О самосопряженности полевых операторов и интегральных представлениях функционалов типа Уайтмана

Ю. М. Березанский

Работа посвящена получению более тонких критериев самосопряженности полевых операторов, чем известные ранее*, и установлению интегральных представлений положительно определенных (п. о.) ядер типа функционалов Уайтмана [1]; при этом мы пользуемся схемой Борхерса [2] построения алгебры полевых операторов по функционалу Уайтмана. В математическом отношении вопрос сводится к изучению спектрального анализа своеобразных операторов сдвига, обобщающих обычный сдвиг $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \to \to (0, u_0, u_1, \ldots)$, в пространстве, порожденном п. о. ядром. Это изучение проводится при помощи общей теории, развитой автором в [3—5]. Отметим, что в этой работе мы исследуем те выводы, которые можно получить без предположения о справедливости аксиом лоренцовой инвариантности, спектральности и локальной коммутативности в определении функционала Уайтмана; детализация результатов при выполнении этих аксиом будет рассмотрена в другой статье.

Из более ранних работ, посвященных доказательству самосопряженности полевых операторов, отметим статьи Борхерса и Циммермана [6] и В. П. Гачка [7, 8]. В [6] требуется аналитичность вакуумного состояния, в [7] при помощи техники А. Г. Костюченко и Б. С. Митягина доказывается самосопряженность при условии, что числа p_{nq}, регулирующие рост координат функционала Уайтмана, имеют вид $(nq)^n$; отметим, что в [7] к исследуемой задаче впервые применена техника проблемы моментов. Знакомство со статьей [7] заинтересовало автора рассматриваемой проблематикой и послужило толчком к написанию этой работы.

Представилось удобным использовать более абстрактную, чем это обычно принято, схему, заменяя последовательности функций $(u_0, u_1(x_1), u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2, x_3), \ldots)$ ортогональной суммой тензорных произведений $C_1 \oplus \mathfrak{H} \oplus (\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}) \oplus (\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}) \oplus \ldots$. В п. 1° — 3° мы устанавливаем результаты в терминах теории пространств с позитивной и негативной нормами (необходимые сведения из теории этих пространств см., например, в [5], гл. 1). Затем в п. 4° переходим к рассмотрениям в линейных топологических пространствах.

1°. Пусть C_1 — одномерное комплексное пространство, а $\mathfrak{H}_0$ — некоторое полное гильбертово пространство. Тензорное произведение $\mathfrak{H}_0 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_0$

* Как сообщил автору В. П. Гачок, им недавно также получены аналогичные более тонкие критерии; при этом использовался подход, подобный примененному при доказательстве теоремы 1.

j экземпляров пространства $\mathfrak{H}_0$ обозначим $\otimes \mathfrak{H}_0^j$ $(\otimes \mathfrak{H}_0^0 = C_1)$ и построим ортогональную сумму

$$H_0 = C_1 \oplus \mathfrak{H}_0 \oplus (\mathfrak{H}_0 \otimes \mathfrak{H}_0) \oplus (\mathfrak{H}_0 \otimes \mathfrak{H}_0 \otimes \mathfrak{H}_0) \oplus \ldots = \oplus \sum_{j=0}^{\infty} (\otimes \mathfrak{H}_0^j).$$

Сконструируем позитивное относительно H_0 пространство H_+. Для этого зафиксируем некоторое позитивное относительно $\mathfrak{H}_0$ пространство $\mathfrak{H}_+$ и последовательность чисел $p_0, p_1, \ldots \geqslant 1$ и рассмотрим последовательности $u = (u_0, u_1, \ldots)$ $(u_j \in \otimes \mathfrak{H}_+^j = \underbrace{\mathfrak{H}_+ \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_+}_{j})$ такие, что $\sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|^2_{\otimes \mathfrak{H}_+^j} p_j < \infty$; после введения скалярного произведения

$$(u, v)_+ = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, v_j)_{\otimes \mathfrak{H}_+^j} p_j \tag{1}$$

получим полное гильбертово пространство H_+ (при $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{H}_0$ и $p_0 = p_1 = \ldots 1$ $H_+ = H_0$). Очевидно, $H_+ \subseteq H_0$ и H_+ можно рассматривать как позитивное пространство относительно H_0. Соответствующее негативное пространство H_- образуется точно так же, как и H_+, только $\mathfrak{H}_+$ и числа p_j нужно заменить на $\mathfrak{H}_-$ и p_j^{-1} ($\mathfrak{H}_-$ — негативное пространство относительно $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_+$). Скалярные произведения и нормы в пространствах H_+, H_0 и H_- обозначаем соответственно индексами $+$, 0, $-$.

