О границах звездности и однолистности некоторых классов функций, регулярных в круге $|z| < 1$

В. А. Зморович

В настоящей заметке рассматриваются классы регулярных в круге $|z| < 1$ (обозначаемом в дальнейшем через E) функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, представимых в виде

$$f(z) = F(z) \cdot q(z), \tag{1}$$

где $F(z)$ пробегает некоторый класс R регулярных в E функций, нормированных условиями $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, а $q(z)$ — второй класс R_1 регулярных в E функций, нормированных условием $q(0) = 1$. Определения этих классов приводятся в §1. Сам класс функций $f(z)$ (1) будем обозначать через $Q(R, R_1)$. Целью заметки является установление границ звездности и однолистности некоторых классов типа $Q(R, R_1)$. Из полученных теорем в качестве весьма частных следствий вытекают теоремы, установленные Макгрегором [1, 2] и частично уточненные Я. Кржижем и М. О. Ридом [3]. При доказательстве теорем используются некоторые леммы, представляющие и самостоятельный интерес.

§ **1.** Введем классы R и R_1.

Определение 1. Условимся называть классом R любой класс регулярных в круге E и нормированных, как указано выше, функций $F(z)$, удовлетворяющих следующим условиям. 1) Если $F(z) \in R$, а ε — постоянная, $|\varepsilon| = 1$, то $\varepsilon^{-1} F(\varepsilon z) \in R$. 2) Существует такое число $r_0 \in (0; 1]$, что на любой окружности $|z| = r \leqslant r_0$ для любой функции $F(z) \in R$ выполняется точная в R оценка

$$\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \geqslant \lambda(r), \tag{2}$$

где $\lambda(r)$ — некоторая определенная для данного класса R, строго убывающая и непрерывная на $[0; r_0]$ функция, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(r_0) \geqslant 0$.

Примечание. Условимся обозначать функцию класса R, реализующую оценку (2) в точке $z = r$ (существование по крайней мере одной такой функции вытекает из условий, определяющих класс R), через $F(z; r)$. Сам класс R будем иногда обозначать

$$R[\lambda(r);\ r_0],$$

хотя следует заметить, что R не вполне определяется заданием r_0 и $\lambda(r)$. Однако в дальнейшем существенную роль будут играть именно эти характеристики R, так что два разных класса R с одинаковыми указанными выше характеристиками в ряде случаев будут равнозначными (при установлении границ звездности в особенности). В том случае, когда помимо указанных характеристик будут совпадать и соответствующие экстремальные функции обоих классов, эти классы совершенно равнозначны с точки зрения тех теорем, которые здесь рассматриваются.

Определение 2. Условимся называть классом R_1 любой класс регулярных в E функций $q(z)$, которые, помимо нормировки $q(0) = 1$, удовлетворяют еще следующим условиям. 1) Если $q(z) \in R_1$ и ε — константа, $|\varepsilon| = 1$, то $q(\varepsilon z) \in R_1$. 2) На каждой окружности $|z| = r < 1$ для каждой функции $q(z) \in R_1$ существует точная в R_1 оценка

$$\operatorname{Re}\frac{zq'(z)}{q(z)} \geqslant \sigma(r), \tag{3}$$

где $\sigma(r)$ — некоторая определенная для данного класса R_1, строго убывающая на $[0; 1]$ функция, непрерывная по крайней мере на $[0; 1)$, а если $\sigma(r)$ ограничена на $[0; 1)$, то непрерывная и на $[0; 1]$.

Из условия точности оценки (3) следует $\sigma(0) = 0$, а поэтому $\sigma(r) < 0$ на $(0;1)$.

Примечание. Условимся обозначать через $q(z; r)$ ту функцию класса R_1, которая реализует оценку (3) в точке $z = r$. Существование по крайней мере одной такой функции следует из определения класса R_1.

Два класса R_1, у которых совпадают оценки (3), а также соответствующие экстремальные функции, вполне равнозначны с точки зрения теорем, устанавливаемых в настоящей заметке.

Определение 3. Два класса R и R_1 условимся называть согласованными, если выполняется условие

$$\lambda(r_0) + \sigma(r_0) \leqslant 0.$$

В этом и только в этом случае уравнение $\lambda(r) + \sigma(r) = 0$ имеет корень (очевидно, единственный) на $(0; r_0]$.

Определение 4. Будем говорить, что корень $\widetilde{r}$ уравнения $\lambda(r) + \sigma(r) = 0$ двух согласованных классов R и R_1 обладает I-свойством, если

$$\operatorname{Im}\left[\frac{zF'(z; \widetilde{r})}{F(z; \widetilde{r})} + \frac{zq'(z; \widetilde{r})}{q(z; \widetilde{r})}\right]_{z=\widetilde{r}} = 0.$$

Это наверно имеет место, если экстремальные функции $F(z; \widetilde{r})$ и $q(z; \widetilde{r})$ в точках z и $\bar{z}$ круга E принимают сопряженные значения, но бывает и в других случаях.

