Об одном классе целых функций многих переменных

Ф. И. Гече

В настоящей статье приводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы целая функция $f(z, w)$, заданная своим рядом Тейлора, представлялась в виде

$$f(z, w) = \exp[g(z, w)] f_1(z) f_2(w), \tag{1}$$

где $g(z, w)$, $f_1(z)$, $f_2(w)$ — целые функции, зависящие только от указанных переменных, а на аргументы нулей функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ наложены различные ограничения. Без этих ограничений задача решается тривиальным образом: для представимости функции $f(z, w)$ в виде (1) необходимо и достаточно, чтобы функция $\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \ln f(z, w)$ являлась целой.

Все результаты статьи легко переносятся на случай любого числа переменных. В случае, когда f зависит только от z, соответствующие теоремы получены В. Бернштейном [1]. Обобщение результатов В. Бернштейна на случай функций многих переменных связано с преодолением определенных новых трудностей, причем существенно используются результаты В. К. Иванова [2] и Л. И. Ронкина [3].

Выражаю глубокую благодарность А. А. Гольдбергу и Л. И. Ронкину за ценные замечания.

1. Пусть $f(z, w)$ — целая функция, которая зависит от обеих переменных z и w. Предположим, что $f(0, 0) \neq 0$, что не ограничивает общности наших утверждений. Эти условия относительно функции $f(z, w)$ в дальнейшем предполагаем выполненными, не оговаривая этого особо.

Рассмотрим функцию

$$\Phi = \Phi(z, w) = \frac{f'_z(z, w) f'_w(z, w)}{f^2(z, w)}. \tag{2}$$

Очевидно, функция $\Phi(z, w)$ голоморфна во всех точках пространства C^2 комплексных переменных z и w, где $f(z, w) \neq 0$. Покажем, что $\Phi(z, w)$ не может быть аналитически продолжена ни в какую точку (z_0, w_0), где $f(z_0, w_0) = 0$. Пусть (z_0, w_0) — точка, через которую проходит одна и только одна аналитическая поверхность нулей функции $f(z, w)$ с некоторой кратностью k. Тогда в некоторой окрестности u точки (z_0, w_0) имеет место равенство

$$f(z, w) = P^k(z, w), \tag{3}$$

где $P(z, w)$ — представляющая указанную поверхность неприводимая аналитическая в окрестности U функция. Очевидно, достаточно доказать наше утверждение относительно такой точки (z_0, w_0), так как те точки, через которые проходят несколько различных поверхностей нулей функции $f(z, w)$, являются изолированными, а множество нулей функции $f(z, w)$ непрерывно.

Согласно (2) и (3) в окрестности U имеет место равенство

$$\Phi(z, w) = k^2 \frac{P'_z(z, w) P'_w(z, w)}{P^2(z, w)}. \tag{4}$$

Используя подготовительную теорему Вейерштрасса, а также условие неприводимости функции $P(z, w)$, легко показать, что в некоторой окрестности точки (z_0, w_0), исключая эту точку, функции $P'_z(z, w)$ и $P'_w(z, w)$ не обращаются в нуль в тех точках, где $P(z, w) = 0$. Поэтому из (4) следует, что точка (z_0, w_0) (а также все точки, где $P(z, w) = 0$) является особой точкой функции $\Phi(z, w)$.

2. Функция $\Phi(z, w)$, определенная формулой (1), в дальнейшем будет играть ту же роль, что и логарифмическая производная целой функции одной переменной в работе В. Бернштейна [1]. Следуя В. Бернштейну, с целой функцией $f(z, w)$ ассоциируем целую функцию

$$F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w) = \frac{-1}{4\pi^2} \int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2} \Phi(\zeta, \xi) E_{\varrho_1}\left(\frac{z}{\zeta}\right) E_{\varrho_2}\left(\frac{w}{\xi}\right) \frac{d\zeta d\xi}{\zeta\xi}, \tag{5}$$

где $\Phi(z, w)$ определяется формулой (1), C_1 и C_2 — замкнутые кусочно-гладкие кривые соответственно в z- и w-плоскостях, содержащие внутри себя начало координат и такие, что $f(z, w)$ не обращается в нуль в замкнутом бицилиндре с остовом $C_1 \times C_2$, E_{ϱ_i} — функция Миттаг — Леффлера, $i = 1, 2$,

$$E_\varrho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(1 + k/\varrho)} \qquad (0 < \varrho < \infty).$$

Когда $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, $E_1(t) = e^t$ и

$$F_{11}(z, w) = \frac{-1}{4\pi^2} \int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2} \Phi(\zeta, \xi) \exp\left(\frac{z}{\zeta} + \frac{w}{\xi}\right) \frac{d\zeta d\xi}{\zeta\xi}. \tag{6}$$

Функция $\Phi(z, w)$ аналитична в точке $(0, 0)$, поэтому ее можно представить в виде ряда

$$\Phi(z, w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} z^k w^l. \tag{7}$$

Из (5) и (7) легко получить представление для функции $F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w)$:

$$F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{c_{kl} z^k w^l}{\Gamma(1 + k/\varrho_1)\Gamma(1 + l/\varrho_2)}. \tag{8}$$

Разложение (8) показывает, что для построения функции $F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w)$ не требуется никаких сведений о нулях функции $f(z, w)$ (кроме, очевидно, условия $f(0, 0) \neq 0$).

Легко показать, используя формулы для определения по коэффициентам Тейлора систем сопряженных порядков и сопряженных типов, а также сопряженных радиусов сходимости (см. [4], стр. 61, 390), что в случае, когда $f(z, w)$ имеет хотя бы одну поверхность нулей (следовательно, Φ имеет особую поверхность), система чисел (ϱ_1, ϱ_2) является системой сопряженных порядков целой функции $F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w)$, а системами сопряженных типов при системе сопряженных порядков (ϱ_1, ϱ_2) являются все пары чисел (σ_1, σ_2), для которых выполняется условие: функция $f(z, w)$ не обращается в нуль в бицилиндре $\left\{|z| < \frac{1}{\sigma_1},\ |w| < \frac{1}{\sigma_2}\right\}$ и обращается в нуль в любом бицилиндре $\left\{|z| < \frac{1}{\tau_1},\ |w| < \frac{1}{\tau_2}\right\}$ с $\tau_1 < \sigma_1$, $\tau_2 \leqslant \sigma_2$ или $\tau_1 \leqslant \sigma_1$, $\tau_2 < \sigma_2$. С другой стороны, системы чисел (σ_1, σ_2) являются сопряженными радиусами сходимости ряда (7). Если функция $f(z, w)$ не имеет нулей, то $\Phi(z, w)$ — целая функция, и рост $F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w)$ не выше минимального типа порядка (ϱ_1, ϱ_2).

3. В некоторой области, содержащей начало координат, формулу (5) можно обратить следующим образом:

$$\Phi(z, w) = \varrho_1\varrho_2 \int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-t_1^{\varrho_1} - t_2^{\varrho_2}\right) F_{\varrho_1\varrho_2}(zt_1, wt_2)\, t_1^{\varrho_1-1} t_2^{\varrho_2-1}\, dt_1 dt_2. \tag{9}$$

Формула (9) в другой форме была выведена при $\varrho_1 \geqslant \frac{1}{2}$, $\varrho_2 \geqslant \frac{1}{2}$ М. М. Джрбашяном [5]. Она легко доказывается при произвольных $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$, если использовать следующее простое обстоятельство. Пусть ряд $S = \Sigma a_{kl}$ абсолютно сходится, $0 \leqslant b_{kl}(x, y) \leqslant 1$ заданы при всех $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$; $b_{kl}(x, y) \to 1$ при $x \to \infty$, $y \to \infty$ при любых $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$. Тогда ряд $S(x, y) = \Sigma a_{kl} b_{kl}(x, y)$ абсолютно сходится при любых $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, и имеет место равенство $S = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} S(x, y)$.