В дальнейшем будем предполагать, что в каждом из пространств $\otimes \mathfrak{H}_0^j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ введена инволюция $f \to \bar{f}^j$, которая распространяется до инволюции в пространствах цепочки $\otimes \mathfrak{H}_-^j \supseteq \otimes \mathfrak{H}_0^j \supseteq \otimes \mathfrak{H}_+^j$. Тогда $\overline{\ \ } = \overline{\ \ } \oplus \overline{\ \ }1 \oplus \overline{\ \ }2 \oplus \ldots$ является инволюцией в H_0, распространяющейся на пространства цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Ниже в обозначении $\overline{\ \ }j$ индекс j будет опускаться.

Рассмотрим обобщенное п. о. ядро K относительно цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$, т. е. элемент из $H_- \otimes H_-$, удовлетворяющий условию $(K, u \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} \geqslant 0$ $(u \in H_+)$. По нему введем в H_+ квазискалярное произведение $\langle u, v \rangle = (K, v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0}$. После отождествления с нулем тех u, для которых $\langle u, u \rangle = 0$, и пополнения получим гильбертово пространство H_K.

Для простоты всюду в дальнейшем будем считать, что из $\langle u, u \rangle = 0$ следует $u = 0$ и отождествление излишне; изменения рассуждений в общем случае аналогичны описанным в [5], п. 4, § 1, гл. VIII. Ясно, что $H_K \supseteq H_+$.

Введем аналог полевого оператора B. Зафиксируем $h \in \mathfrak{H}_+$, вещественное относительно инволюции (т. е. $\bar{h} = h$), и положим на финитных последовательностях $u = (u_0, u_1, \ldots)$ $(u_j \in \otimes \mathfrak{H}_+^j)$, составляющих область определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B,

$$Bu = B(u_0, u_1, \ldots) = (0, u_0 \otimes h, u_1 \otimes h, \ldots). \tag{2}$$

Теорема 1. *Предположим, что оператор B эрмитов в скалярном произведении $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если класс $C(\sqrt{p_n})$ * квазианалитический, то замыкание B самосопряжено в H_K.*

---

* Напомним, что под классом $C(m_n)$ понимается линейная совокупность всех функций $f(t) \in C^\infty([a, b])$, для каждой из которых справедливы оценки $\left| \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right)(t) \right| \leqslant K_f^n m_n$ $(t \in [a, b];\ n = 1, 2, \ldots)$, где K_f — зависящая от f константа.

Доказательство. Будем пользоваться следующим фактом ([5], теоремы 2.3 и 2.5, гл. VIII). Рассмотрим в пространстве H_+ два уравнения

$$\frac{du}{dt} \pm (iB)^* u = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Если имеет место единственность слабых решений задачи Коши для обоих этих уравнений, то замыкание B самосопряжено в H_K (поясним, что благодаря вещественности h оператор B имеет равные дефектные числа). При этом под слабым решением понимается вектор-функция $u(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в пространстве H_+, слабо дифференцируемая и удовлетворяющая соотношению

$$\frac{d}{dt}(u(t), w)_+ \pm (u(t), iBw)_+ = 0 \quad (w \in \mathfrak{D}(B),\ 0 \leqslant t < \infty). \tag{3}$$

Обозначим $\pm i = \zeta$, тогда (3) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}(u(t), w)_+ - (u(t), \bar{\zeta} Bw)_+ = 0 \qquad (w \in \mathfrak{D}(B),\ 0 \leqslant t \leqslant \infty). \tag{4}$$

В дальнейшем будем проводить рассуждения, подобные примененным при доказательстве леммы 5.3, гл. VIII, из [5]. Положим в (4) $w = (0, \ldots, 0, w_k, 0, \ldots)$, где $w_k \in \otimes \mathfrak{H}_+^k$ стоит на k-м месте. Тогда $Bw = (0, \ldots, 0, w_k \otimes h, 0, \ldots)$ ($w_k \otimes h$ стоит на $k+1$-м месте); подставляя в (4) и пользуясь выражением (1) для $(\cdot, \cdot)_+$, получим:

$$\frac{d}{dt}(u_k(t), w_k)_{\otimes \mathfrak{H}_+^k} p_k - \zeta (u_{k+1}(t), w_k \otimes h)_{\otimes \mathfrak{H}_+^{k+1}} p_{k+1} = 0.$$

Обозначая $p_k u_k(t) = v_k(t)$, найдем отсюда:

$$\frac{d}{dt}(v_k(t), w_k)_{\otimes \mathfrak{H}_+^k} - \zeta (v_{k+1}(t), w_k \otimes h)_{\otimes \mathfrak{H}_+^{k+1}} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots; 0 \leqslant t < \infty). \tag{5}$$

