Метод определения интервалов неустойчивости квазигармонических систем с запаздывающим аргументом

Я. П. Менько

1. Данная работа является продолжением исследования периодических движений колебательных систем с запаздыванием, изложенного в работах [3—6].

Пусть задана система линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием

$$\ddot{y}_s(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{sk} y_k(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} [g_{sk}(\omega t)\, y_k(t) + b_{sk}(\omega t) y_k(t - \Delta(\omega t)) +$$

$$+ p_{sk}(\omega t)\, y_k(t) + r_{sk}(\omega t)\, y_k(t - \Delta_1(\omega t))] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где a_{sk} — постоянные, $g_{sk}(\omega t)$, $b_{sk}(\omega t)$, $p_{sk}(\omega t)$, $r_{sk}(\omega t)$, запаздывания $\Delta(\omega t)$ и $\Delta_1(\omega t)$ — периодические непрерывные функции t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ или постоянные, ε — малый параметр. Кроме того, функции $\Delta(\omega t)$ и $\Delta_1(\omega t)$ удовлетворяют условиям $\Delta(\omega t) \geqslant 0$, $\Delta_1(\omega t) \geqslant 0$.

Задача состоит в том, чтобы определить интервал изменения ω, в котором система (1) имеет неустойчивые решения. В работе указывается метод для определения таких интервалов. Этот метод является обобщением метода, изложенного в работах [1, 2]. Вместе с асимптотическими методами Крылова — Боголюбова — Митропольского он позволяет получить простые и наглядные результаты.

В системе (1) сделаем замену переменной $\tau = \omega t$ и введем обозначение

$$y_s^{(1)}(\tau) = y_s\left(\frac{\tau}{\omega}\right). \tag{2}$$

Тогда система (1) соответственно примет вид

$$\ddot{y}_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{sk}}{\omega^2} y_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{g_{sk}(\tau)}{\omega} \dot{y}_k + \frac{b_{sk}(\tau)}{\omega} \dot{y}_k(\tau - \omega\Delta(\tau)) + \right.$$

$$+ \frac{p_{sk}(\tau)}{\omega^2} y_k + \frac{r_{sk}(\tau)}{\omega^2} y_k(\tau - \omega\Delta_1(\tau))\Bigg] \qquad (s = 1,\ 2, \ldots, n) \tag{3}$$

(здесь для сокращения записи индекс 1 вверху опущен), где функции $g_{sk}(\tau)$, $b_{sk}(\tau)$, $p_{sk}(\tau)$, $r_{sk}(\tau)$ и запаздывания

$$\bar{\Delta}(\tau) = \omega\Delta(\tau) \qquad \text{и} \qquad \bar{\Delta}_1(\tau) = \omega\Delta_1(\tau) \tag{4}$$

будут иметь период 2π.

Предположим, что корни характеристического уравнения

$$\operatorname{Det}\left\| \frac{a_{sk}}{\omega^2} + \delta_{sk}\lambda^2 \right\| = 0 \tag{5}$$

($\delta_{sk} = 1$ для $s = k$, $\delta_{sk} = 0$ для $s \neq k$), соответствующего системе дифференциальных уравнений (3) при $\varepsilon = 0$ (укороченная система)

$$\ddot{y}_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{sk}}{\omega^2} y_k = 0, \tag{6}$$

являются чисто мнимыми и простыми.

Введем обозначение

$$\lambda_s = \frac{i\Omega_s}{\omega} \qquad (s = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где Ω_s — собственные частоты системы (1) при $\varepsilon = 0$. Характеристическое уравнение (5) имеет корни $\pm\lambda_1;\ \pm\lambda_2; \ldots; \pm\lambda_n$.

Известно, что система с периодическими коэффициентами типа (1) имеет неустойчивые решения вблизи тех значений $\omega = \omega_0$, для которых

$$\omega_0 = \frac{|\Omega_j \pm \Omega_r|}{N} \qquad (j, r = 1,\ 2, \ldots, n),\ (N = 1,\ 2, \ldots). \tag{8}$$

В силу (7) соотношение (8) перейдет в следующее:

$$\lambda_j \pm \lambda_r = iN. \tag{9}$$

2. Преобразуем систему (3) таким способом, чтобы соответствующая укороченная система приводилась к нормальным координатам. Получим следующую систему:

$$\ddot{x}_s - \lambda_s^2 x_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} [Q_{sk}(\tau)\dot{x}_k + B_{sk}(\tau)\dot{x}_k(\tau - \bar{\Delta}(\tau)) + P_{sk}(\tau)x_k +$$

$$+ R_{sk}(\tau)x_k(\tau - \bar{\Delta}_1(\tau))] \qquad (s = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{10}$$

где $Q_{sk}(\tau)$, $P_{sk}(\tau)$, $B_{sk}(\tau)$, $R_{sk}(\tau)$ также являются периодическими непрерывными функциями с периодом 2π.

