_1(\tau) a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \\ + L_2(\tau) a_1 \omega_1 \dot{\beta}_1 \cos \omega_1 t - \nu_2^2(\tau) a_1 \omega_1 \alpha_1 \cos \omega_1 t.$$

Общее решение «невозмущенной» системы, соответствующей (11) ($\varepsilon = 0$, $\tau = \text{const}$), имеет вид

$$\beta_1 = N_1 + M_1 \sin \Psi - a_2 \sin \omega_2 t, \quad \Psi = \omega + \Theta,$$

$$\alpha_1 = N_2 + M_1 \frac{\nu(\tau)}{\nu_1^2(\tau)} \cos \Psi,$$

где $\frac{d\omega}{dt} = \nu(\tau)$, $\nu(\tau) = \nu_1(\tau) \cdot \nu_2(\tau)$ — собственная частота нутационных колебаний; M_1 , N_1 , N_2 , Θ — произвольные постоянные.

Для нахождения приближенного решения системы (11) и исследования его применим метод усреднения [3], приведя предварительно систему (11) к системе в стандартной форме следующей заменой переменных:

$$\beta_1 = N_1 + M_1 \sin \Psi - a_2 \sin \omega_2 t,$$

$$\alpha_1 = N_2 + M_1 \frac{\nu(\tau)}{\nu_1^2(\tau)} \cos \Psi,$$

$$\dot{\beta}_1 = M_1 \cdot \nu(\tau) \cos \Psi - a_2 \omega_2 \cos \omega_2 t,$$

$$\dot{\alpha}_1 = -M_1 \frac{\nu^2(\tau)}{\nu_1^2(\tau)} \sin \Psi,$$

считая M_1 , N_1 , N_2 , Θ новыми переменными.

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} = \varepsilon & \left\{ - \left[n_1(\tau) + \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} \right] M_1 \cos^2 \Psi - \left[n_2(\tau) + \frac{\left(\frac{v^2(\tau)}{v_1^2(\tau)} \right)'_{\tau}}{\frac{v^2(\tau)}{v_1^2(\tau)}} \right] \sin^2 \Psi \cdot M_1 + \right. \\ & + \frac{1}{v(\tau)} \cdot N_2 a_1 \omega_1^2 \cos \Psi \sin \omega_1 t - \frac{v_1^2(\tau)}{v(\tau)} \cdot N_1 a_1 \omega_1 \cos \Psi \cos \omega_1 t + \\ & \left. + N_2 a_1 \omega_1 \sin \Psi \cos \omega_1 t \right\} + \varepsilon F_1(\tau, M_1, N_1, N_2, \Psi, \omega_1 t, \omega_2 t), \\ \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon & \frac{v_1^2(\tau)}{v^2(\tau)} \cdot [L_1(\tau) - L_2(\tau)] a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \\ + M_1 & \frac{v_1^2(\tau)}{v(\tau)} [L_2(\tau) - a_1 \omega_1] \cos \Psi \cdot \cos \omega_1 t \left\} + \varepsilon F_2(\tau, M_1, N_1, N_2, \Psi, \omega_1 t, \omega_2 t), \\ \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon & \left\{ - M_1 \frac{a_1 \omega_1^2}{v(\tau)} \cos \Psi \sin \omega_1 t - M_1 \left[L(\tau) - \frac{v_1^4(\tau)}{v^2(\tau)} \right] a_1 \omega_1 \sin \Psi \cos \omega_1 t \right\} + \\ & + \varepsilon F_3(\tau, M_1, N_1, N_2, \Psi, \omega_1 t, \omega_2 t), \\ \frac{d\Theta}{dt} = \varepsilon & \left\{ \frac{a_1 \omega_1}{v(\tau)} \cdot \frac{N_2}{M_1} \sin \Psi \sin \omega_1 t - \frac{a_1 \omega_1 v_1^2(\tau)}{v(\tau)} \cdot \frac{N_1}{M_1} \sin \Psi \cos \omega_1 t - \right. \\ & \left. - a_1 \omega_1 \cdot \frac{N_2}{M_1} \cos \Psi \cos \omega_1 t \right\} + \varepsilon F_4(\tau, M_1, N_1, N_2, \Psi, \omega_1 t, \omega_2 t), \end{aligned} \quad (12)$$

где $F_i(\tau, M_1, N_1, N_2, \Psi, \omega_1 t, \omega_2 t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — 2π -периодические по $\Psi, \omega_1 t, \omega_2 t$, средние значения которых по времени ($\tau = \text{const}$)

$$\bar{F}_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_i(\tau, M_1, N_1, N_2, \Psi, \omega_1 t, \omega_2 t) dt = 0. \quad (13)$$