Зафиксируем $k = N = 0, 1, \ldots$, из (5) получим $(v_{N+1}(t), w_N \otimes h)_{\otimes \mathfrak{H}_+^{N+1}} = \frac{1}{\zeta} \frac{d}{dt}(v_N(t), w_N)_{\otimes \mathfrak{H}_+^N}$. Дифференцируя это равенство по t и пользуясь (5) при $k = N+1$ и $w_{N+1} = w_N \otimes h$, найдем;

$$(v_{N+2}(t), w_N \otimes h \otimes h)_{\otimes \mathfrak{H}_+^{N+2}} = \frac{1}{\zeta} \frac{d}{dt}(v_{N+1}(t), w_N \otimes h)_{\otimes \mathfrak{H}_+^{N+1}} = \frac{1}{\zeta^2} \frac{d^2}{dt^2}(v_N(t), w_N)_{\otimes \mathfrak{H}_+^N}.$$

Опять дифференцируя последнее равенство и учитывая (5) при $k = N+2$ и $w_{N+2} = w_N \otimes h \otimes h$, получим:

$$(v_{N+3}(t), w_N \otimes h \otimes h \otimes h)_{\otimes \mathfrak{H}_+^{N+3}} = \frac{1}{\zeta^3} \frac{d^3}{dt^3}(v_N(t), w_N)_{\otimes \mathfrak{H}_+^N}.$$

Продолжая процесс, получим соотношение

$$(v_{N+j}(t), w_N \underbrace{\otimes h \otimes \ldots \otimes h}_{j})_{\otimes \mathfrak{H}_+^{N+j}} = \frac{1}{\zeta^j} \frac{d^j}{dt^j}(v_N(t), w_N)_{\otimes \mathfrak{H}_+^N},$$

или

$$\frac{d^j}{dt^j}(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N} = \zeta^j \frac{p_{N+j}}{p_N}(u_{N+j}(t), w_N \otimes \underbrace{h \otimes \ldots \otimes h}_{j})_{\otimes\mathfrak{H}_+^{N+j}}$$

$$(j = 0, 1, \ldots; 0 \leqslant t < \infty). \tag{6}$$

Значения вектор-функции $u(t) = (u_0(t), u_1(t), \ldots)$ принадлежат пространству H_+, причем она слабо дифференцируема, а значит и слабо непрерывна. Поэтому ее значения на каждом сегменте $[0, T]$ $(0 < T < \infty)$ ограничены: $\| u(t) \|_+^2 \leqslant C_T < \infty$ $(t \in [0, T])$. При помощи (6), (1) и этой оценки получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\| h \|_{\mathfrak{H}_+}^{2j} p_{N+j}} \left| \frac{d^j}{dt^j}(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N} \right|^2 = \frac{1}{p_N^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\| h \|_{\mathfrak{H}_+}^{2j} p_{N+j}} \times$$

$$\times | \zeta^j p_{N+j}(u_{N+j}(t), w_N \otimes h \otimes \ldots \otimes h)_{\otimes\mathfrak{H}_+^{N+j}}|^2 \leqslant \frac{1}{p_N^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{N+j}}{\| h \|_{\mathfrak{H}_+}^{2j}} \times$$

$$\times \| u_{N+j}(t) \|_{\otimes\mathfrak{H}_+^{N+j}}^2 \| w_N \otimes h \otimes \ldots \otimes h \|_{\otimes\mathfrak{H}_+^{N+j}}^2 \leqslant \frac{\| w_N \|_{\otimes\mathfrak{H}_+^N}^2}{p_N^2} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \| u_{N+j}(t) \|_{\otimes\mathfrak{H}_+^{N+j}}^2 p_{N+j} \leqslant C \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j(t) \|_{\otimes\mathfrak{H}_+^j}^2 p_j = C \| u(t) \|_+^2 \leqslant CC_T$$

$$(t \in [0, T]).$$

Отсюда заключаем, что $\left| \frac{d^j}{dt^j}(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N} \right| \leqslant \sqrt{CC_T} \| h \|_{\mathfrak{H}_+}^j \sqrt{p_{N+j}}$ $(t \in [0, T]$; $j = 0, 1, \ldots)$, т. е. функция $(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N}$ принадлежит классу $C(\sqrt{p_{N+n}})$.

Пусть теперь слабое решение $u(t)$ таково, что $u(0) = (u_0(0), u_1(0), \ldots) = 0$. Согласно (6), $\left. \frac{d^j}{dt^j}(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N} \right|_{t=0} = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Функция $(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N}$ входит в класс $C(\sqrt{p_{N+n}})$, который, как нетрудно видеть, будет квазианалитическим благодаря квазианалитичности $C(\sqrt{p_n})$. Поэтому $(u_N(t), w_N)_{\otimes\mathfrak{H}_+^N} = 0$; так как $w_N \in \otimes\mathfrak{H}_+^N$ произвольно, то $u_N(t) = 0$ $(t \in [0, T])$. Благодаря произвольности N заключаем, что $u(t) = (u_0(t), u_1(t), \ldots) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Иными словами, мы доказали требуемую единственность слабых решений.

Теорема доказана.