Подстановками

$$x_s' + \lambda_s x_s = \xi_s, \qquad x_s' - \lambda_s x_s = \eta_s \tag{11}$$

приведем систему (10) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_s &= \lambda_s \xi_s + \frac{1}{2}\varepsilon\Phi_s, \\ \dot{\eta}_s &= -\lambda_s \eta_s + \frac{1}{2}\varepsilon\Phi_s, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\Phi_s(\tau)$ определяется соотношением

$$\Phi_s(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \Big[Q_{sk}(\xi_k + \eta_k) + B_{sk}(\xi_k(\tau - \bar{\Delta}(\tau)) + \eta_k(\tau - \bar{\Delta}(\tau))) +$$

$$+ P_{sk}\frac{\xi_k - \eta_k}{\lambda_k} + R_{sk}\frac{\xi_k(\tau - \bar{\Delta}_1(\tau)) - \eta_k(\tau - \bar{\Delta}_1(\tau))}{\lambda_k}\Big].$$

Ищем решения системы (12) в следующем виде [4]:

$$\xi_s = u_s(\tau, \varepsilon)\, e^{\mu(\varepsilon)\tau},$$
$$\eta_s = v_s(\tau, \varepsilon)\, e^{\mu(\varepsilon)\tau}, \qquad (13)$$

где $u_s(\tau, \varepsilon)$ и $v_s(\tau, \varepsilon)$ являются периодическими функциями τ с периодом 2π. Характеристические показатели $\mu(\varepsilon)$ имеют вид

$$\mu(\varepsilon) = \lambda + i\varepsilon\varkappa(\varepsilon), \qquad (14)$$

где λ — корни характеристического уравнения (5), т. е. $\pm\lambda_s$, $\varkappa(\varepsilon)$ — аналитическая функция ε.

Подставляя (13) в (12), получим систему дифференциальных уравнений вида

$$u_s' = (\lambda_s - \lambda)u_s + \varepsilon\left(-i\varkappa u_s + \frac{1}{2}F_s\right),$$
$$v_s' = -(\lambda_s + \lambda)v_s + \varepsilon\left(-i\varkappa v_s + \frac{1}{2}F_s\right), \qquad (15)$$

где

$$F_s = \sum_{k=1}^{n} \Big[Q_{sk}(u_k + v_k) + B_{sk}(u_k(\tau - \bar{\Delta}(\tau)) + v_k(\tau - \bar{\Delta}(\tau)))\, e^{-\mu\bar{\Delta}(\tau)} +$$

$$+ P_{sk}\frac{u_k - v_k}{\lambda_k} + R_{sk}\frac{u_k(\tau - \bar{\Delta}_1(\tau)) - v_k(\tau - \bar{\Delta}_1(\tau))}{\lambda_k}\, e^{-\mu\bar{\Delta}_1(\tau)}\Big] \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Будем искать периодические решения u_k и v_k для тех значений ω, которые лежат в окрестности ω_0, т. е. соответствующих равенству (8).

Интервалы неустойчивости решения системы (12) удовлетворяют неравенству

$$\frac{\Omega_j \pm \Omega_k}{N} + \varepsilon\gamma_1(\varepsilon) < \omega < \frac{\Omega_j \pm \Omega_k}{N} + \varepsilon\gamma_2(\varepsilon) \qquad (16)$$

$$(\Omega_j > \Omega_k;\ \gamma_1 < \gamma_2;\ N = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через ω^* границу интервалов неустойчивости

$$\omega^* = \frac{\Omega_j \pm \Omega_k}{N} + \varepsilon\gamma(\varepsilon).$$

В силу (7) последнее соотношение представим в виде

$$\lambda_j^* \pm \lambda_k^* = iN + \varepsilon i\alpha(\varepsilon), \qquad (17)$$

где λ_j^*, λ_k^* — корни характеристического уравнения, отвечающие ω^*, $\alpha(\varepsilon)$ — действительная функция ε.

