О дифференцируемости функций сегмента

С. П. Пономарев

В настоящей заметке рассматривается вопрос о дифференцируемости аддитивной функции сегмента, обладающей односторонне ограниченными симметрическими производными числами. Доказываемая ниже теорема примыкает к результатам Варда [1] и Хинчина [2].

Обозначения: I — сегмент $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$; $\mu(I) = \dfrac{b-a}{d-c} + \dfrac{d-c}{b-a}$; $I(z)$ — сегмент с центром в точке $z = x + iy$; $|I|$ — площадь I, $\delta(I)$ — диаметр I.

Пусть $F(I)$ — функция сегмента, рассматриваемая в некотором сегменте $I_0 = (A \leqslant x \leqslant B,\ C \leqslant y \leqslant D)$. Назовем верхним симметрическим производным числом функции $F(I)$ в точке z_0 следующую величину

$$\Lambda_s F(z_0) = \sup_{m} \lim_{k\to\infty} Q_{m,k}(z_0), \tag{1}$$

где

$$Q_{m,k}(z_0) = \sup \frac{F(I(z_0))}{|I(z_0)|},$$

причем верхняя грань берется по всем $I(z_0) \subset I_0$ при условии $\delta(I(z_0)) < \dfrac{1}{k}$, $\mu(I(z_0)) \leqslant m$; k, m — натуральные числа и $m \geqslant 2$.

При указанных обозначениях имеет место следующая

Т е о р е м а. *Если функция $F(I)$ конечно-аддитивна, непрерывна в I_0 и $\Lambda_s F(z_0) < \infty$ на некотором множестве $E \subset I_0$, то $F(I)$ почти всюду на E дифференцируема в обычном смысле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что функция $\Lambda_s F(z)$ измерима. Действительно, функции $Q_{m,k}(z)$ измеримы, так как множество $\{z : Q_{m,k}(z) \leqslant N\}$ замкнуто в силу непрерывности и аддитивности $F(I)$. Отсюда, очевидно, следует измеримость $\Lambda_s F(z)$. Поэтому, не уменьшая общности, множество E в условии теоремы можно считать измеримым. Далее имеем

$$E = \bigcup_n E_n(z : z \in E, \Lambda_s F(z) < n), \tag{2}$$

и при всяком фиксированном $m > 4$

$$E_n = \bigcup_k E^m_{n,k}(z : z \in E_n, Q_{m,k}(z) < n). \tag{3}$$

Пусть z_0 — точка плотности множества $E^m_{n,k}$. Для всякого $0 < \theta < 1$ можно указать такое $\varrho_0 > 0$, что для всякого измеримого подмножества M из круга $|z - z_0| < \varrho \leqslant \varrho_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\operatorname{mes}(E^m_{n,k} \cap M)}{\operatorname{mes} M} \geqslant \frac{4}{5}, \tag{4}$$

лишь только $\operatorname{mes} M \geqslant \theta\pi\varrho^2$.

Рассмотрим сегменты $I_1 = (-a \leqslant x \leqslant a,\ -b \leqslant y \leqslant b)$, $I_2 = (-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,\ -\beta \leqslant y \leqslant \beta)$, $\alpha < a$, $\beta < b$. Пусть точка $(x', y') \in I_2$, тогда прямые $x = x'$, $y = y'$ разбивают I_1 на четыре сегмента I^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ с центрами в точках

$$\left(\frac{x'-a}{2}, \frac{y'-b}{2}\right), \quad \left(\frac{x'+a}{2}, \frac{y'-b}{2}\right), \quad \left(\frac{x'-a}{2}, \frac{y'+b}{2}\right),$$
$$\left(\frac{x'+a}{2}, \frac{y'+b}{2}\right), \tag{5}$$

причем последние являются, очевидно, вершинами сегмента с центром в точке $\left(\dfrac{x'}{2}, \dfrac{y'}{2}\right)$ и со сторонами длиной a и b.

Легко видеть, что если точка (x', y') перемещается в I_2, то центры (5) заполняют сегменты Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ с центрами соответственно в точках $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и со сторонами α и β; при этом для $\mu(I^i)$ имеет место оценка

$$\mu(I^i) \leqslant \frac{a+\alpha}{b-\beta} + \frac{b+\beta}{a-\alpha}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{6}$$

Положим $\alpha = \frac{a}{4}$, $\beta = \frac{b}{4}$, тогда $\mu(I^i) < 2\mu(I_1)$. Рассмотрим произвольный сегмент $I \subset I_0$, $z_0 \in I$. Пусть, кроме того, $\delta(I) < \frac{1}{k}$, $\mu(I) \leqslant \frac{m}{2}$, ζ — центр I и длина сторон I обозначены через $2a$, $2b$. Сегмент I будет играть роль рассмотренного выше сегмента I_1. Построим сегмент $I_2(\zeta)$ со сторонами длиной $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и произведем в I все приведенные ранее построения. Тогда, замечая, что $\mu(I)\,|I| = \delta^2(I)$, будем иметь

$$|\Delta_i| = \frac{ab}{16} \geqslant \frac{\delta^2(I)}{32m}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{7}$$

Если теперь взять $\theta = \frac{1}{32\pi m}$, то можно указать такое $\delta_0 > 0$, что при $\delta(I) < \delta_0$ будет выполняться (4). Пусть z_i — центр Δ_i; положив $h_i = z_1 - z_i$, имеем

$$\operatorname{mes} \bigcap_{i=1}^{4} [(E^m_{n,k} \cap \Delta_i) + h_i] \geqslant \frac{|\Delta_1|}{5}, \tag{8}$$

где $(E^m_{n,k} \cap \Delta_i) + h_i$ обозначает множество, полученное сдвигом множества $E^m_{n,k} \cap \Delta_i$ на h_i. Из (8) следует существование такой точки z', что $z'_i = z' - h_i \in E^m_{n,k} \cap \Delta_i$; вместе с тем z'_i суть вершины некоторого сегмента I' со сторонами длиной a и b. Пусть ζ' — центр сегмента I'. Замечая, что $2\zeta' \in I_2(\zeta)$, проведем через точку $2\zeta'$ прямые, параллельные осям координат; в результате получим разбиение I на четыре сегмента I^i, $\mu(I^i) \leqslant m$, центрами которых являются точки $z'_i \in E^m_{n,k}$. Пусть $\delta(I) < \min\left(\frac{1}{k}, \delta_0\right)$, $\mu(I) \leqslant \frac{m}{2}$, тогда $F(I) = \sum_{i=1}^{4} F(I^i) < n\,|I|$. Следовательно, в каждой точке плотности z множества $E^m_{n,k}$ $\limsup_{\nu\to\infty} \frac{F(I)}{|I|} \leqslant n$, где верхняя грань берется по всем $I \ni z$, $\mu(I) \leqslant \frac{m}{2}$, $\delta(I) < \frac{1}{\nu}$. В силу (3), это выполняется почти всюду на E_n, а так как m произвольно, то легко видеть, что обыкновенное (регулярное) верхнее производное число удовлетворяет неравенству $\overline{F}(z) \leqslant n$ почти всюду на E_n, и, наконец, из (2) будет следовать, что $\overline{F}(z) < \infty$ почти всюду на E. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему II.15 из [1], стр. 208.

В заключение отметим, что в случае евклидова пространства произвольного числа измерений все доказательство может быть проведено аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949
2. А. Я., Хинчин Fund. Math., 9, 1927, 212—219.

Поступила 25.XII 1964 г.
Киев