Беря те или иные критерии квазианалитичности, получим более конкретные условия самосопряженности. Так, например, *замыкание B будет самосопряженным в H_K, если числа $p_0, p_1, \ldots$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{p_n}} = \infty.$$

2°. По предположению оператор B эрмитов в скалярном произведении $\langle\cdot,\cdot\rangle$, построенном по ядру K. Это, как известно, дает возможность получить интегральное представление K по соответствующим собственным функциям. Введем требуемые операторы и получим это представление.

В дальнейшем будем считать все фигурирующие пространства сепарабельными.

По-прежнему $h \in \mathfrak{H}_0$ фиксировано. Рассмотрим непрерывный оператор P_n, действующий из всего $\otimes \mathfrak{H}_0^n$ в $\otimes \mathfrak{H}_0^{n+1}$ по закону: $P_n f = f \otimes h$ ($f \in \otimes \mathfrak{H}_0^n$); иными словами $P_n = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes P_0$ (здесь фигурирует n единичных операторов 1). Сопряженный оператор $P_n^* = Q_n$ действует непрерывно из всего $\otimes \mathfrak{H}_0^{n+1}$ в $\otimes \mathfrak{H}_0^n$ и равен $1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes Q_0$. Оператор Q_0 легко подсчитать:

$$(f_0, Q_0 g_1)_{C_1} = (P_0 f_0, g_1)_{\mathfrak{H}_0} = (f_0 \otimes h, g_1)_{\mathfrak{H}_0} = (f_0 h, g_1)_{\mathfrak{H}_0} =$$
$$= (f_0, (g_1, h)_{\mathfrak{H}_0})_{C_1} \quad (f_0 \in C_1,\ g_1 \in \mathfrak{H}_0);$$

отсюда $Q_0 g_1 = (g_1, h)_{\mathfrak{H}_0}$. Таким образом, на элементах из $\otimes \mathfrak{H}_0^{n+1}$ вида $f_1 \otimes \ldots \otimes f_{n+1}$ оператор Q_n действует следующим образом:

$$Q_n (f_1 \otimes \ldots \otimes f_{n+1}) = (f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(f_{n+1}, h)_{\mathfrak{H}_0}. \tag{7}$$

Рассмотрим в пространстве H_0 оператор A, определенный на финитных последовательностях $u = (u_0, u_1, \ldots)$ равенством

$$Au = A(u_0, u_1, \ldots) = (Q_0 u_1, Q_1 u_2 \ldots). \tag{8}$$

Сопряженный (в H_0) оператор A^* имеет вид

$$A^* v = A^*(v_0, v_1, \ldots) = (0, P_0 v_0, P_1 v_1, \ldots) = (0, v_0 \otimes h, v_1 \otimes h, \ldots);$$

его область определения $\mathfrak{D}(A^*)$ состоит из всех тех $(v_0, v_1, \ldots) \in H_0$, для которых $(0, v_0 \otimes h, v_1 \otimes h, \ldots) \in H_0$. Действительно, пусть $v = (v_0, v_1, \ldots) \in H_0$ и найдется $v^* = (v_0^*, v_1^*, \ldots) \in H_0$ такое, что $(Au, v)_0 = (u, v^*)_0$ ($u \in \mathfrak{D}(A)$), т. е. для финитных u

$$\sum_{j=0}^{\infty} (Q_j u_{j+1}, v_j)_{\otimes \mathfrak{H}_0^j} = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, v_j^*)_{\otimes \mathfrak{H}_0^j}.$$

Полагая здесь при $j \neq k$ $u_j = 0$, получим $(Q_{k-1} u_k, v_{k-1})_{\otimes \mathfrak{H}_0^{k-1}} = (u_k, v_k^*)_{\otimes \mathfrak{H}_0^k}$, откуда $v_k^* = P_{k-1} v_{k-1} = v_{k-1} \otimes h$ ($k = 1, 2, \ldots$); ясно также, что нужно считать $v_0^* = 0$.

Итак, $v \in \mathfrak{D}(A^*)$ имеет указанный вид; столь же просто проверяется и обратное включение.

Видим, что полевой оператор B является сужением A^* (при $h \in \mathfrak{H}_+$) на финитные последовательности $u = (u_0, u_1, \ldots)$, где $u_j \in \otimes \mathfrak{H}_+^j$ ($j = 0, 1, \ldots$). Следовательно, можно сказать, что это сужение A^* эрмитово относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$; иными словами, A и K $*$-коммутируют. Таким образом (см. [5], гл. VIII, § 1), можно строить разложение K на элементарные относительно оператора A п. о. ядра. С этой целью выберем в $\mathfrak{H}_+$ некоторое позитивное пространство $\mathfrak{H}_{++}$, причем выберем его так, чтобы вложение $\mathfrak{H}_{++} \to \mathfrak{H}_+$ было квазиядерным (т. е. оператор вложения — оператор Гильберта — Шмидта).

