Обобщение одной теоремы С. Н. Бернштейна

В. Ф. Кибец, О. Г. Миклухин

В 1941 г. С. Н. Бернштейном [1] была доказана следующая теорема: для того чтобы сумма $\xi_1=\xi+\eta$ и разность $\eta_1=\xi-\eta$ двух независимых случайных величин ξ и η были независимы, необходимо и достаточно, чтобы сами эти величины η и ξ имели нормальный закон распределения.

Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие интегрируемые по Риману плотности распределения. Для того чтобы $\xi_1=\xi+\eta \pmod{2\pi}$ и $\eta_1=\xi-\eta \pmod{2\pi}$ были также независимы, необходимо и достаточно, чтобы $\xi \pmod{2\pi}$ и $\eta \pmod{2\pi}$ были равномерно распределены на отрезке* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Необходимость. Так как сумма и разность величин ξ_1 и η_1 рассматриваются по модулю 2π, то, не нарушая общности, можем считать, что ξ и η также принимают значения между 0 и 2π. Это предположение влечет за собой выполнение равенства:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 1, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$—плотности распределения случайных величин ξ и η соответственно.

Продолжим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ периодически на всю прямую.

Так как $e^{-in\xi_1}=e^{-in(\xi+\eta)}$ и $e^{-im\eta_1}=e^{-im(\xi-\eta)}$, то в силу независимости ξ_1 и η_1, ξ и η получаем

$$\begin{aligned} Me^{-i(n\xi_1+m\eta_1)} &= Me^{-in\xi_1}\cdot Me^{-im\eta_1} = \\ &= Me^{-in\xi}\cdot Me^{-in\eta}\cdot Me^{-im\xi}\cdot Me^{-im\eta}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$Me^{-i(n\xi_1+m\eta_1)} = Me^{-i[(n+m)\xi+(n-m)\eta)]} = Me^{-i(n+m)\xi}\cdot Me^{-i(n-m)\eta}. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{2\pi}Me^{-ik\xi}=C_k \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi}Me^{-ir\eta}=dr.$$

Сравнивая равенства (2) и (3) получим:

$$c_n\cdot d_n\cdot c_m\cdot d_{-m} = c_{n+m}\cdot d_{n-m}. \tag{4}$$

Умножив обе части соотношения (4) на $e^{i(nu+mv)}$, просуммировав по n и m и заметив, что $\{c_k\}$ и $\{d_r\}$ являются коэффициентами Фурье функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно, получим

$$\int_0^{2\pi} f(u-t)\cdot\varphi(t)\,dt \times \int_0^{2\pi} f(v+t)\cdot\varphi(t)\,dt = f\left(\frac{u-v}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right). \tag{5}$$

Из равенства (5) вытекает, что $f(x)$ и $\varphi(x)$—тождественные постоянные. Действительно, пусть

$$\int_0^{2\pi} f(u-t)\cdot\varphi(t)\,dt = g(u),$$

$$\int_0^{2\pi} f(v+t)\,\varphi(t)\,dt = g_1(v).$$

Очевидно, что $g(u)$ и $g_1(v)$ периодичны. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют период T. Рассмотрев выражения для

$$g(u)\cdot g_1(v),\quad g(u+T)\cdot g_1(v),\quad g\left(u+\frac{T}{2}\right)\cdot g_1\left(v+\frac{T}{2}\right),$$

$$g\left(u+\frac{T}{2}\right)\cdot g_1\left(v-\frac{T}{2}\right)$$

и используя свойства свертки, получим

$$f(x) = f\left(x+\frac{T}{2}\right) \text{ и } \varphi(x) = \varphi\left(x+\frac{T}{2}\right),$$

т. е. функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют период $\frac{T}{2}$, а следовательно, и сколь угодно малый период.

Кроме того, эти функции интегрируемы по Риману, следовательно, $f(x)$ и $\varphi(x)$—тождественные постоянные, а из равенства (1) вытекает, что $f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}$.

Необходимость доказана.

Достаточность доказывается непосредственной проверкой равенства (2) для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, равных $\frac{1}{2\pi}$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса, Тр. Ленинградского политехн. ин-та, № 3, 1941, 21—22.

Поступила 24.XII 1965 г.
Киев