Для доказательства (9) фиксируем точку (z, w), в которой ряд (7) абсолютно сходится. Обозначим через $W_i(t_i)$ функцию $W_i(t_i) = t_i^{\varrho_i} - (\varrho_i - 1)\ln t_i - \ln\varrho_i$, $i = 1, 2$. Тогда легко подсчитать, что

$$\Gamma\left(\frac{s_i}{\varrho_i} + 1\right) = \int_0^\infty e^{-W_i(t_i)} t_i^{s_i} dt_i, \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

В качестве функции $b_{kl}(x, y)$ выберем

$$b_{kl}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1 + k/\varrho_1)\,\Gamma(1 + l/\varrho_2)} \int_0^x\int_0^y e^{-W_1(t_1) - W_2(t_2)} t_1^k t_2^l\, dt_1 dt_2.$$

Из (10) следует, что она удовлетворяет приведенным выше условиям. В силу равномерной сходимости ряда (8) в любой ограниченной области можем записать:

$$S(z, w, x, y) = \sum_{k,l=0}^\infty c_{kl} z^k w^l b_{kl}(x, y) = \int_0^x\int_0^y e^{-W_1(t_1) - W_2(t_2)} F_{\varrho_1\varrho_2}(zt_1, wt_2)\, dt_1 dt_2.$$

Переходя к пределу при $x \to \infty$, $y \to \infty$ в последнем равенстве, получим равенство, равносильное соотношению (9). Таким образом, равенство (9) имеет место во всех точках, в которых ряд (7) абсолютно сходится. Но тогда оно верно в любой содержащей (0, 0) области, где интеграл в правой части (9) равномерно сходится и, следовательно, представляет аналитическую функцию.

4. При доказательстве основных теорем мы существенно используем теорему А (она будет сформулирована позже), которая равносильна результатам В. К. Иванова [2] и Л. И. Ронкина [3] и может быть выведена из них. Однако прямое доказательство теоремы А оказывается более простым, поэтому мы его здесь приведем. Предполагаем для простоты, что $\frac{1}{2} < \varrho_i < \infty$, $i=1, 2$, так как именно этот случай будет нами использован. Все рассуждения остаются в силе и при $0 < \varrho_i < \infty$, $i = 1, 2$.

Пусть (φ_1, φ_2) $(0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi,\ i = 1, 2)$ — произвольная фиксированная система чисел. Следуя работам В. К. Иванова [2] и Л. И. Ронкина [3], введем в рассмотрение множество $T(\varphi_1, \varphi_2)$ точек (ν_1, ν_2) с $\nu_1 \geqslant 0$, $\nu_2 \geqslant 0$, для которых при некоторой постоянной $C(\nu_1, \nu_2)$ и всех неотрицательных r_1, r_2 выполняется неравенство

$$|F_{\varrho_1\varrho_2}(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})| < C(\nu_1, \nu_2)\exp(\nu_1 r_1^{\varrho_1} + \nu_2 r_2^{\varrho_2}).$$

Обозначим через $A_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ область пространства C^2 переменных z и w со следующим свойством: точка с координатами $(z_0, w_0) = (r_1^0 e^{i\omega_1}, r_2^0 e^{i\omega_2})$ принадлежит $A_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ тогда и только тогда, когда кусок четверть-плоскости $\{\arg z = \omega_1,\ \arg w = \omega_2\}$, лежащий в бицилиндре $\{|z| \leqslant r_1^0, |w| \leqslant r_2^0\}$, не имеет общих точек с поверхностью, состоящей из точек $(z = r_1 e^{i\theta_1},\ w = r_2 e^{i\theta_2})$ таких, что

$$r_1^{\varrho_1}\cos\varrho_1(\theta_1 - \varphi_1) = |\zeta|^{\varrho_1}, \qquad |\theta_1 - \varphi_1| < \frac{\pi}{2\varrho_1},$$

$$r_1^{\varrho_2}\cos\varrho_2(\theta_2 - \varphi_2) = |\eta|^{\varrho_2}, \qquad |\theta_2 - \varphi_2| < \frac{\pi}{2\varrho_2},$$

каковы бы ни были особые точки $(\zeta, \eta) = (|\zeta| e^{i\varphi_1}, |\eta_2| e^{i\varphi_2})$ функции $\Phi(z, w)$, лежащие в четверть-плоскости $\{\arg z = \varphi_1, \arg w = \varphi_2\}$. Обозначим через $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ пересечение областей $A_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\Sigma_{\varrho_1\varrho_2} = \bigcap_{\substack{0\leqslant\varphi_1\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\varphi_2\leqslant 2\pi}} A_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Множество $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$, которое, очевидно, односвязно, является аналогом звезды Миттаг-Леффлера для функций одной переменной (см., например, [6]), его также назовем звездой Миттаг-Леффлера функции $\Phi(z, w)$.

Обозначим через $S_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ множество точек (ν_1, ν_2) $(\nu_1 \geqslant 0, \nu_2 \geqslant 0)$, характеризующееся следующим свойством: $(\nu_1, \nu_2) \in S_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ тогда и только тогда, когда существует точка $(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})$ из звезды $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ Миттаг-Леффлера функции $\Phi(z, w)$, для координат которой выполняются неравенства $\nu_1 r_1^{\varrho_1} > 1$, $\nu_2 r_2^{\varrho_2} > 1$. Отметим, что из определения $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ следует, что множество $\overline{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ так же, как и множество $\overline{T}(\varphi_1, \varphi_2)$, квадрантообразно, т. е. вместе с каждой точкой (ν_1, ν_2) в $\overline{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ содержатся все точки (ν_1', ν_2') с $\nu_1' \geqslant \nu_1$, $\nu_2' \geqslant \nu_2$.

Пусть $(\bar r_1 e^{i\varphi_1}, \bar r_2 e^{i\varphi_2})$ — произвольная фиксированная граничная точка звезды $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$. Тогда функция $\Phi(z, w)$ голоморфна внутри бицилиндрической области $G^0 = G_1^0 \times G_2^0$, где область $G^\alpha = G_1^\alpha \times G_2^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ состоит из точек $(z, w) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})$, таких, что

$$\begin{cases} r_1^{\varrho_1} < (1-\alpha)\,\bar r_1^{\varrho_1}\cos\varrho_1(\theta_1 - \varphi_1), & |\theta_1 - \varphi_1| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_1}, \\ r_2^{\varrho_2} < (1-\alpha)\,\bar r_2^{\varrho_2}\cos\varrho_2(\theta_2 - \varphi_2), & |\theta_2 - \varphi_2| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_2}. \end{cases} \tag{11}$$