Пусть последовательность $s_0, s_1, \ldots \geqslant 1$ такова, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|O|^{2j} p_j}{s_j} < \infty, \tag{9}$$

где $|O|$ — гильбертова норма оператора O вложения пространства $\mathfrak{H}_{++}$ в $\mathfrak{H}_+$.

Построим гильбертово пространство H_{++} по $\mathfrak{H}_{++}$ и s_j точно так же, как H_+ строилось по $\mathfrak{H}_+$ и p_j; $H_{++} \subset H_+$. Нетрудно видеть, что вложение $H_{++} \to H_+$ квазиядерно. Обозначим H_{--} негативное пространство относительно нулевого H_0 и позитивного H_{++}.

Будем предполагать, что $h \in \mathfrak{H}_{++}$. Теперь имеется следующая ситуация. Построена цепочка $H_{--} \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq H_{++}$ гильбертовых пространств с инволюцией; вложение $H_{++} \to H_+$ квазиядерно. В пространстве H_0 действует оператор A с плотной областью определения, причем существует инвариантное относительно инволюции — линейное множество $Д$, плотное в H_{++} и такое, что $A^* Д \subseteq H_{++}$ (в качестве $Д$ можно выбрать совокупность всех финитных последовательностей $u = (u_0, u_1, \ldots)$ таких, что $u_j \in \otimes \mathfrak{H}'_{++}$ $(j = 0, 1, \ldots)$). Сужение A^* на $Д$ эрмитово в скалярном произведении $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Применяя теорему 1. 1, гл. VIII, [5] и теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Справедливо представление ядра K через некоторое семейство элементарных п. о. ядер* $\Omega_\lambda \in H_{--} \otimes H_{--}$ $(\| \Omega_\lambda \|_{H_{--} \otimes H_{--}} \leqslant C < \infty, \lambda \in (-\infty, \infty))$:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda d\varrho(\lambda), \tag{10}$$

где $d\varrho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера, а интеграл сходится по норме пространства $H_{--} \otimes H_{--}$. Элементарность ядра Ω_λ означает выполнение соотношений

$$(\Omega_\lambda, ((B - \lambda 1) v) \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} = 0, \qquad (\Omega_\lambda, v \otimes \overline{((B - \lambda 1) u)})_{H_0 \otimes H_0} = 0 \tag{11}$$

$$(u, v \in Д),$$

т. е., грубо говоря, Ω_λ «по каждому из переменных является собственным вектором оператора A с собственным значением λ».

Если $h = \bar{h}$ и класс $C(\sqrt{p_n})$ квазианалитический, то дифференциал $\Omega_\lambda d_\varrho(\lambda)$ в представлении (10) определяется однозначно.

Запишем соотношения этой теоремы более определенно, воспользовавшись «координатным» представлением ядер. Прежде всего заметим, что ядро K как элемент из $H_- \otimes H_-$ может быть представлено в виде матрицы $K = (K_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$, где $K_{jk} \in \otimes \mathfrak{H}_-^{k+j}$, причем

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} \| K_{jk} \|^2_{\otimes \mathfrak{H}_-^{k+j}} \frac{1}{p_j p_k} < \infty. \tag{12}$$

П. о. этого ядра означает выполнение соотношения

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} (K_{jk}, u_k \otimes \bar{u}_j)_{\otimes \mathfrak{H}_0^{k+j}} \geqslant 0 \qquad (u = (u_0, u_1, \ldots) \in H_+). \tag{13}$$

При построении ядра Ω_λ фигурировало пространство $\mathfrak{H}_{++}$, поэтому (12) и (13) сейчас будут выглядеть так. Обозначим $\mathfrak{H}_{--}$ негативное пространство относительно нулевого $\mathfrak{H}_0$ и позитивного $\mathfrak{H}_{++}$. Тогда $\Omega_\lambda = (\Omega_{\lambda;jk})_{j,k=0}^{\infty}$, где $\Omega_{\lambda;jk} \in \otimes \mathfrak{H}_{--}^{k+j}$, причем

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} \| \Omega_{\lambda;jk} \|^2_{\otimes \mathfrak{H}_{--}^{k+j}} \frac{1}{s_j s_k} < \infty, \qquad \sum_{j,k=0}^{\infty} (\Omega_{\lambda;jk}, u_k \otimes \bar{u}_j)_{\otimes \mathfrak{H}_0^{k+j}} \geqslant 0 \tag{14}$$