Если в систему (15) вместо λ подставить один из корней характеристического уравнения, например λ_j^*, и если искать интервал неустойчивости вблизи тех значений $\omega = \omega_0$, для которых $\omega_0 = \dfrac{\Omega_r + \Omega_j}{N}$, получим, принимая во внимание (17), следующую систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
u_j' &= \varepsilon\left(-i\varkappa u_j + \frac{1}{2}F_j\right),\\
v_r' &= -iNv_r + \varepsilon\left(-i\varkappa v_r - iav_r + \frac{1}{2}F_r\right),\\
u_s' &= (\lambda_s^* - \lambda_j^*)u_s + \varepsilon\left(-i\varkappa u_s + \frac{1}{2}F_s\right)\\
&\qquad (s \neq j),\\
v_s' &= -(\lambda_s^* + \lambda_j^*)v_s + \varepsilon\left(-i\varkappa v_s + \frac{1}{2}F_s\right)\\
&\qquad (s \neq r).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Предположим, что имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
\lambda_s - \lambda_j &\neq Mi \qquad (s \neq j),\\
\lambda_s + \lambda_j &\neq Mi \qquad (s \neq r),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где M — целое число.

Решения системы (18) будем искать методом вспомогательных систем Шиманова [4]. Добавим к правой части первого уравнения системы (18) постоянную W_1, к правой части второго уравнения этой системы — $W_2e^{-iN\tau}$, W_2 — постоянная величина. Получим следующую вспомогательную систему:

$$
\begin{aligned}
u_j' &= \varepsilon\left(-i\varkappa u_j + \frac{1}{2}F_j\right) + W_1,\\
v_r' &= -iNv_r + \varepsilon\left(-i\varkappa v_r - iav_r + \frac{1}{2}F_r\right) + W_2e^{-iN\tau},\\
u_s' &= (\lambda_s^* - \lambda_j^*)u_s + \varepsilon\left(-i\varkappa u_s + \frac{1}{2}F_s\right)\\
&\qquad (s \neq j),\\
v_s' &= -(\lambda_s^* + \lambda_j^*)v_s + \varepsilon\left(-i\varkappa v_s + \frac{1}{2}F_s\right)\\
&\qquad (s \neq r).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

При $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ система (20) перейдет в систему (18).

Будем искать периодические решения u_k, v_k с периодом 2π в виде формальных рядов

$$
\begin{aligned}
u_s &= u_{s0} + \varepsilon u_{s1} + \varepsilon^2 u_{s2} + \ldots,\\
v_s &= v_{s0} + \varepsilon v_{s1} + \varepsilon^2 v_{s2} + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

с неизвестными периодическими коэффициентами.

Постоянные W_1 и W_2 также ищем в виде рядов

$$
\begin{aligned}
W_1 &= W_{10} + \varepsilon W_{11} + \varepsilon^2 W_{12} + \ldots,\\
W_2 &= W_{20} + \varepsilon W_{21} + \varepsilon^2 W_{22} + \ldots
\end{aligned}
\tag{22}
$$

с неизвестными постоянными коэффициентами, которые следует найти из условия периодичности соответствующих коэффициентов в рядах (21).

Если задать начальные условия

$$u_j(0) = A, \qquad v_r(0) = B, \tag{23}$$

то остальные $2n - 2$ начальных условий будут по Шиманову [4] зависеть от A и B.

В согласии с начальными условиями (23) зададим начальные условия в виде

$$\begin{gathered} u_{j0}(0) = A, \qquad u_{jl}(0) = 0, \\ v_{r0}(0) = B, \qquad v_{rl}(0) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{24}$$

Подставим u_s и v_s, W_1 и W_2 в вспомогательную систему (20) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда из условия периодичности решения получим для нулевого приближения:

$$\begin{gathered} u_{j0} = A, \qquad u_{s0} = 0 \qquad (s \neq j), \\ v_{r0} = B \cdot e^{-iN\tau}, \qquad v_{s0} = 0 \qquad (s \neq r), \\ W_{10} = 0, \qquad W_{20} = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Из первого приближения, используя периодичность решений u_{j1} и v_{r1}, находим постоянные W_{11} и W_{21}:

$$\begin{gathered} W_{11} - i\varkappa_0 A + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| \left(Q_{jj} + B_{jj}e^{-\lambda_j\bar{\Delta}(\tau)} + \frac{P_{jj}}{\lambda_j} + \frac{R_{jj}}{\lambda_j} e^{-\lambda_j\bar{\Delta}_1(\tau)} \right) A + \right. \\ \left. + \left(Q_{jr} + B_{jr}e^{(-\lambda_j+iN)\bar{\Delta}(\tau)} - \frac{P_{jr}}{\lambda_r} - \frac{R_{jr}}{\lambda_r} e^{(-\lambda_j+iN)\bar{\Delta}_1(\tau)} \right) Be^{-iN\tau} \right| d\tau = 0, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} W_{21} - i\varkappa_0 B - i\alpha_0 B + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| \left(Q_{rj} + B_{rj}e^{-\lambda_j\bar{\Delta}(\tau)} + \frac{P_{rj}}{\lambda_j} + \frac{R_{rj}}{\lambda_j} e^{-\lambda_j\bar{\Delta}_1(\tau)} \right) Ae^{iN\tau} + \right. \\ \left. + \left(Q_{rr} + B_{rr}e^{(-\lambda_j+iN)\bar{\Delta}(\tau)} - \frac{P_{rr}}{\lambda_r} - \frac{R_{rr}}{\lambda_r} e^{(-\lambda_j+iN)\bar{\Delta}_1(\tau)} \right) B \right| d\tau = 0, \end{gathered}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa(0)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$. Приравнивая в соотношении (21) коэффициенты при ε^2 и используя периодичность решений u_{j2} и v_{r2}, находим постоянные W_{12} и W_{22}.

Если положить $W_1 = 0$ и $W_2 = 0$, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно A и B. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы детерминант, составленный из ее коэффициентов, был равен нулю. Получим квадратное уравнение с комплексными коэффициентами для $\varkappa$, которое зависит от α. Интервалу неустойчивости решений будет соответствовать такой коэффициент $\varkappa$, у которого мнимая часть отрицательна. Исходя из этих условий, выбирается величина α, которая дает нам границу интервала неустойчивости.

З а м е ч а н и е 1. Этот метод определения интервалов неустойчивости распространяется на системы нейтрального типа и на дифференциальные уравнения типа (1) с непрерывно распределенным запаздыванием.

З а м е ч а н и е 2. При достаточно малом параметре ε и быстрой сходимости констант W_1 и W_2 на длину интервала неустойчивости квазигармонических систем с запаздывающим аргументом оказывает решающее влияние первое приближение W_{11} и W_{21}, следующие приближения лишь уточняют его.

Замечание 3. Будем называть интервал неустойчивости с центром в точке

$$\omega_0 = \frac{2\Omega_s}{N} \qquad (s = 1,\ 2, \ldots, n;\ N = 1,\ 2, \ldots)$$

интервалом неустойчивости первого типа и интервал с центром в точке

$$\omega_0 = \frac{\Omega_j \pm \Omega_r}{N} \qquad (j,\ r = 1,\ 2, \ldots, n;\ \Omega_j > \Omega_r;\ N = 1,\ 2, \ldots)$$

— интервалом неустойчивости второго типа. Интервал неустойчивости, отвечающий числу N, назовем интервалом неустойчивости N-го порядка.

Из (26) можно сделать следующие выводы.

В первом приближении для определения интервалов неустойчивости первого типа используются только диагональные члены матриц коэффициентов Q_{jr}, B_{jr}, P_{jr}, R_{jr} $(j,\ r = 1,\ 2, \ldots, n)$.

Длина интервалов неустойчивости первого и второго типов, отвечающих комбинации корней λ_j и λ_r $(\lambda_j \pm \lambda_r)$, будет определяться коэффициентами Q_{rj}, B_{rj}, P_{rj}, R_{rj} и Q_{jr}, B_{jr}, P_{jr}, R_{jr}.

Длина интервалов неустойчивости первого и второго типов в случае стационарного запаздывания аргумента будет определяться членами N-го порядка разложения Фурье коэффициентов Q_{sk}, B_{sk}, P_{sk}, R_{sk}.