Для доказательства допустим противное, т. е. что существует особая точка $(\xi_1, \xi_2) = (|\xi_1| e^{i\omega_1}, |\xi_2| e^{i\omega_2})$ функции $\Phi(z, w)$, координаты которой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} |\xi_1|^{\varrho_1} < \bar{r}_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1 (\omega_1 - \varphi_1), & |\omega_1 - \varphi_1| < \dfrac{\pi}{2\varrho_1}, \\ |\xi_2|^{\varrho_2} < \bar{r}_2^{\varrho_2} \cos \varrho_2 (\omega_2 - \varphi_2), & |\omega_2 - \varphi_2| < \dfrac{\pi}{2\varrho_2}. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) следует, что точка с координатами $(\bar{r}_1 e^{i\varphi_1}, \bar{r}_2 e^{i\varphi_2})$ лежит вне бицилиндрической области

$$\begin{cases} r_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1 (\theta_1 - \omega_1) \leqslant |\xi_1|^{\varrho_1}, & |\theta_1 - \omega_1| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_1}, \\ r_2^{\varrho_2} \cos \varrho_2 (\theta_2 - \omega_2) \leqslant |\xi_2|^{\varrho_2}, & |\theta_2 - \omega_2| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_2}. \end{cases}$$

Следовательно, точка с координатами $(\bar{r}_1 e^{i\varphi_1}, \bar{r}_2^{i\varphi_2})$ не принадлежит замкнутой области $\bar{A}_{\varrho_1\varrho_2}(\omega_1, \omega_2)$ и поэтому является внешней точкой для звезды $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$. Но это противоречит условию, что $(\bar{r}_1 e^{i\varphi_1}, \bar{r}_2 e^{i\varphi_2})$ является граничной точкой звезды $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$.

Итак, наше утверждение доказано.

Далее мы используем теорему В. К. Иванова — Л. И. Ронкина [2, 3], которую мы здесь приводим в формулировке Л. И. Ронкина [3] для n переменных.

Теорема В. К. Иванова—Л. И. Ронкина. *Пусть функция $g(z_1, \ldots, z_n)$ аналитическая в полицилиндре $D = \{z_i \in D_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, где D_i— область в плоскости переменного z_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть, далее, граничная точка $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ полицилиндра D является особой для функции $g(z_1, \ldots, z_n)$ и через P обозначено множество тех значений индекса i, для которых $z_i^0 \in D_i$. Тогда все точки многообразия $D_0 = \{z_i = z_i^0,\ z_j \in \bar{D}_j,\ i \bar{\in} P,\ j \in P\}$ являются особыми точками функции $g(z_1, \ldots, z_n)$.*

Функция $\Phi(z, w)$ голоморфна в бицилиндрической области G^0 и, кроме того, в некоторой δ-окрестности $U^\delta = U_1^\delta \times U_2^\delta = \{|z| < \delta\} \times \{|w| < \delta\}$ точки $(0, 0)$. Тогда, используя теорему В. К. Иванова — Л. И. Ронкина, легко видеть, что $\Phi(z, w)$ голоморфна также в области $D^\varepsilon = D_1^\varepsilon \times D_2^\varepsilon = \{G_1^\varepsilon \bigcup U_1^\delta\} \times$

$\times \{G_2^\varepsilon \bigcup U_2^\delta\}$, где $0 < \varepsilon < 1$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ достаточно мало. Выберем в качестве кривых C_1 и C_2 в формуле (5) произвольные замкнутые кусочно-гладкие жордановы кривые, лежащие соответственно в D_1^ε и D_2^ε и содержащие внутри себя начало координат так, чтобы при $r_1 \geqslant \delta$ $(r_2 \geqslant \delta)$ для $r_1 e^{i\theta_1} \in C_1$ $(r_2 e^{i\theta_2} \in C_2)$ выполнялось неравенство

$$r_1^{\varrho_1} > (1 - 2\varepsilon)\, \bar{r}_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1 (\theta_1 - \varphi_1), \quad |\theta_1 - \varphi_1| \leqslant \frac{\pi}{2\varrho_1}$$

$$\left(r_2^{\varrho_2} > (1 - 2\varepsilon)\, \bar{r}_2^{\varrho_2} \cos \varrho_2 (\theta_2 - \varphi_2), \quad |\theta_2 - \varphi_2| \leqslant \frac{\pi}{2\varrho_2} \right),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, $(\bar{r}_1 e^{i\varphi_1}, \bar{r}_2 e^{i\varphi_2})$ — граничная точка звезды $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$. Тогда, используя известные асимптотические оценки для функции E_{ϱ_i} Миттаг-Леффлера, легко докажем включение $\bar{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2) \subset \bar{T}(\varphi_1, \varphi_2)$ (см. аналогичные рассуждения для функций одной переменной в работе В. Бернштейна [6]; ср. также [2, 3]).

Используя формулу (9), легко показать, что $\Phi(z, w)$ голоморфна в бицилиндрической области ($z = r_1 e^{i\theta_1}$, $w = r_2 e^{i\theta_2}$):

$$\begin{cases} r_1^{\varrho_1} < \nu_1^{-1} \cos \varrho_1 (\theta_1 - \varphi_1), & |\theta_1 - \varphi_1| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_1}, \\ r_2^{\varrho_2} < \nu_2^{-1} \cos \varrho_2 (\theta_2 - \varphi_2), & |\theta_2 - \varphi_2| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_2}, \end{cases} \tag{13}$$

где φ_1, φ_2 фиксированы, а (ν_1, ν_2) — произвольная фиксированная граничная точка множества $T(\varphi_1, \varphi_2)$. Отсюда легко вывести включение $\overline{T}(\varphi_1, \varphi_2) \subset \subset \overline{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$. Действительно, допустив противное, в силу уже доказанного включения $S_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2) \subset \overline{T}(\varphi_1, \varphi_2)$ и квадрантообразности $\overline{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\overline{T}(\varphi_1, \varphi_2)$ найдется граничная точка (ν_1, ν_2) множества $\overline{T}(\varphi_1, \varphi_2)$ и граничная точка $(\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2)$ множества $S_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\nu_1 < \overline{\nu}_1$, $\nu_2 < \overline{\nu}_2$. Но тогда по определению множеств $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ и $S_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ существует особая точка $(\xi_1, \xi_2) = (|\xi_1| e^{i\omega_1}, |\xi_2| e^{i\omega_2})$ функции $\Phi(z, w)$ ($\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$), для которой поверхность

$$\begin{cases} r_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1 (\theta_1 - \omega_1) = |\xi_1|^{\varrho_1}, & |\theta_1 - \omega_1| < \dfrac{\pi}{2\varrho_1}, \\ r_2^{\varrho_2} \cos \varrho_2 (\theta_2 - \omega_2) = |\xi_2|^{\varrho_2}, & |\theta_2 - \omega_2| < \dfrac{\pi}{2\varrho_2} \end{cases} \tag{14}$$

пересекает четверть-плоскость $\{\arg z = \varphi_1, \arg w = \varphi_2\}$ в точке $(\zeta_1, \zeta_2) = = (|\zeta_1| e^{i\varphi_1}, |\zeta_2| e^{i\varphi_2})$, для координат которой справедливы неравенства $|\zeta_1|^{\varrho_1}\nu_1 < 1$, $|\zeta_2|^{\varrho_2}\nu_2 < 1$. Но так как поверхность (14) и четверть-плоскость $\{\arg z = \varphi_1, \arg w = \varphi_2\}$ пересекаются только при условии, что $|\omega_1 - \varphi_1| < < \dfrac{\pi}{2\varrho_1}$, $|\omega_2 - \varphi_2| < \dfrac{\pi}{2\varrho_2}$, то для координат точки пересечения получаем условия

$$|\xi_1|^{\varrho_1} = |\zeta_1|^{\varrho_1} \cos \varrho_1 (\varphi_1 - \omega_1), \qquad |\varphi_1 - \omega_1| < \frac{\pi}{2\varrho_1},$$

$$|\xi_2|^{\varrho_2} = |\zeta_2|^{\varrho_2} \cos \varrho_2 (\varphi_2 - \omega_2), \qquad |\varphi_2 - \omega_2| < \frac{\pi}{2\varrho_2}.$$

Но так как $|\zeta_1|^{\varrho_1}\nu_1 < 1$, $|\zeta_2|^{\varrho_2}\nu_2 < 1$, из последних неравенств следует, что точка (ξ_1, ξ_2) лежит внутри области (13). Это противоречит условию голоморфности $\Phi(z, w)$ в области (13).