$$(u = (u_0, u_1, \ldots) \in H_{++}).$$

Для записи (11) заметим, что оператор $Q_n = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n} \otimes Q_0$, действующий из всего $\otimes \mathfrak{H}_0^{n+1}$ в $\otimes \mathfrak{H}_0^n$, можно расширить до оператора $Q_n = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n} \otimes Q_0$ (сохраняем прежние обозначения), действующего из всего $\otimes \mathfrak{H}_{--}^{n+1}$ в $\otimes \mathfrak{H}_{--}^n$, если положить $Q_0 \alpha = (\alpha, h)_{\mathfrak{H}_0}$ для $\alpha \in \mathfrak{H}_{--}$ (напомним, что в п. 2° предполагается включение $h \in \mathfrak{H}_{++}$). Теперь легко понять, что *определение элементарности* (11) *эквивалентно равенствам*

$$(\underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k} \otimes Q_0 \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{j})\, \Omega_{\lambda;jk+1} = \lambda \Omega_{\lambda;jk},$$

$$(\underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k} \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{j} \otimes Q_0)\, \Omega_{\lambda;j+1k} = \lambda \Omega_{\lambda;jk} \qquad (j,\ k = 0,\ 1, \ldots) \tag{15}$$

(заметим, что благодаря эрмитовости ядра Ω_λ первое из равенств (15) (или (11)) вытекает из второго и наоборот).

Систему уравнений (15) относительно $\Omega_{\lambda;jk}$ можно разрешить. Подставляя это решение в (10), получим более явные представления для ядра K. На вопросах, связанных с решением системы (15), мы остановимся в другой работе.

3°. Введем аналог функционала Уайтмана и получим интегральное представление таких функционалов. Рассмотрим цепочку $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Последовательность

$$W = (W_0, W_1, \ldots) \qquad (W_j \in \mathfrak{H}_-^j;\ j = 0,\ 1, \ldots)$$

будем называть функционалом типа Уайтмана, если матрица $(K_{jk})_{j,k=0}^{\infty} = (W_{j+k})_{j,k=0}^{\infty}$ порождает п. о. ядро из $H_- \otimes H_-$ (т. е. для нее выполняются требования (12) и (13)). При этом предполагается, что инволюция $-j = -$ на пространствах $\otimes \mathfrak{H}_0^j$ обладает тем свойством, что $\overline{f \otimes g} = \bar{g} \otimes \bar{f}$ ($f \in \otimes \mathfrak{H}_0^j$, $g \in \otimes \mathfrak{H}_0^k$; j, $k = 0$, $1, \ldots$). (Пример такой инволюции: если $\otimes \mathfrak{H}_0^j$ — пространство комплекснозначных функций переменных $x_1, \ldots, x_j \in (-\infty, \infty)$, то инволюция задается переходом $f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j) \to \overline{f(x_j, x_{j-1}, \ldots, x_2, x_1)}$, где черта обозначает обычное комплексное сопряжение).

Нетрудно видеть, что *п. о. ядро, порожденное функционалом типа Уайтмана, будет *- коммутировать с оператором A, построенным по любому $h = \bar{h} \in \mathfrak{H}_+$*. Действительно, соответствующее скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ согласно (13) имеет вид

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} (W_{j+k}, v_k \otimes \bar{u}_j)_{\otimes \mathfrak{H}_0^{k+j}} (u, v \in H_+). \tag{16}$$

Нам нужно проверить равенство $\langle A^*u, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$, где $u, v \in H_+$ финитны. Имеем

$$\langle A^*u, v\rangle = \langle (0, u_0 \otimes h, u_1 \otimes h, \ldots), (v_0, v_1, \ldots)\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (W_{j+k} v_k \otimes \overline{u_{j-1} \otimes h})_{\otimes \mathfrak{H}_0^{k+j}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (W_{l+k+1}, v_k \otimes \bar{h} \otimes \bar{u}_l)_{\otimes \mathfrak{H}_0^{k+1+l}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (W_{l+m}, v_{m-1} \otimes h \otimes \bar{u}_l)_{\otimes \mathfrak{H}_0^{l+m}} = \langle u, A^*v\rangle,$$

что и требовалось.

Таким образом, к функционалу типа Уайтмана применима теорема 2 и справедливо представление (10). Записывая это представление «покоординатно» получим:

$$W_{j+k} = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\lambda;jk} d\varrho(\lambda) \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{17}$$

Итак, *для функционала Уайтмана по любому $h = \bar{h} \in \mathfrak{H}_{++}$ можно построить семейство элементарных п. о. ядер $\Omega_\lambda = (\Omega_{\lambda;jk})_{j,k=0}^{\infty}$ и неотрицательную конечную меру $d\varrho(\lambda)$ такие, что будет иметь место представление* (17). *Если класс $(C\sqrt{p_n})$ квазианалитический, то $\Omega_{\lambda;jk} d\varrho(\lambda)$ определяется однозначно по W, а замыкание полевого оператора B в соответствующем пространстве H_K самосопряжено* (для последнего, ясно, достаточно считать $h = \bar{h} \in \mathfrak{H}_+$).