Из сказанного в введении и определений 1—4 следует такое предложение.

Теорема 1. *Если классы $R[\lambda(r); r_0]$ и $R_1[\sigma(r)]$ согласованные, то корень $\widetilde{r}$ уравнения $\lambda(r) + \sigma(r) = 0$ является границей звездности класса $Q(R, R_1)$. Если же число $\widetilde{r}$ обладает I-свойством, то оно равно также радиусу однолистности класса $Q(R, R_1)$.*

Доказательство этой теоремы не представляет никаких затруднений, и мы его опускаем. Из этой теоремы возможны многие следствия. Мы рассмотрим некоторые из них, введя сначала в следующем параграфе специальные классы регулярных в E функций, из которых будем выбирать классы R и R_1.

§ 2. Обозначим через P класс регулярных в E функций $p(z)$, $p(0) = 1$, для которых $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в E.

Определение 5. Пусть $\operatorname{Re} h \geqslant 0$. Условимся обозначать через $P_{[h]}$ и $P_{(h)}$ классы регулярных в E функций $q(z)$, определяемые формулами

$$q(z) = \frac{p(z) + h}{1 + h}, \tag{4}$$

$$q(z)=\frac{1+h}{p(z)+h}, \tag{5}$$

где $p(z)$ пробегает класс P.

Примечание. Очевидно, $P_{[0]}=P_{(0)}=P$.

Нетрудно убедиться, что если $hh_1\neq 0$ и $\operatorname{Re}h\geqslant 0$, $\operatorname{Re}h_1\geqslant 0$, то $P_{[h]}\neq$ $\neq P_{(h_1)}$.

Затем, если обозначить

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{\operatorname{Im}h}{1+\operatorname{Re}h}, \qquad -\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2},$$

то можно доказать, что $q(z)\in P_{[h]}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(e^{-i\gamma}q(z))>$ $>\alpha\cos\gamma$ в E, где $\operatorname{Re}h=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha\in[0;1)$. Что касается класса $P_{(h)}$, то для него справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Re}h>0$, *то* $q(z)$ *тогда и только тогда принадлежит классу* $P_{(h)}$, *когда в круге* E *выполняется неравенство* $|q(z)-\tau|<$ $<|\tau|$, *где* $\tau=\dfrac{1+h}{h+\bar{h}}$.

Доказательство этой леммы мы тоже опускаем, как легко воспроизводимое.

Из этой леммы, между прочим, следует, что класс функций, введенный Макгрегором при помощи неравенства $|q(z)-1|<1$, совпадает с классом $P_{(1)}$ в наших обозначениях. Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

Определение 6. Пусть $f(z)$ регулярна в E. Обозначим

$$D_1(f)=f'(z), \quad D_2(f)=\frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad D_3(f)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}.$$

Если $\operatorname{Re}h\geqslant 0$, то под $P_{\{h\}}$ будем понимать любой из классов $P_{[h]}$ и $P_{(h)}$ (см. определение 5). Через $S^{(k)}_{\{h\}}$, $k=1,2,3$, условимся обозначать класс регулярных в E функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, определяемый формулой $D_k(f)=q(z)$, $k=1, 2, 3$, где $q(z)$ пробегает класс $P_{\{h\}}$.

Примечание. Функции классов $S^{(k)}_{\{h\}}$, $k=1, 2$, однолистны в E. Среди функций классов $S^{(3)}_{\{h\}}$, если $\operatorname{Im}h\neq 0$, есть неоднолистные в E.

При $\operatorname{Im}h=0$, полагая $h=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha\in[0;1)$, будем вместо обозначений $S^{(1)}_{[h]}$, $S^{(1)}_{[h]}$, $S^{(2)}_{[h]}$, $S^{(2)}_{(h)}$, $S^{(3)}_{[h]}$, $S^{(3)}_{(h)}$ применять обозначения

$$S^{\vee}_{\alpha},\ S^{\vee}_{(\alpha)},\ S^{*}_{\alpha},\ S^{*}_{(\alpha)},\ S^{0}_{\alpha},\ S^{0}_{(\alpha)}. \tag{6}$$

Все функции классов (6) однолистны в E, так что эти классы являются подклассами класса E регулярных нормированных однолистных в E функций. Классы S^{*}_{α} и S^{0}_{α} обычно называются соответственно классом звездных и классом выпуклых порядка α однолистных в E функций. По аналогии с этим будем называть $S^{*}_{(\alpha)}$ и $S^{0}_{(\alpha)}$ соответственно классом звездных и классом выпуклых рода α однолистных в E функций.