Если $\Phi(z, w)$ — целая функция, то $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ совпадает со всем пространством C^2, а $T(\varphi_1, \varphi_2)$ — со всей положительной четверть-плоскостью, следовательно, в этом случае также справедливо равенство $\overline{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2) = = \overline{T}(\varphi_1, \varphi_2)$. Итак, имеет место

Теорема А. *Для всякой голоморфной в начале координат функции* $\Phi(z, w)$, *представленной рядом Тейлора* (7) *и ассоциированной с ней целой функции* $F_{\varrho_1\varrho_2}(z, w)$, *определенной рядом* (8), *множества* $\overline{T}(\varphi_1, \varphi_2)$ *и* $\overline{S}_{\varrho_1\varrho_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ ($0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$) *совпадают.*

5. Приступим теперь к выяснению условий для представимости целой функции $f(z, w)$ в виде (1), когда все нули $f_1(z)$ и $f_2(w)$ действительны. Все приведенные ниже теоремы являются некоторыми аналогами соответствующих теорем В. Бернштейна [1] для функций одной комплексной переменной. В случае $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы целая функция $f(z,w)$ представлялась в виде* (1), *где* $g(z,w)$, $f_1(z)$, $f_2(w)$ — *целые функции*, причем функции* $f_1(z)$ *и* $f_2(w)$ *не имеют нулей вне осей* $\operatorname{Im} z = 0$ *и соответственно* $\operatorname{Im} w = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись четыре равенства*

$$\lim_{r_1+r_2\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln} |F_{11}(\pm ir_1, \pm ir_2)|}{r_1+r_2} = 0. \qquad (15)$$

Доказательство. Пусть $f(z,w)$ представляется в виде (1), причем все нули $f_1(z)$ и $f_2(w)$, если они существуют, действительны. Тогда звезда Σ_{11} Миттаг-Леффлера функции $\Phi(z,w)$ имеет вид

$$\left\{-\frac{1}{b_1} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{a_1}, \qquad -\frac{1}{b_2} < \operatorname{Re} w < \frac{1}{a_2}\right\}, \qquad (16)$$

где $\frac{1}{a_j}$ — наименьший положительный, а $\frac{1}{b_j}$ — наименьший по абсолютному значению отрицательный нули функции f_j, $j = 1, 2$. Если f_j не имеет положительных нулей, то $\frac{1}{a_j} = +\infty$, если же f_j не имеет отрицательных нулей, то $-\frac{1}{b_j} = -\infty$.

Из представления (16) звезды Σ_{11} следует, что во всех указанных выше случаях множества $S_{11}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $S_{11}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $S_{11}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $S_{11}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ совпадают со всей положительной четверть-плоскостью. Тогда по теореме А то же самое можно сказать о множествах $T\left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, имеет место равенство (15). Если $f(z,w)$ не имеет нулей, то, как мы уже отмечали, функция $F_{11}(z,w)$ минимального типа порядка (1, 1); следовательно, в этом случае также справедливо равенство (15).

Доказательство достаточности условия (15) проведем от противного, причем рассмотрим два случая.

Пусть $f(z,w)$ имеет вид (1) и одна из функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ имеет мнимый нуль. Предположим для определенности, что $f_1(z)$ имеет нуль $z = z_0$, причем $0 < \alpha = \arg z_0 < \pi$. Прямая, состоящая из точек $r_1 e^{i\theta_1}$ таких, что $\left\{r_1 \cos(\theta_1 - \alpha) = |z_0|, \ |\theta_1 - \alpha| < \frac{\pi}{2}\right\}$, пересекается с лучом $\arg z = \frac{\pi}{2}$ в точке $i|z_0| \operatorname{cosec} \alpha$, и по определению звезды Σ_{11} и множества $S_{11}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ последнее не содержит точек (ν_1, ν_2), для которых $\nu_1 < (|z_0| \operatorname{cosec} \alpha)^{-1}$, $\nu_2 \geqslant 0$. Поэтому в силу теоремы А существует последовательность $\{r_1^{(k)}, r_2^{(k)}\}$ с $r_1^{(k)} + r_2^{(k)} \underset{k\to\infty}{\to} \infty$, на которой имеет место неравенство

$$|f(r_1^{(k)} i, r_2^{(k)} i)| > \exp\{[(|z_0| \operatorname{cosec} \alpha)^{-1} - \varepsilon] r_1^{(k)} + r_2^{(k)}\}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Но это противоречит условию (15).

* В дальнейшем все время будем считать, что $g(z,w)$, $f_1(z)$, $f_2(w)$ — целые функции своих аргументов, не оговаривая этого особо. Считаем также, что $f(0,0) \neq 0$.

Пусть $f(z, w)$ имеет поверхность нулей $P(z, w) = 0$, где $P(z, w)$ — неприводимый псевдополином, зависящий от обеих переменных z и w. Очевидно, этот псевдополином имеет нуль (z_0, w_0), удовлетворяющий условию: $z_0 \neq 0$; $w_0 \neq 0$, $\arg z_0 \neq k\pi$, $\arg w_0 \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Предположим для определенности, что $0 < \alpha = \arg z_0 < \pi$, $0 < \beta = \arg w_0 < \pi$. Тогда плоскость

$$\begin{cases} r_1 \cos(\theta_1 - \alpha) = |z_0|, & |\theta_1 - \alpha| < \dfrac{\pi}{2}, \\ r_2 \cos(\theta_2 - \beta) = |w_0|, & |\theta_2 - \beta| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

пересекается с четверть-плоскостью $\left\{\arg z = \dfrac{\pi}{2}, \arg w = \dfrac{\pi}{2}\right\}$ в точке с координатами $(i|z_0| \operatorname{cosec} \alpha, i|w_0| \operatorname{cosec} \beta)$. Эта точка не может входить в звезду Σ_{11} функции $\Phi(z, w)$, следовательно, любая точка (ν_1, ν_2) с координатами $\nu_1 < (|z_0| \operatorname{cosec} \alpha)^{-1}$, $\nu_2 < (|w_0| \operatorname{cosec} \beta)^{-1}$ лежит вне множества $S_{11}\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Но тогда по теореме A

$$\varlimsup_{r_1 + r_2 \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} |F_{11}(ir_1, ir_2)|}{\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2} \geqslant 1,$$

что противоречит условию (15). Тем самым теорема 1 полностью доказана.