Пусть $W = (W_0, W_1, \ldots)$ — некоторый функционал типа Уайтмана, $h = \bar{h} \in \mathfrak{H}_+$. Легко видеть [1], что последовательность

$$s_j = (W_j, \underbrace{h \otimes \ldots \otimes h}_{j})_{\otimes \mathfrak{H}_0^j} \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

моментная, т. е. для любой финитной последовательности комплексных чисел $(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ имеем: $\sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} \xi_k \bar{\xi}_j \geqslant 0$. Для доказательства нужно в (16) положить $u = v = (\xi_0, \xi_1 h, \xi_2 h \otimes h, \xi_3 h \otimes h \otimes h, \ldots)$ и воспользоваться тем, что $\langle u, u\rangle \geqslant 0$. Воспользовавшись известной теоремой из проблемы моментов, заключаем, что имеет место представление

$$s_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j d\varrho(\lambda) \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

с неотрицательной конечной мерой $d\varrho(\lambda)$.

4°. До сих пор мы строили теорию в терминах гильбертовых пространств. Выведем теперь отсюда соответствующие факты в обычно принятых терминах линейных топологических (точнее, счетно-гильбертовых) пространств.

Прежде всего построим пространство вектор-состояний $\hat{H}$. Для этого рассмотрим счетно-гильбертово пространство $\hat{\mathfrak{H}} = \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathfrak{H}_q$, где $\mathfrak{H}_q$ — составляющие гильбертовы пространства; без ограничения общности можно считать, что нормы упорядочены: $\|f\|_{\mathfrak{H}_0} \leqslant \|f\|_{\mathfrak{H}_1} \leqslant \ldots (f \in \hat{\mathfrak{H}})$. В качестве $\hat{H}$ примем совокупность всех последовательностей $u = (u_0, u_1, \ldots)$, где $u_j \in \otimes \hat{\mathfrak{H}}^j$ $(j =$

$=0, 1, \ldots; \otimes \mathfrak{H}^0 = C_1$), для каждой из которых конечна любая норма

$$\| u \|_q^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|^2_{\otimes \mathfrak{H}_q^j} p_{jq} \qquad (q = 0, 1, \ldots). \tag{18}$$

Здесь при каждом q $(p_{0q}, p_{1q}, \ldots)$ — заданная последовательность чисел $\geqslant 1$; ясно, что достаточно ограничиться случаем, когда $p_{j0} \leqslant p_{j1} \leqslant \ldots$ $(j = 0, 1, \ldots)$. В этом случае нормы (18) упорядочены: $\| u \|_0 \leqslant \| u \|_1 \leqslant \leqslant \ldots (u \in \hat{H})$. Итак, $\hat{H}$ — счетно-гильбертово пространство, которое определяется как пересечение гильбертовых H_q— пополнений $\hat{H}$ по норме (18) $(q = 0, 1, \ldots)$. Как известно, $\hat{H}' = \bigcup_{q=0}^{\infty} H_q'$ (штрихом обозначено сопряженное пространство). В дальнейшем предполагается, что в $\hat{H}$ введена инволюция, которая является инволюцией указанного на стр. 4 типа в каждом из пространств H_q.

Пусть K — обобщенное п. о. ядро, т. е. элемент из $(\hat{H} \otimes \hat{H})'$, удовлетворяющий условию $(K, u \otimes \bar{u}) \geqslant 0$ $(u \in \hat{H})$; $\langle u, v \rangle = (K, v \otimes \bar{u})$ — скалярное произведение, порожденное этим ядром в $\hat{H}$, H_K — соответствующее пространство. Введем полевой оператор B соотношением (2), где $h \in \hat{\mathfrak{H}}$, $u = (u_0, u_1, \ldots) \in \hat{H}$ финитна. Тогда *справедлива теорема* 1 *в прежней формулировке и лишь с тем изменением, что требуется квазианалитичность каждого из классов* $C(\sqrt{p_{nq}})$ $(q = 0, 1, \ldots)$.

Действительно, так как $(\hat{H} \otimes \hat{H})' = \bigcup_{q=0}^{\infty} (H_q \otimes H_q)'$, то K входит в некоторое $(H_{q_0} \otimes H_{q_0})'$. Таким образом, получаем такую же ситуацию, как в п. 1° при $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{H}_{q_0}$, с той лишь разницей, что при определении B фигурируют финитные $u = (u_0, u_1, \ldots)$, где u_j берутся из $\otimes \hat{\mathfrak{H}}^j$, а не из $\otimes \mathfrak{H}_+^j = \otimes \mathfrak{H}_{q_0}^j$. Однако посредством предельного перехода легко требуемым образом расширить область определения B. Теперь наше утверждение вытекает из теоремы 1.

