

Фильтрационный расчет флютбетов при произвольной наперед заданной линии водоупора

В. Ф. Ковалев

При решении задач напорной фильтрации основная трудность заключается в конформном отображении области фильтрации на вспомогательную полуплоскость [1—3]. Дальнейший ход решения уже не зависит от формы исходной области и выполняется во всех случаях одним и тем же стандартным методом, детально рассмотренным в [4, т. 1]. При сложных контурах области фильтрации аналитические методы отображения приводят к трудоемким вычислениям, поэтому в этих случаях более эффективное применение находят приближенные методы отображения.

Среди приближенных методов конформного отображения, различных как по трудоемкости вычислений, так и по точности получаемых результатов, в последнее время получил широкое применение метод тригонометрической интерполяции (мти) [5], в том числе и для решения задач фильтрации. Он требует сравнительно небольшой затраты времени и позволяет с любой степенью точности отобразить единичный круг на любую наперед заданную замкнутую односвязную область.

В настоящей работе предлагается применение мти для решения задач напорной фильтрации.

Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим плоский флютбет на однородном основании при произвольной криволинейной линии водоупора. Следует отметить, что подобная задача решена [4, т. 2]. Для решения ее в [4, т. 2] применен метод последовательных конформных отображений, который позволяет флютбет произвольного профиля с произвольной линией водоупора привести к плоскому флютбету при прямолинейной линии водоупора. Однако при таком решении для спрямления каждого участка вариации линии водоупора приходится применять отдельное преобразование, т. е. объем вычислений растет по мере усложнения линии водоупора. Применение мти устраняет этот недостаток. Усложнение линии водоупора незначительно влияет на объем вычислений.

Для конкретности будем рассматривать пример с числовыми данными, хотя он носит вполне общий характер.

Схема фильтрационного потока представлена на рис. 1. Линия водоупора L задана дискретным рядом точек z_k , в которых были заложены скважины при геологическом исследовании грунта основания плотины. При решении задачи ограничимся вычислением напора h вдоль флютбета и полного фильтрационного расхода жидкости Q .

Интересующие нас точки перенумеруем, как показано на рис. 1. Решение задачи будем проводить в несколько этапов. На первом этапе область фильтрации z отобразим на некоторую замкнутую односвязную область z_1 . Для этого поступим следующим образом. Функция

$$z_1 = \frac{1}{i} \frac{e^{\frac{\pi}{a} z - i \frac{\pi}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi}{a} z - i \frac{\pi}{2}} + 1} \quad (1)$$

отображает полосу $0 \leq \text{Im} z \leq a$ на единичный круг с центром в начале координат. Если применить функцию (1) для отображения области фильтрации, то нетрудно заметить, что действительная ось перейдет в левую полуокружность, а линия водоупора L отобразится в некоторую кривую, расположенную в правой полуплоскости $\text{Re} z < 0$ и замыкающую левую полуокружность. В качестве параметра a в формуле (1) выбираем величину,

равную

$$a = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2}$$

где T_{\max} и T_{\min} — ординаты точек соответственно наиболее и наименее заглубленных в грунт. На рис. 2 изображена область, в которую отображается область фильтрации в результате применения функции (1). При этом было взято $a = 1$.

Второй этап состоит в нахождении функции, конформно отображающей полученную область на единичный круг. Это достигается с помощью мти. Методика вычислений по мти подробно изложена в [5], поэтому не

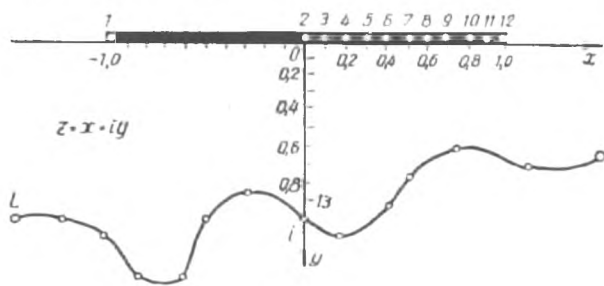


Рис. 1

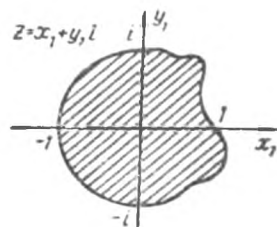


Рис. 2.

будем на ней останавливаться. Отметим только, что функция, отображающая единичный круг на область $z_1 = x_1 + iy_1$, получается в виде отрезка ряда, т. е. в виде аппроксимирующего полинома

$$z_1 = \sum_{k=1}^m c_k z_2^k, \quad c_k = a_k + ib_k. \quad (2)$$

Для завершения второго этапа остается обратить ряд (2), поскольку нас интересует функция, конформно отображающая область z_1 на единичный круг. Для обращения полинома (2) воспользуемся методикой, изложенной в [4, т. 1, § 22]. Для нашего примера функция z_2 получилась в виде полинома восьмой степени:

$$\begin{aligned} z_2 = & (1,027 + 0,275i) z_1 + (0,110 - 0,037i) z_1^2 + (0,048 - 0,102i) z_1^3 + \\ & + (-0,023 - 0,123i) z_1^4 + (-0,065 - 0,092i) z_1^5 + (-0,068 - 0,008i) z_1^6 + \\ & + (-0,039 + 0,058i) z_1^7 + (0,007 + 0,056i) z_1^8. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь остается отобразить полученный круг на полуплоскость. Дальнейшее решение не представляет трудности.