6. Накладывая другие дополнительные условия на нули функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$, получаем новые условия для представления функции $f(z, w)$ в виде (1). Для простоты сначала ограничимся случаем, когда $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$.

Теорема 2. *Для того чтобы целая функция* $f(z, w)$ представлялась *в виде* (1) *с условием, что все нули функций* $f_1(z)$ и $f_2(w)$ *положительны, причем обе они имеют по крайней мере по одному нулю, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\varlimsup_{r_1 + r_2 \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} |F_{11}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|}{h_1(\varphi_1) r_1 + h_2(\varphi_2) r_2} = 1^* \tag{17}$$

выполнялось при

$$h_i(\varphi_i) = \begin{cases} a_i \cos \varphi_i & \text{при } 0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant |\varphi_i| \leqslant \pi \end{cases} \tag{18}$$

и не выполнялось, если $h_1(\varphi_1) < a_1 \cos \varphi_1$ *или* $h_2(\varphi_2) < a_2 \cos \varphi_2$ $\left(0 \leqslant |\varphi_i| < \dfrac{\pi}{2}, i = 1, 2\right)$, *где* $\dfrac{1}{a_i}$ *— наименьший нуль функции* f_i, $i = 1, 2$.

Теорема 3. *Для того чтобы целая функция* $f(z, w)$ *представлялась в виде* (1) *с условием, что каждая из функций* $f_1(z)$ и $f_2(w)$ *имеет по крайней мере один положительный и один отрицательный нули и не имеет мнимых нулей, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\varlimsup_{r_1 + r_2 \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} |F_{11}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|}{h_1(\varphi_1) r_1 + h_2(\varphi_2) r_2} = 1 \tag{19}$$

* Равенства (17) и (19) при $h_1(\varphi_1) = h_2(\varphi_2) = 0$ следует понимать в смысле $\varlimsup_{r_1 + r_2 \to \infty} \dfrac{\overset{+}{\ln} |F_{11}(r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2})|}{r_1 + r_2} = 0$. Подобного рода замечания в дальнейшем не будем делать.

имело место при

$$h_i(\varphi_i) = \begin{cases} a_i \cos\varphi_i \ \text{ при } 0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ b_i |\cos\varphi_i| \ \text{ при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant |\varphi_i| \leqslant \pi \end{cases} \tag{20}$$

и не имело места, если одна из функций $h_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, принимает значения меньшие, чем указано в (20). Здесь $1/a_i$ — наименьший положительный, а $1/b_i$ — наименьший по абсолютной величине отрицательный нули функции f_i, $i = 1, 2$.

Замечание 1. Если выполняются все условия теоремы 2 (теоремы 3), то при $0 \leqslant |\varphi_i| < \dfrac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$ $\left(\text{при } \varphi_i \neq \pm \dfrac{\pi}{2},\ |\varphi_i| \leqslant \pi,\ i = 1, 2\right)$ имеет место равенство

$$\lim_{\substack{r_1 + r_2 \to \infty \\ r_1 > C, r_2 > C}} \frac{\ln |F_{11}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|}{h_1(\varphi_1) r_1 + h_2(\varphi_2) r_2} = 1,$$

где $C = C(\varphi_1, \varphi_2)$ — некоторая достаточно большая постоянная. При $0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \varphi_i^0 < \dfrac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$ $\left(\text{при } 0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \varphi_i^0 < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < \bar{\varphi}_i \leqslant |\varphi_i| \leqslant \pi,\ i = 1, 2\right)$ постоянную C можно выбрать независимо от φ_1, φ_2.

Аналогичные теоремы можно доказать, рассматривая случаи, когда одна из функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ имеет только отрицательные нули, а другая функция—либо только отрицательные, либо только положительные, либо и отрицательные и положительные нули, а также случай, когда одна из функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ не имеет ни одного нуля.

Теоремы 2 и 3 легко доказываются, если использовать предыдущие результаты. Действительно, если $f_1(z)$ и $f_2(w)$ имеют только положительные нули, причем $\dfrac{1}{a_i}$ — наименьший нуль функции f_i, $i = 1, 2$, то звезда Σ_{11} функции $\Phi(z, w)$ имеет вид $\left\{\operatorname{Re} z < \dfrac{1}{a_1},\ \operatorname{Re} w < \dfrac{1}{a_2}\right\}$. Следовательно, множество $\overline{S}_{11}(\varphi_1, \varphi_2)$ состоит из точек (ν_1, ν_2), координаты которых удовлетворяют неравенствам $\nu_1 \geqslant h_1(\varphi_1)$, $\nu_2 \geqslant h_2(\varphi_2)$, где $h_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, определяются формулой (18). На основе теоремы А отсюда следует необходимость условия (17).

Доказательство достаточности условия теоремы 2 проведем от противного:

а) если хотя бы одна из функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ имеет мнимые корни, или же функция $f(z, w)$ не представляется в виде (1), то по теореме 1 равенства (15) не имеют места, следовательно, и (17) не имеет места при $\varphi_1 = \pm \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \pm \dfrac{\pi}{2}$;

б) если одна из функций $f_1(z)$, $f_2(w)$ имеет отрицательные нули, то при $\dfrac{\pi}{2} < |\varphi_i| \leqslant \pi$, $i = 1, 2$, множество $\overline{S}_{11}(\varphi_1, \varphi_2)$ не может совпадать со всей положительной четверть-плоскостью, и, следовательно, по теореме А при этих значениях φ_1, φ_2 соотношение (17) не имеет места;

в) если $f(z, w)$ не имеет нулей, то $F_{11}(z, w)$ — целая функция минимального типа порядка (1,1); следовательно, равенство (17) не имеет места при $0 \leqslant |\varphi_i| < \dfrac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$;

г) пусть теперь одна из функций $f_1(z)$, $f_2(w)$, например $f_1(z)$, не имеет нулей, а все нули функции $f_2(w)$ положительны, причем $\frac{1}{a_2}$ — наименьший нуль функции $f_2(w)$. Тогда при $0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$ множество $\overline{S}_{11}(\varphi_1, \varphi_2)$ состоит из точек (ν_1, ν_2), координаты которых удовлетворяют неравенствам $\nu_1 \geqslant 0$, $\nu_2 \geqslant a_2 \cos \varphi_2$. Следовательно, по теореме А равенство (17) имеет место при $h_1(\varphi_1) = 0$, $h_2 = a_2 \cos \varphi_2$, $0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$, что противоречит условию теоремы 2.

Легко видеть, что мы рассмотрели все возможные случаи; следовательно, достаточность условия теоремы 2 также доказана. Аналогично доказывается теорема 3.

Перейдем теперь к доказательству замечания 1. Покажем, что в области $\{r_1 > C,\ r_2 > C\}$, где C — некоторая постоянная, в равенстве (19) можно рассматривать обычный логарифм и точный предел. Аналогичное утверждение относительно равенства (17) доказывается так же.