Обозначим через K_α любой из классов (6). Тогда при $0\leqslant\alpha'<\alpha''<1$ имеем $K_{\alpha'}\supset K_{\alpha''}$. Если L_β — еще один из классов (6), отличный по обозначению от K_α, то $K_\alpha\neq L_\beta$, если $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. При $\alpha=0$ классы (6) попарно совпадают. Получающиеся при этом совпадении классы будем обозначать $S^{\vee}$, S^{*}, S^{0}. Рассмотрим некоторые леммы.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$S_c^* = R\left[\frac{1+(2\alpha-1)r}{1+r};1\right],\quad S_{(\alpha)}^* = R\left[\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r};1\right],\quad S^0 = R\left[\frac{1}{1+r};1\right].$$

Это непосредственно следует из определений классов R, S_α^*, $S_{(\alpha)}^*$, S^0 и известных оценок.

Лемма 3. *Пусть* $q(z)\in P_{[h]}$, *где* $\operatorname{Re} h = h_1 \geqslant 0$. *Тогда на каждой окружности* $|z| = r < 1$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{Re}\frac{zq'(z)}{q(z)} \leqslant \frac{2r}{(1-r)[1+r+h_1(1-r)]}. \tag{7}$$

Эта оценка достигается только при $\operatorname{Im} h = 0$, *и экстремальная функция, реализующая ее в точке* $z = r$ *указанной окружности (в дальнейшем мы будем называть такую функцию нормированной экстремальной), имеет вид*

$$q(z;r) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}. \tag{8}$$

Эта лемма известна в литературе по экстремальным оценкам [6].

Лемма 4. *Пусть* $h \geqslant 0$. *Обозначим через* $r(h)$ *единственный на* $(2-\sqrt{3};1]$ *корень уравнения*

$$h(1+r)(4r-1-r^2) = (1-r)^3. \tag{9}$$

Тогда на каждой окружности $|z| = r < 1$ *для каждой функции* $q(z)\in P_{[h]}$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{Re}\frac{zq'(z)}{q(z)} \geqslant \sigma(r), \tag{10}$$

где

$$\sigma(r) = \frac{-2r}{(1+r)[1-r+h(1+r)]} \tag{11}$$

при $0 \leqslant r \leqslant r(h)$ и

$$\sigma(r) = -(\sqrt{a+h}-\sqrt{h})^2,\quad a = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \tag{12}$$

при $r(h) \leqslant r < 1$. *Оценка* (10) *точная. Нормированная экстремальная функция для* (11) *определяется формулой*

$$q(z;r) = \frac{1+(2\alpha-1)z}{1+z}, \tag{13}$$

а для (12) — *формулой*

$$q(z;r) = \frac{1-2\alpha\lambda z+(2\alpha-1)z^2}{1-2\lambda z+z^2}, \tag{14}$$

где

$$\alpha = \frac{h}{1+h},\quad \lambda = \frac{1}{a\cdot\varrho\sqrt{h}}(\varrho^2\sqrt{h}-\sqrt{a+h}),\quad \varrho = \frac{2r}{1-r^2},\quad h>0.$$

Доказательство. Применяем метод автора, указанный в [4, 5].

Обозначим

$$\Phi(\omega; w) = \frac{w}{\omega + h}, \quad \omega + h = \mathrm{R}e^{i\vartheta}, \quad R > 0, \quad |\omega - a| = \varrho_0 \leqslant \varrho,$$

где $|z| = r \in (0; 1)$, и рассмотрим функцию

$$l(R; \vartheta) = \min_{\psi \in [0; 2\pi]} \operatorname{Re} \Phi(\omega; w_\psi), \quad w_\psi = \frac{1}{2}(\omega^2 - 1) + \frac{1}{2}(\varrho^2 - \varrho_0^2)\, e^{i\psi}.$$

При помощи элементарных выкладок получим

$$l(R; \vartheta) = A(R)\cos\vartheta + B(R),$$

где

$$A(R) = \frac{1}{2} R + \frac{1}{2}\frac{h^2 - 1}{R} - a - h,$$

$$B(R) = \frac{1}{2R}(R^2 + 1 + h^2 + 2ah) - h.$$

Тогда, как показано в [4, 5],

$$\sigma(r) = \min_{\Gamma_r} l(R; \vartheta), \tag{15}$$

если Γ_r обозначает круг

$$R^2 - 2(a + h) R\cos\vartheta + 1 + h^2 + 2ah \leqslant 0.$$

Нетрудно доказать, что (15) достигается на диаметре $\vartheta = 0$ круга Γ_r, так что задача сводится к отысканию минимума функции

$$l_0 \equiv l(R; 0) = R + \frac{h^2 + ha}{R} - a - 2h$$

на сегменте

$$a - \varrho + h \leqslant R \leqslant a + \varrho + h.$$

Поскольку

$$\frac{dl_0}{dR} = 1 - \frac{h^2 + ha}{R^2}, \quad \frac{d^2 l_0}{dR^2} = \frac{2(h^2 + ha)}{R^3},$$