3. Для иллюстрации данного метода приведем пример. Пусть колебательная система описывается уравнением

$$\ddot{y}(t) + \varepsilon c y(t - \Delta) + \Omega^2 y(t) + 2\varepsilon \cos \omega t y(t - \Delta_1) = 0, \quad \Delta \geqslant 0, \quad \Delta_1 \geqslant 0. \quad (27)$$

Ради простоты изложения рассмотрим постоянные запаздывания $\Delta = \mathrm{const}$, $\Delta_1 = \mathrm{const}$. Сделаем замену переменной $\tau = \omega t$ и проведем преобразования согласно теории; получим следующую систему дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{u} = (\lambda_1 - \lambda)\, u + \varepsilon \left[- i\varkappa(\varepsilon)\, u + \frac{1}{2} F \right],$$

$$\dot{v} = -(\lambda_1 + \lambda)\, v + \varepsilon \left[- i\varkappa(\varepsilon)\, v + \frac{1}{2} F \right],$$

где

$$F = -\frac{c}{\omega} [u(\tau - \bar{\Delta}) + v(\tau - \bar{\Delta})]\, e^{-\lambda \bar{\Delta}} - \frac{2\cos\tau}{\omega^2} \frac{u(\tau - \bar{\Delta}_1) - v(\tau - \bar{\Delta}_1)}{\lambda_1} e^{-\lambda \bar{\Delta}_1},$$

$$\lambda_1 = \frac{i\Omega}{\omega}, \qquad \bar{\Delta} = \omega\Delta, \qquad \bar{\Delta}_1 = \omega\Delta_1,$$

Ω — собственная частота системы (27) при $\varepsilon = 0$. Интервалы неустойчивости следует ожидать вблизи тех значений $\omega = \omega_0$, для которых $\omega_0 = \dfrac{2\Omega}{N}$.

Первые приближения постоянных W_{11} и W_{21} при $N = 1$ будут

$$W_{11} = \left(i\varkappa_0 + \frac{c e^{-i\Omega\Delta}}{2\omega_0} \right) A - \frac{e^{i\Omega\Delta_1}}{2\omega_0^2 \lambda_1} B, \quad (28)$$

$$W_{21} = \frac{e^{-i\Omega\Delta_1}}{2\omega_0^2 \lambda_1} A + \left(i\varkappa_0 + i\alpha_0 + \frac{c}{2\omega_0} e^{i\Omega\Delta} \right) B.$$

Если удовлетвориться первыми двумя приближениями

$$W_1 \doteq W_{10} + \varepsilon W_{11} = 0,$$

$$W_2 \doteq W_{20} + \varepsilon W_{21} = 0,$$

то для $\varkappa_0$ получим квадратное уравнение

$$\varkappa_0^2 + \left(\alpha_0 - \frac{ic}{\omega_0}\cos\Omega\Delta\right)\varkappa_0 + \frac{1}{\omega_0^2\Omega^2} - \frac{c^2}{4\omega_0^2} - \frac{\alpha_0 c}{2\omega_0}\sin\Omega\Delta - i\frac{\alpha_0 c}{2\omega_0}\cos\Omega\Delta = 0.$$

Согласно критерию Раута—Гурвица для уравнений с комплексными коэффициентами [2] получим следующее условие для неустойчивости решения:

$$\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_0 c}{\omega_0}\sin\Omega\Delta + \frac{c^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2\Omega^2} < 0. \tag{29}$$

Для определения границы интервала неустойчивости получим

$$(\alpha_0)_{1,2} = \frac{-c\sin\Omega\Delta \pm \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - c^2\cos^2\Omega\Delta}}{\omega_0}.$$

Используя равенство (17), получим приближенно интервал неустойчивости первого типа первого порядка:

$$2\Omega - \varepsilon\left(c\sin\Omega\Delta + \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - c^2\cos^2\Omega\Delta}\right) < \omega <$$

$$< 2\Omega + \varepsilon\left(-c\sin\Omega\Delta + \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - c^2\cos^2\Omega\Delta}\right). \tag{30}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Tondl, Metoda k určení intervalü nestability quasiharmonických systemu, Apl. mat., № 4, 1959.
2. A. Tondl, Stabilita pohybu nevyváženeho rotoru turbosoustrojt na pružnych padporách, zatizeneho kroutićími momenty, Strojnicky časopis SAV, № 4, 1961.
3. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, 1955.
4. С. Н. Шиманов, Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием, ПММ, т. 25, № 6, 1961.
5. С. Б. Норкин, О собственной частоте одного класса колебательных систем с запаздывающими силами, Тр. сем. по теор. диф. ур. с отклоняющ. аргум., Ун-т дружбы народов, 1, 1962.
6. В. П. Рубаник, О взаимодействии двух нелинейных колебательных систем при наличии малых запаздывающих сил связи, Тр. сем. по теор. диф. ур. с отклоняющ. аргум., 2, 1963.

Поступила 7. XII 1964 г.
Киев