Итак, пусть функция $f(z, w)$ представляется в виде (1), причем все нули $f_1(z)$ и $f_2(w)$ действительны и имеются как положительные, так и отрицательные. Пусть $\frac{1}{a_i}$ — наименьший положительный, а $-\frac{1}{b_i}$ — наименьший по абсолютной величине отрицательный нули функции f_i, m_i — порядок нуля $\frac{1}{a_i}$, n_i — порядок нуля $-\frac{1}{b_i}$, $i = 1, 2$. Из равенств (1) и (2) находим

$$\Phi(z, w) = \frac{f_1'(z) f_2'(w)}{f_1(z) f_2(w)} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} g_w'(z, w) + \frac{f_2'(w)}{f_2(w)} g_z'(z, w) + g_z'(z, w) g_w'(z, w). \qquad (21)$$

Но согласно нашему условию,

$$f_1(z) = \left(z - \frac{1}{a_1}\right)^{m_1} \left(z + \frac{1}{b_1}\right)^{n_1} \psi_1(z),$$

$$f_2(w) = \left(w - \frac{1}{a_2}\right)^{m_2} \left(w + \frac{1}{b_2}\right)^{n_2} \psi_2(w),$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(w)$ — целые функции и нули их, если они имеются, лежат соответственно на интервалах $\left\{-\frac{1}{b_1} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{a_1},\ \operatorname{Im} z = 0\right\}$, $\left\{-\frac{1}{b_2} < \operatorname{Re} w < \frac{1}{a_2},\ \operatorname{Im} w = 0\right\}$. Учитывая это, из (21) находим:

$$\Phi(z, w) = \frac{m_1 m_2}{\left(z - \frac{1}{a_1}\right)\left(w - \frac{1}{a_2}\right)} + \frac{n_1 n_2}{\left(w + \frac{1}{b_1}\right)\left(w + \frac{1}{b_2}\right)} + \frac{m_1 n_2}{\left(z - \frac{1}{a_1}\right)\left(w + \frac{1}{b_2}\right)} +$$

$$+ \frac{m_2 n_1}{\left(z + \frac{1}{b_1}\right)\left(w - \frac{1}{a_2}\right)} + \frac{m_1}{z - \frac{1}{a_1}} \lambda_1(z, w) + \frac{n_1}{z + \frac{1}{b_1}} \lambda_1(z, w) +$$

$$+ \frac{m_2}{w - \frac{1}{a_2}} \lambda_2(z, w) + \frac{n_2}{w + \frac{1}{b_2}} \lambda_2(z, w) + \lambda_1(z, w) \lambda_2(z, w), \qquad (22)$$

где $\lambda_1(z, w) = \frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)} + g_w'(z, w)$, $\lambda_2(z, w) = \frac{\psi_1'(z)}{\psi_1(z)} + g_z'(z, w)$.

Подставляя выражение (22) в равенство (6), мы придем к следующему выражению для $F_{11}(z, w)$:

$$F_{11}(z, w) = a_1 a_2 m_1 m_2 e^{a_1 z + a_2 w} + b_1 b_2 n_1 n_2 e^{-b_1 z - b_2 w} -$$
$$- a_1 b_2 m_1 n_2 e^{a_1 z - b_2 w} - b_1 a_2 m_2 n_1 e^{-b_1 z + a_2 w} + e^{a_1 z} \omega_1(w) +$$
$$+ e^{-b_1 z} \omega_2(w) + e^{a_2 w} \omega_3(z) + e^{-b_2 w} \omega_4(z) + \omega_5(z, w), \qquad (23)$$

где ω_i $(i = 1, \ldots, 5)$ — функции, ассоциированные соответственно с функциями $-a_1\lambda_1(z, w)$, $b_1\lambda_1(z, w)$, $-a_2\lambda_2(z, w)$, $b_2\lambda_2(z, w)$ и $\lambda_1(z, w)\lambda_2(z, w)$, подобно тому, как $F_{11}(z, w)$ ассоциируется с функцией $\Phi(z, w)$.

Рассмотрим сначала случай $0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$, $i = 1,2$. Согласно выбору функции $\psi_1(z)$ $(\psi_2(w))$, все особенности функции $\lambda_1(z, w)$ $(\lambda_2(z, w))$ лежат на интервалах $\left\{-\infty < \operatorname{Re} z < -\frac{1}{b_1},\ \operatorname{Im} z = 0\right\}$, $\left\{\frac{1}{a_1} < \operatorname{Re} z < +\infty,\ \operatorname{Im} z = 0\right\}$ $\left(\text{на интервалах } \left\{-\infty < \operatorname{Re} w < -\frac{1}{b_2},\ \operatorname{Im} w = 0\right\}, \left\{\frac{1}{a_2} < \operatorname{Re} w < +\infty,\ \operatorname{Re} w = 0\right\}\right)$. Тогда, используя теорему 3, а также аналогичную теорему в случае, когда одна из функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ не имеет нулей, легко показать, что выражения $e^{-a_1 z - a_2 w}\omega_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ стремятся к нулю, когда $|z| = r_1 \to \infty$, $|w| = r_2 \to \infty$ $\left(0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}\right)$. С другой стороны, это стремление равномерно относительно φ_1, φ_2 в любой замкнутой области $0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \varphi_i^0 < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$. Тогда из (23) получаем:

$$F_{11}(z, w) = e^{a_1 z + a_2 w} [a_1 a_2 m_1 m_2 + b_1 b_2 n_1 n_2 e^{-(a_1 + b_1)z - (a_2 + b_2)w} -$$
$$- a_1 b_2 m_1 n_2 e^{-(a_2 + b_2)w} - a_2 b_1 m_2 n_1 e^{-(a_1 + b_1)z} + e^{-a_2 w} \omega_1(w) +$$
$$+ e^{-(a_1 + b_1)z - a_2 w} \omega_2(w) + e^{-a_1 z} \omega_3(z) + e^{-a_1 z - (a_2 + b_2)w} \omega_4(w) +$$
$$+ e^{-a_1 z - a_2 w} \omega_5(z, w)] = e^{a_1 z + a_2 w}(K + \alpha(z, w)), \qquad (24)$$

где $K \neq 0$ — некоторая постоянная, $\alpha(z, w) \to 0$, когда $r_1 \to \infty$, $r_2 \to \infty$, $0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$, причем это стремление равномерно относительно φ_1, φ_2 в любой замкнутой области $0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \varphi_i^0 < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, при $r_1 > C$, $r_2 > C$, где постоянную $C = C(\varphi_1, \varphi_2)$ можно выбрать независимо от φ_1, φ_2 при $0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \varphi_i^0 < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$, справедливы неравенства $0 < K_1 < |K + \alpha(z, w)| < K_2 < \infty$.

Из (24) теперь непосредственно следует замечание 2 при $0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$. При других значениях φ_1, φ_2 оно доказывается так же.

7. Результаты предыдущего пункта можно обобщить на случай произвольных ϱ_1, ϱ_2 $\left(\varrho_i > \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right)$. Остановимся только на обобщении теоремы 2.

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы целая функция* $f(z, w)$ *представлялась в виде* (1) *с условием, что нули функций* $f_1(z)$ *и* $f_2(w)$ *существуют и положительны, необходимо и достаточно, чтобы при любых* ϱ_1, ϱ_2 $\left(\varrho_i > \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right)$ *равенство*

$$\varlimsup_{r_1+r_2\to\infty} \frac{\ln |F_{\varrho_1\varrho_2}(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})|}{h_1(\varphi_1)\, r_1^{\varrho_1} + h_2(\varphi_2)\, r_2^{\varrho_2}} = 1 \tag{25}$$

выполнялось при

$$h_i(\varphi_i) = \begin{cases} a_i^{\varrho_i} \cos \varrho_i\varphi_i & \text{при } 0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \dfrac{\pi}{2\varrho_i}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2\varrho_i} \leqslant |\varphi_i| \leqslant \pi \end{cases}$$

и не выполнялось, если $h_1(\varphi_1) < a_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1\varphi_1$ *или* $h_2(\varphi_2) < a_2^{\varrho_2} \cos \varrho_2\varphi_2$ $\left(0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2\varrho_i},\ i = 1, 2\right)$, *где* $\frac{1}{a_i}$ — *наименьший нуль функции* f_i, $i = 1, 2$. *Если соотношение* (25) *имеет место при некоторых* ϱ_1, ϱ_2, *то оно справедливо при любых* ϱ_1, ϱ_2 $\left(\varrho_i > \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right)$.