Однако можно значительно сократить вычисления, если воспользоваться номограммами, составленными для плоского флюتبета при прямолинейной горизонтальной линии водоупора [4]. Для этого следует отобразить единичный круг на полосу, т. е. на область плоского флюتبета с прямолинейной линией водоупора, применив предварительно одно вспомогательное преобразование. Дело в том, что в результате отображения по мти точки круга сдвигаются по окружности на некоторый угол φ . Если отобразить такой круг на область плоского флюتبета, то некоторые точки (например, точки 9, 10, 11, 12; см. таблицу), являющиеся образами точек нижнего бьефа, отобразятся на линию водоупора. Поэтому, чтобы все стало на свои места, нужно применить преобразование

$$z_3 = e^{i\varphi} z_2, \quad (4)$$

z_k m	$z^{(m)}$	$z_1^{(m)}$	$z_2^{(m)}$	$z_3^{(m)}$	$z_4^{(m)}$	$z_5^{(m)} = \xi$	$\bar{n}_{теор}$	$\bar{h}_{эм}$
1	-1,0	-0,088+0,988 i	-0,382+0,950 i	-0,211+1,002 i	-0,718	-1	1,000	1,000
2	0,0	-1	-0,945-0,257 i	-0,976-0,089 i	0,029	-0,142	0,550	0,508
3	0,1	-0,953-0,304 i	-0,858-0,553 i	-0,941-0,395 i	0,129	-0,044	0,512	0,474
4	0,2	-0,831-0,557 i	-0,643-0,756 i	-0,765-0,633 i	0,240	0,100	0,465	0,438
5	0,3	-0,677-0,736 i	-0,476-0,863 i	-0,619-0,767 i	0,332	0,206	0,430	0,401
6	0,4	-0,527-0,850 i	-0,320-0,954 i	-0,481-0,884 i	0,436	0,326	0,388	0,365
7	0,5	-0,399-0,917 i	-0,153-0,994 i	-0,324-0,952 i	0,574	0,474	0,327	0,325
8	0,6	-0,297-0,955 i	-0,061-0,993 i	-0,233-0,967 i	0,680	0,606	0,281	0,286
9	0,7	-0,219-0,976 i	+0,010-0,985 i	-0,162-0,972 i	0,793	0,736	0,225	0,244
10	0,8	-0,161-0,987 i	0,054-0,978 i	-0,117-0,973 i	0,900	0,859	0,157	0,197
11	0,9	-0,118-0,993 i	0,080-0,975 i	-0,091-0,974 i	0,967	0,936	0,112	0,137
12	1,0	-0,098-0,998 i	0,099-0,975 i	-0,072-0,978 i	1,023	1,000	0,000	0,000
13	i	1	1	0,985-0,174 i	0,055+i	T=1,149	—	—
14	∞	-i	0,169-0,981 i	—	—	—	—	—

где φ — дуга, на которую сдвигается точка $z_1 = -i$ в результате применения отображения (3). Для нашего примера функция (4) имеет вид

$$z_3 = e^{-i \arcsin 0,169} z_2. \quad (4')$$

Теперь, применив преобразование

$$z_4 = \frac{a}{\pi} \ln \frac{iz_3 + 1}{iz_3 - 1} + \frac{i}{2}. \quad (5)$$

обратное преобразованию (1), осуществим конформное отображение области плоского флютбета $z = x + iy$ с криволинейной линией водоупора на область плоского флютбета $z_4 = x_4 + iy_4$ с прямолинейной линией водоупора.

Для завершения решения задачи остается плоский флютбет отобразить на стандартный плоский флютбет с концами в точках ± 1 , которое осуществляется линейным преобразованием

$$\xi = \frac{2(z_4 - z_4^{(1)})}{z_4^{(1)} - z_4^{(2)}} - 1. \quad (6)$$

После того, как найдены образы точек флютбета в плоскости ξ и глубина залегания водоупора, которая равна ординате образа точки 13 в плоскости ξ по номограмме 2 приложения 1 [4], находим значения напора \bar{h} в точках флютбета и по номограмме 1 находим величину полного фильтрационного расхода \bar{Q} .

Результаты вычислений приведены в таблице.

Легко подсчитать значения напора и для отрицательных значений ξ , поскольку для плоского флютбета имеет место формула

$$h(-\xi) = 1 - \bar{h}(\xi).$$

В таблице результаты, полученные теоретическим путем, сопоставлены с результатами электро моделирования. Эксперимент был повторен 6 раз на различных по проводимости сортах бумаги и в качестве истинного значения напора взято их среднее арифметическое значение.

Для полного фильтрационного расхода получаем значение

$$\bar{Q} = 0,381.$$

Аналогично находятся и величины выходных скоростей. Рассмотренная задача носит самый общий характер поскольку: 1) на точки водоупора z_k

не накладывалось никаких ограничений; 2) флюэтбет произвольного профиля с помощью метода последовательных конформных отображений [4, т. 2] всегда можно привести к плоскому флюэтбету.

Данный пример носит иллюстративный характер, и поэтому мы не добивались высокой точности. Но при необходимости точность может быть всегда повышена за счет увеличения узловых точек при отображении области z_1 на круг.

Пример наглядно показывает, что хотя линия водоупора выбрана самая общая и довольно сложная, все же при небольшом количестве шагов получены вполне приемлемые для практических расчетов результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой среде, Гостехиздат, М., 1953.
2. Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, Собр. соч., т. 2, Изд-во АН СССР, М., 1962.
3. П. Я. Полубаринова - Кочина, Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, М., 1942.
4. П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. 1, 2, Изд-во АН УССР, К., 1959—1960.
5. П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы конформных отображений, Изд-во АН УССР, К., 1964.

Поступила 19. V 1965 г

Киев