Определение нестационарных температурных полей бесконечной пластинки при заданной температуре на одной из кромок

Н. Н. Каркузашвили, И. Г. Козубовская

Предположим, что имеется бесконечная тонкая пластинка, с конечной шириной b. На одной из кромок пластинки имеется напайка, температура которой меняется определенным образом во времени; другая кромка пластинки теплоизолирована.

Требуется определить температурное поле в любой момент времени, предполагая, что источники тепла и теплообмен отсутствуют и задана начальная температура во всех точках пластинки.

Как известно из теории теплопроводности [1], распределение температуры $T(x, y, t)$ в любой точке (x, y) при данных ограничениях (отсутствие теплообмена и источников) в любой момент времени t описывается дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, равный $\frac{k}{\varrho c}$ (k — коэффициент теплопроводности, ϱ — плотность вещества, c — удельная теплоемкость).

Определим решение уравнения (1.1) в области $t > 0$, $0 < y < b$, $-\infty < x < \infty$, непрерывное вплоть до $y = 0$ и $y = b$ и удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b} = 0, \tag{1.2}$$

$$T(x, y, t)\,|_{y=0} = f(x, t) \qquad (t \geqslant 0,\ f(x, 0) = 0),$$

$$T(x, y, t)\,|_{t=0} = 0 \qquad (0 < y < b,\ -\infty < x < \infty). \tag{1.2'}$$

Считаем, что $f(x, t)$ при каждом $t \geqslant 0$ является финитной по x и гладкой по x и t функцией.

Рассмотрим, считая, что $T(x, y, t)$ — искомое решение, синус-преобразование Фурье в конечных пределах вида

$$\overline{T}_s\left(x, \frac{2n+1}{2}, t\right) = \int_0^b T(x, y, t) \sin\frac{(2n+1)}{2b}\pi y dy. \tag{1.3}$$

Легко доказать [2], что данная система $\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ортогональна и полная на отрезке $[0, b]$.

Обратное синус-преобразование Фурье в конечных пределах имеет вид [3, теорема 7]

$$T(x, y, t) = \frac{2}{b}\sum \overline{T}_s\left(x, \frac{2n+1}{2}, t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b}. \tag{1.4}$$

Применим к выражению (1.3) повторное интегральное преобразование Фурье в бесконечных пределах:

$$\overline{T}_s\left(\alpha, \frac{2n+1}{2}, t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^b T(x, y, t)\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b} e^{i\alpha x} dx dy. \tag{1.5}$$

Предполагаем, что температура $T(x, y, t)$ ведет себя при $|x| \to \infty$ таким образом, что последняя формула имеет смысл. Это ограничение является естественным с физической точки зрения.

Умножим уравнение (1.1) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}$ и проинтегрируем в рассматриваемой области по x от $-\infty$ до ∞ и по y от 0 до b:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} e^{i\alpha x} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dx dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} e^{i\alpha x} \times$$

$$\times \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dx dy = \frac{1}{\varkappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} \frac{\partial T}{\partial t} e^{i\alpha x} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dx dy. \quad (1.6)$$

Производя интегрирование каждого члена уравнения (1.6) по частям и применяя замену порядка интегрирования, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy \times$$

$$\times \left[\frac{\partial T}{\partial x} e^{i\alpha x}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\alpha \int_{0}^{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy \left| T e^{i\alpha x} \right|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} T(x, y, t) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dx dy. \quad (1.7)$$

Так как в силу исходных условий первое и второе выражение в правой части уравнения (1.7) равны нулю, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} T(x, y, t) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} e^{i\alpha x} dx dy. \quad (1.7')$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{0}^{b} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy = \frac{\partial T}{\partial y} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \Big]_{0}^{b} -$$

$$- \frac{(2n+1)\pi}{2b} T \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \Big]_{0}^{b} - \left(\frac{2n+1}{2b}\right)^2 \pi^2 \int_{0}^{b} T(x, y, t) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy =$$

$$= \frac{(2n+1)\pi}{2b} T(x, 0, t) - \left(\frac{2n+1}{2b}\right)^2 \pi^2 \int_{0}^{b} T(x, y, t) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy. \quad (1.8)$$

Умножим выражение (1.8) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}$ и, используя граничные условия (1.2), проинтегрируем его по x от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} e^{i\alpha x} dx dy = \frac{(2n+1)\pi}{2b} \bar{F}(\alpha, t) -$$

$$- \left(\frac{2n+1}{2b}\right)^2 \pi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{b} T(x, y, t) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} e^{i\alpha x} dx dy, \qquad (1.9)$$

где

$$\bar{F}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, 0, t) e^{i\alpha x} dx.$$

Учитывая преобразования (1.5), сложив (1.7′) и (1.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{d\bar{T}_{*}\left(\alpha, \frac{2n+1}{2}, t\right)}{dt} - \left(\alpha^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4b^2}\right) \bar{T}_{*}\left(\alpha, \frac{2n+1}{2}, t\right) =$$

$$= \frac{(2n+1)\pi}{2b} \bar{F}(\alpha, t). \qquad (1.10)$$

Решением выражения (1.10) является функция

$$\bar{T}\left(\alpha, \frac{2n+1}{2}, t\right) = Ae^{\lambda t} + \frac{(2n+1)\pi}{\lambda 2b} e^{\lambda t} \int_{0}^{t} e^{-\lambda\tau} \bar{F}(\alpha, t) d\tau, \qquad (1.11)$$

где $\lambda = \varkappa\left(\alpha^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4b^2}\right)$.

Учитывая условие (1.2′), получим, что $A = 0$. Тогда решение (1.11) запишется в виде

$$\bar{T}\left(\alpha, \frac{2n+1}{2}, t\right) = \frac{\varkappa(2n+1)\pi}{2b} \int_{0}^{t} e^{-\lambda(\tau - t)} \bar{F}(\alpha, \tau) d\tau$$

Используя обратные преобразования Фурье (1.4) и (1.5), получим

$$T(x, y, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\varkappa\left[\alpha^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4b^2}\right]} \times$$

$$\times \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} e^{-i\alpha x} \int_{0}^{t} e^{-\lambda(\tau - t)} F(\alpha, \tau) d\tau d\alpha.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Мелан и Г. Паркус Теплоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями, Физматгиз, М., 1958.
2. Г. П. Толстов, Ряды Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
3. И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955.

Поступила 14.IV 1965 г.
Киев