З а м е ч а н и е 2. Если выполняются все условия теоремы 4, то при $0 \leqslant |\varphi_i| < \frac{\pi}{2\varrho_i}$, $i = 1, 2$, справедливо равенство

$$\lim_{\substack{r_1+r_2\to\infty \\ r_1>C,\, r_2>C}} \frac{\ln |F_{\varrho_1\varrho_2}(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})|}{h_1(\varphi_1)\, r_1^{\varrho_1} + h_2(\varphi_2)\, r_2^{\varrho_2}} = 1,$$

где $C = C(\varphi_1, \varphi_2)$ — некоторая достаточно большая постоянная, которую при $0 \leqslant |\varphi_i| \leqslant \varphi_i^0 < \frac{\pi}{2\varrho_i}$, $i = 1, 2$, можно выбрать так, чтобы она не зависела от φ_1, φ_2.

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству теоремы 2 и замечания 1.

Пусть $f(z, w)$ представляется в виде (1) и все нули функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ положительны, причем $\frac{1}{a_1}$ и $\frac{1}{a_2}$ — наименьшие нули $f_1(z)$ и соответственно $f_2(w)$. Тогда звезда $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ функции $\Phi(z, w)$ имеет вид ($z = r_1e^{i\theta_1}$, $w = r_2e^{i\theta_2}$):

$$\begin{cases} r_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1\theta_1 < \dfrac{1}{a_1^{\varrho_1}}, & |\theta_1| < \dfrac{\pi}{2\varrho_1}, \\ r_2^{\varrho_2} \cos \varrho_2\theta_2 < \dfrac{1}{a_2^{\varrho_2}}, & |\theta_2| < \dfrac{\pi}{2\varrho_2}. \end{cases}$$

Отсюда, используя теорему А, легко получим необходимость условия (25) при любых ϱ_1, ϱ_2 $\left(\varrho_i > \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right)$.

Для доказательства достаточности заметим, что если, по крайней мере, одна из функций $f_1(z)$, $f_2(w)$ имеет отрицательные или мнимые нули, или $f(z, w)$ не представляется в виде (1), то область $\frac{\pi}{2\varrho_i} < |\varphi_i| \leqslant \pi$, $i = 1, 2$, не может принадлежать звезде $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ функции $\Phi(z, w)$. Но это приведет к противоречию с условием (25).

Если теперь равенство (25) имеет место при некоторых $\varrho_1, \varrho_2 \left(\varrho_i > \frac{1}{2}, i = 1, 2\right)$, то функция $f(z, w)$ представляется в виде (1), где $f_1(z)$ и $f_2(w)$ имеют только положительные нули. Но тогда по доказанной уже части теоремы 4 равенство (25) имеет место при любых $\varrho_1, \varrho_2 \left(\varrho_i > \frac{1}{2}, i = 1, 2\right)$. Этим и заканчиваем доказательство теоремы 4.

Доказательство замечания 2 можно провести аналогично доказательству замечания 1, при этом надо только воспользоваться теоремой 4 и известным асимптотическим равенством для функций Миттаг-Леффлера $E_{\varrho_1}(z)$ и $E_{\varrho_2}(w)$.

8. Выясним теперь условия для представления функции $f(z, w)$ в виде (1) с условием, что все нули функций $f_1(z)$ и $f_2(w)$ лежат на конечном числе лучей соответственно в z-плоскости и в w-плоскости. Рассмотрим некоторую (открытую) дугу $\sigma_1 : \alpha_1 < \varphi_1 < \beta_1$ (дугу $\sigma_2 : \alpha_2 < \varphi_2 < \beta_2$) окружности $|z| = 1$ (окружности $|w| = 1$) ($z = r_1 e^{i\varphi_1}$, $w = r_2 e^{i\varphi_2}$). Назовем полуосью симметрии дуги σ_1 (дуги σ_2) луч $\arg z = \psi_1$ ($\arg w = \psi_2$), который проходит через середину дуги σ_1 (σ_2). Имеет место следующая

Теорема 5. *Для того чтобы целая функция $f(z, w)$ представлялась в виде* (1) *с условием, что все нули функции $f_1(z)$ ($f_2(w)$) лежат на конечном числе лучей* $\arg z = \omega_k$, $k = 1, \ldots, m$ ($\arg w = \eta_l$, $l = 1, \ldots, n$), *причем на каждом из этих лучей имеется по крайней мере один нуль функции $f_1(z)$ ($f_2(w)$), необходимо и достаточно, чтобы при достаточно больших ϱ_1, ϱ_2 при всех φ_1 и φ_2 выполнялось равенство*

$$\varlimsup_{r_1+r_2\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln} |F_{\varrho_1\varrho_2}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|}{h_1(\varphi_1) r_1^{\varrho_1} + h_2(\varphi) r_2^{\varrho_2}} = 1, \tag{26}$$

где функция $h_1(\varphi_1)$ ($h_2(\varphi_2)$) обладает следующими свойствами: 1) неравенство (26) *перестает быть верным, если по крайней мере одну из функций $h_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, заменим на функцию $h_i^*(\varphi_i) < h_i(\varphi_i)$, 2) множество тех точек $e^{i\varphi_1}$ ($e^{i\varphi_2}$), для которых $h_1(\varphi_1) > 0$ ($h_2(\varphi_2) > 0$), образовало на окружности $|z| = 1$ (на окружности $|w| = 1$) множество, состоящее из m (n) дуг длиной $\frac{\pi}{\varrho_1} \left(\frac{\pi}{\varrho_2}\right)$, полуосями симметрии которых являются лучи* $\arg z = \omega_k$, $k = 1, \ldots, m$ ($\arg w = \eta_l$, $l = 1, \ldots, n$).