Из (12), применяя принцип усреднения, с учетом (13) получаем в первом приближении:

$$M_1 = \bar{M}_1, \quad N_1 = \bar{N}_1, \quad N_2 = \bar{N}_2, \quad \Theta = \bar{\Theta},$$

причем $\bar{M}_1, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{\Theta}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}_1}{dt} = -\frac{1}{2} \varepsilon \bar{M}_1 & \left[n_1(\tau) + n_2(\tau) + \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} + \frac{\left(\frac{v^2(\tau)}{v_1^2(\tau)} \right)'_{\tau}}{\left(\frac{v^2(\tau)}{v_1^2(\tau)} \right)} \right], \\ \frac{d\bar{N}_1}{dt} = & \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_1 \neq \omega_2; \\ \varepsilon \frac{v_1^2(\tau)}{2v^2(\tau)} \cdot [L_1(\tau) - L_2(\tau)] a_1 a_2 \omega_1^2, & \text{если } \omega_2 = \omega_1, \end{cases} \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} = & 0, \\ \frac{d\bar{\Theta}}{dt} = & 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Анализируя соотношения (14), отметим, во-первых, затухание нутационных колебаний в случае, если $n_1(\tau) + n_2(\tau) > 0$ $\left(\frac{d}{d\tau} (A(\tau) + B(\tau)) > 0 \right)$; во-вторых, при совпадении частот обоих колебаний ($\omega_1 = \omega_2$) гироскоп теряет устойчивость: имеет место систематический уход по углу β со средней угловой скоростью

$$\dot{\beta} = \varepsilon^2 \frac{v_1^2(\tau)}{2v^2(\tau)} [L_1(\tau) - L_2(\tau)] a_1 a_2 \omega_1^2.$$

Этого ухода можно избежать (по крайней мере теоретически), если при значении $\tau = \tau_1$ зависимость между моментами инерции ротора и колец такова, что $L_1(\tau_1) = L_2(\tau_1)$. В-третьих, при совпадении частоты нутационных колебаний при $\tau = \tau_2$ с частотой колебания основания вокруг одной из осей (именно: $v(\tau_2) = \omega_1$) может возникнуть нерезонансный уход гироскопа по углу α при $\bar{\Theta} \neq 0$ (что соответствует наличию начальной скорости по углу α ($\dot{\alpha}_0 \neq$

$\neq 0$), так как $\text{tg } \Theta = \frac{a_0 v_1(\tau)}{v_2^{(r)}(\dot{\beta}_0 - a_2 \omega_2)}$ со средней угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = -\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} \bar{M}_1 \cdot \left\{ \frac{a_1 \omega_1^2}{v(\tau_2)} - \left[L(\tau_2) - \frac{v_1^2(\tau_2)}{v(\tau_2)} \right] a_1 \omega_1 \right\} \sin \bar{\Theta}.$$

Этот уход исчезает при выполнении условия $\frac{d}{d\tau} |A(\tau) + B(\tau)| > 0$.

Наличие вязкого трения приводит лишь к дополнительному демпфированию нутационных колебаний. В случае симметричного сухого трения дополнительных дрейфов не возникает. В случае несимметричного сухого трения, а именно

$$M_{x_2} = \varepsilon m_2 \text{sign } \dot{\alpha} = \begin{cases} \varepsilon m_2^+, & \dot{\alpha} > 0, \\ \varepsilon m_2^0, & \dot{\alpha} = 0, \\ \varepsilon m_2^-, & \dot{\alpha} < 0; \end{cases} \quad M_{y_1} = \varepsilon m_1 \text{sign } \dot{\beta} = \begin{cases} \varepsilon m_1^+, & \dot{\beta} > 0, \\ \varepsilon m_1^0, & \dot{\beta} = 0, \\ \varepsilon m_1^-, & \dot{\beta} < 0 \end{cases}$$

возникают дополнительные дрейфы относительно обеих осей. Величины их средних угловых скоростей вычисляются по формулам

$$\dot{\alpha} = -\varepsilon^2 \frac{p_1^+ - p_1^-}{v_1^2(\tau)}, \quad \dot{\beta} = \varepsilon^2 \frac{p_2^+ - p_2^-}{v(\tau)},$$

где

$$p_1 = \frac{m_1}{B(\tau) + B_1}, \quad p_2 = \frac{m_2}{A(\tau) + A_1 + A_2}.$$

Таким образом, уходы являются величинами второго порядка малости по отношению к величинам, вызывающим их.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Klass, Two-axis gyroscope uses spinning liquid, Aviation Week, v. 75, № 14, 1961.
2. Е. Л. Николаи, Гироскоп в кардановом подвесе, Изд-во «Наука», М., 1964.
3. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд-во «Наука», М., 1964.

Поступила 1. IX 1965 г.

Киев