Перейдем теперь к результатам п. 2°. Для их справедливости нужно потребовать, чтобы пространство вектор-состояний $\hat{H}$ было ядерным. Приведем сейчас простое условие, обеспечивающее ядерность H. Именно, $\hat{H}$ *будет ядерным, если* $\hat{\mathfrak{H}}$ *ядерно и для любых* $q = 0, 1, \ldots$ *и* $C > 0$ *найдется* $r > q$ *такое, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C^j p_{jq}}{p_{jr}} < \infty. \tag{19}$$

Действительной, нам нужно показать, что для любого H_q найдется такое $H_{q'}$ $(q' > q)$, что вложение $H_{q'} \to H_q$ будет квазиядерным. Благодаря ядерности $\hat{\mathfrak{H}}$ найдется такое $q'' > q$, что вложение $\mathfrak{H}_{q''} \to \mathfrak{H}_q$ квазиядерно; пусть C — квадрат гильбертовой нормы соответствующего оператора вложения. По q'' и этому C найдем согласно предположению $r > q''$, чтобы (19) имело место (с заменой q на q''). Тогда можно принять $q' = r$. В самом деле, вложение $\mathfrak{H}_r \to \mathfrak{H}_q$ квазиядерно как суперпозиция непрерывного вложения $\mathfrak{H}_r \to \mathfrak{H}_{q''}$ и квазиядерного $\mathfrak{H}_{q''} \to \mathfrak{H}_{q'}$; пусть O — соответствующий оператор вложения. Ясно, что $\|O\| \leqslant \sqrt{C}$. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|O\|^{2j} p_{jq}}{p_{jr}} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C^j p_{jq''}}{p_{jr}} < \infty$$

и соответствующее требование (9) выполнено. Утверждение доказано.

Теперь при помощи теоремы 2 легко получить следующий результат. *если $\hat{H}$ ядерно, а п. о. ядро $K \in (\hat{H} \otimes \hat{H})'$ таково, что относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ полевой оператор B, построенный при помощи $h \in \hat{\mathfrak{H}}$, эрмитов, то справедливо сходящееся в слабом смысле над $\hat{H} \otimes \hat{H}$ представление* (10). *В нем Ω_λ — семейство п. о. ядер из $(\hat{H} \otimes \hat{H})'$, элементарных в том смысле, что*

$$(B' \otimes 1)\,\Omega_\lambda = \lambda\Omega_\lambda, \qquad (1 \otimes B')\,\Omega_\lambda = \lambda\Omega_\lambda$$

(B' — сопряженный к B оператор). Если все классы $C(\sqrt{p_{nq}})$ ($q=0, 1, \ldots$) квазианалитичны, и $h = \bar{h}$, то $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ определяется однозначно.

В самом деле, для сведения к теореме 2 нужно заметить, что K входит в некоторое $(H_{q_0} \otimes H_{q_0})'$, положить $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{H}_{q_0}$ и выбрать в качестве $\mathfrak{H}_{++}$ такое $\mathfrak{H}_{q_0'}$, $q_0' > q$, чтобы вложения $\mathfrak{H}_{q_0'} \to \mathfrak{H}_q$ и $H_{q_0'} \to H_q$ были квазиядерными.

Конечно, нетрудно сформулировать аналогично п. 2° соответствующий результат «координатным» образом; мы этого делать не будем.

Под функционалом типа Уайтмана теперь следует понимать последовательность $W = (W_0, W_1, \ldots)$, где $W_j \in (\otimes \hat{\mathfrak{H}}^j)'$ ($j = 0, 1, \ldots$), для которой ядро с матрицей $(K_{jk})_{j,k=0}^{\infty} = (W_{j+k})_{j,k=0}^{\infty}$ входит в $(\hat{H} \otimes \hat{H})'$ и п. о.; инволюция в каждом H_q описанного на стр. 9 типа. Опять, так как $(\hat{H} \otimes \hat{H})' = \bigcup_{q=0}^{\infty} (H_q \otimes H_q)'$, все сводится к рассмотрениям п. 3°. Результаты мы не формулируем.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Wightman, Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique-relativiste, Colloques internationaux an Lille, Juin 1957, Paris, 1959, 1—38 (русск. перевод: «Математика», т. 6, № 4, 1962, 96—133).
2. H. J. Borchers, On structure of the algebra of field operators, Nuovo C., **24**, № 2, 1962, 214—236.
3. Ю. М. Березанский, Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 110, № 6, 1956, 893—896.
4. Ю. М. Березанский, Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера, ДАН СССР, т. 136, № 5, 1961, 1011—1014.
5. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд-во «Наукова думка», К., 1965.
6. H. J. Borchers, W. Zimmerman, On the self-adjointness of field operators, Nuovo C., **31**, № 5, 1964, 1047—1059.
7. В. П. Гачок, Самосопряженность полевых операторов и проблема моментов, УМЖ, т. 17, № 5, 1965, 3—13.
8. В. П. Гачок, О проблеме моментов в квантовой теории поля, ДАН СССР, т. 165, № 3, 1965, 506—509.

Поступила 1.XI 1965

Киев