Если равенство (26) *справедливо при ϱ_1^0, ϱ_2^0, то оно также справедливо при всех ϱ_1, ϱ_2, для которых $\varrho_1 \geqslant \varrho_1^0$, $\varrho_2 \geqslant \varrho_2^0$.*

Доказательство. Пусть целая функция $f(z, w)$ имеет вид (1), причем функция $f_1(z)$ ($f_2(w)$) имеет нули на лучах $\arg z = \omega_k$, $k = 1, \ldots, m$ ($\arg w = \eta_l$, $l = 1, \ldots, n$) и только на них. Пусть, далее, τ_1 (τ_2) — наименьший из углов, образованных лучами $\arg z = \omega_k$, $k = 1, \ldots, m$ ($\arg w = \eta_l$, $l = 1, \ldots, n$) и $\varrho_1 > \frac{\pi}{\tau_1} \left(\varrho_2 > \frac{\pi}{\tau_2}\right)$. Тогда звезда $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ Миттаг-Леффлера функции $\Phi(z, w)$ есть полицилиндрическая область, остовом которой служит топологическое произведение кривых

$$r_1^{\varrho_1} \cos \varrho_1 (\theta_1 - \omega_k) = a_k^{\varrho_1}, \qquad |\theta_1 - \omega_k| < \frac{\pi}{2\varrho_1}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

с кривыми

$$r_2^{\varrho_2}\cos\varrho_2(\theta_2-\eta_l)=b_l^{\varrho_2},\qquad |\theta_2-\eta_l|<\frac{\pi}{2\varrho_2},\qquad l=1,\ldots,n, \tag{28}$$

где $a_k\,(b_l)$ — наименьший по модулю нуль функции $f_1(z)$ $(f_2(w))$, лежащий на луче $\arg z=\omega_k$, $k=1,\ldots,m$ $(\arg w=\eta_l,\ l=1,\ldots,n)$. В силу выбора числа $\varrho_1\,(\varrho_2)$ кривые (27), (28) не пересекаются друг с другом. Лучи $\arg z=\omega_k\,(\arg w=\eta_l)$ назовем главными осями кривых (27), (28). В силу теоремы A отсюда следует, что $h_1(\varphi_1)>0$ $(h_2(\varphi_2)>0)$ тогда и только тогда, когда $\omega_k-\frac{\pi}{2\varrho_1}<\varphi_1<\omega_k+\frac{\pi}{2\varrho_1}$, $k=1,\ldots,m$ $\left(\eta_l-\frac{\pi}{2\varrho_2}<\varphi_2<\eta_l+\frac{\pi}{2\varrho_2},\ l=1,\ldots,n\right)$. Отсюда легко получить необходимое условие теоремы.

Докажем достаточность. Пусть при некоторых ϱ_1,ϱ_2 множество U (множество V) тех значений $e^{i\varphi_1}\,(e^{i\varphi_2})$, для которых $h_1(\varphi_1)>0$ $(h_2(\varphi_2)>0)$, состоит из $m\,(n)$ дуг длиной $\frac{\pi}{\varrho_1}\left(\frac{\pi}{\varrho_2}\right)$, которые не пересекаются. Пусть $\arg z=\omega_k$, $k=1,\ldots,m$ $(\arg w=\eta_l,\ l=1,\ldots,n)$ — полуоси симметрии этих дуг. Любые две из этих полуосей образуют угол раствора не меньше $\frac{\pi}{\varrho_1}\left(\frac{\pi}{\varrho_2}\right)$. Допуская, что функция $f(z,w)$ имеет нуль в точке $(z_0,w_0)=(r_1^0e^{i\varphi_1^0},\ r_2^0e^{i\varphi_2^0})$ с $\varphi_1^0\neq\omega_k$, $\varphi_2^0\neq\eta_l$, $k=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,n$, легко придем к противоречию. Действительно, пусть точка $(z_0,\ w_0)$ такова, что функция не обращается в нуль ни в какой точке с координатами $(r_1e^{i\varphi_1^0},r_2e^{i\varphi_2^0})$ с $r_i<r_i^0$, $i=1,2$. Тогда поверхность

$$\begin{cases} r_1^{\varrho_1}\cos\varrho_1(\theta_1-\varphi_1^0)=(r_1^0)^{\varrho_1}, & |\theta_1-\varphi_1^0|<\dfrac{\pi}{2\varrho_1},\\[2mm] r_2^{\varrho_2}\cos\varrho_2(\theta_2-\varphi_2^0)=(r_2^0)^{\varrho_2}, & |\theta_2-\varphi_2^0|<\dfrac{\pi}{2\varrho_2}\end{cases}$$

входит в число тех поверхностей, из частей которых состоит граница звезды $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$ функции $\Phi(z,w)$. По теореме A отсюда следует, что все точки $e^{i\varphi_1}\,(e^{i\varphi_2})$, для которых $|\varphi_1-\varphi_1^0|<\frac{\pi}{2\varrho_1}\left(|\varphi_2-\varphi_2^0|<\frac{\pi}{2\varrho_2}\right)$, входят в множество U (в множество V), что невозможно, так как $\varphi_1^0\neq\omega_k$, $\varphi_2^0\neq\eta_l$, $k=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,n$.

Очевидно, если целая функция $f(z,w)$ не представима в виде (1), то она необходимо имеет нуль (z_0,w_0) с $\arg z_0\neq\omega_k$, $\arg w_0\neq\eta_l$, $k=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,n$ Следовательно, в наших условиях функция $f(z,w)$ должна иметь вид (1).

Легко показать также, что на всех лучах $\arg z=\omega_k$, $k=1,\ldots,m$ $(\arg w=\eta_l,\ l=1,\ldots,n)$ функция $f_1(z)\,(f_2(w))$ имеет по крайней мере по одному нулю. Действительно, с одной стороны, все нули $f_1(z)$ $(f_2(w))$ лежат на лучах $\arg z=\omega_k$, $k=1,\ldots,m$ $(\arg w=\eta_l,\ l=1,\ldots,n)$, а с другой стороны, эти лучи образуют угол раствора не меньше $\frac{\pi}{\varrho_1}\left(\frac{\pi}{\varrho_2}\right)$. Поэтому, допуская, что на луче $\arg z=\omega_{k_0}$ $(\arg w=\eta_{l_0})$ функция $f_1(z)$ $(f_2(w))$ не обращается в нуль, мы получим, что множество, состоящее из точек, координаты которых удовлетворяют условию $\arg z=\omega_{k_0}$, $|w|<\varepsilon$ $(\arg w=$

$= \eta_{l_0}$, $|z| < \varepsilon$), где $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная, принадлежит звезде $\Sigma_{\varrho_1\varrho_2}$. Но тогда по теореме А $h_1(\omega_{k_0}) = 0$ ($h_2(\eta_{l_0}) = 0$), что противоречит условию теоремы.

Наконец, если равенство (26) справедливо при некоторых ϱ_1^0, ϱ_2^0, то функция $f(z, w)$ имеет вид (1) и на всех лучах $\arg z = \omega_k$, $k = 1, \ldots, m$ ($\arg w = \eta_l$, $l = 1, \ldots, n$) и только на них функция $f_1(z)$ ($f_2(w)$) имеет по крайней мере по одному нулю. Но тогда по доказанной уже части теоремы 5 равенство (26) имеет место при любых $\varrho_1 \geqslant \varrho_1^0$, $\varrho_2 \geqslant \varrho_2^0$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Bernstein, Sulla distribuzione degli zeri della transcendente intere, Giornale di matem. di Battaglini, 3. ser., v. 72, 1934, 99—124.
2. В. К. Иванов, Характеристика роста целой функции двух комплексных переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов, Матем. сб., т. 47 (89), 1959, 1—16.
3. Л. И. Ронкин, Об одном свойстве расположения особенностей на границе полицилиндра и применении его к целым функциям многих переменных, ДАН СССР, т. 153, № 2, 1963, 278—281.
4. Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.
5. М. М. Джрбашян, К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Изв. АН Арм ССР, т. 8, № 4, 1955, 1—23.
6. V. Bernstein, Sulla crescenza delle transcendenti intere d'ordino finito, Memoriele d. R. Accad. d'Italia, cl. sci. fis., matem. e natur., v. 4, 1933, 339—401.

Поступила 4. VI 1965 г.

Львов