то, обозначая $R_0 = \sqrt{h^2 + ha}$ и принимая во внимание, что

$$R_0 < a + \varrho + h$$

при любых $h \geqslant 0$ и $r \in (0; 1)$, приходим к выводу, что

$$\sigma(r) = \frac{h^2 + ha}{a - \varrho + h} - \varrho - h = -\frac{2r}{(1 + r)[(1 - r) + h(1 + r)]}$$

при $R_0 \leqslant a - \varrho + h$ и

$$\sigma(r) = -(\sqrt{a + h} - \sqrt{h})^2$$

при $R_0 \geqslant a - \varrho + h$.

Рассматривая графики функций $\eta = \sqrt{h^2 + ha}$ и $\eta = a - \varrho + h$ на $0 \leqslant r < 1$, легко установить, что неравенства $R_0 \leqslant a - \varrho + h$ и $R_0 \geqslant a - \varrho + h$ равносильны соответственно неравенствам $0 \leqslant r \leqslant r(h)$ и $r(h) \leqslant r < 1$, где $r(h)$ корень (9), $r(h) \in (2 - \sqrt{3}; 1)$.

Что касается вида экстремальных функций $q(z; r)$, то здесь нужно поступить так, как указано в [4, 5], учитывая формулу (4). Таким же методом можно доказать и следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\operatorname{Re} h = 0$, $\operatorname{Im} h = \lambda \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда на любой окружности* $|z| = r < 1$ *для любой функции* $q(z) \in P_{[h]}$ *справедливы оценки*

$$-\varrho T(r; \lambda) \leqslant \operatorname{Re} \frac{zq'(z)}{q(z)} \leqslant \varrho T(r; \lambda), \tag{16}$$

где

$$T(r; \lambda) = \sqrt{\frac{1+t}{2}} \left[c \sqrt{\frac{1}{2}(2 - b^2 + b^2 t)} + b\sqrt{1 - c^2} \sqrt{\frac{1-t}{2}} \right],$$

$$b = \frac{\varrho}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}, \quad c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}, \quad a = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}, \quad \varrho = \frac{2r}{1 - r^2},$$

а t — *единственный на* $(0; 1]$ *корень уравнения*

$$b^4 t^3 + b^2 (2 - b^2) t^2 + c^2 (1 - 2b^2) t - c^2 = 0. \tag{17}$$

Оценки точные и достигаются при любом $r \in [0; 1)$ *функциями*

$$q_0(z) = \frac{1 + \varepsilon e^{-2i\gamma} z}{1 - \varepsilon z}, \tag{18}$$

где $|\varepsilon| = 1$, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} \gamma = -\lambda$, *и только ими.*

Доказательство. Поступая, как и при доказательстве предыдущей леммы, и рассматривая сперва задачу об установлении нижней оценки в (16), сводим эту задачу к отысканию в круге

$$R^2 - 2(a \cos \vartheta + \lambda \sin \vartheta) R + 1 + \lambda^2 \leqslant 0, \tag{19}$$

лежащем в полуплоскости $R > 0$, $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, минимума функции

$$l(R; \vartheta) = A(R) \cos \vartheta + B(R) \sin \vartheta + C(R), \tag{20}$$

где

$$A(R) = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1 + \lambda^2}{R} - 2a\right), \quad B(R) = -\lambda,$$

$$C(R) = \frac{1}{2R}(R^2 + 1 + \lambda^2), \quad p(z) + i\lambda = Re^{i\vartheta}.$$

Докажем, что минимум $l(R; \vartheta)$ в круге (19) достигается на окружности этого круга. Для этого покажем, что при $R > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial l}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2 \neq 0.$$

Если бы это было не так, то из уравнений

$$\frac{\partial l}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial \vartheta} = 0$$

мы получили бы

$$\cos \vartheta = \frac{1 + \lambda^2 - R^2}{1 + \lambda^2 + R^2}, \tag{21}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2\lambda R}{1 + \lambda^2 - R^2 + 2aR}. \tag{22}$$

Из (21) следует

$$R = \sqrt{1+\lambda^2}\left|\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right|.$$

Подставляя это выражение в (22), получаем

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\lambda\,|\operatorname{tg}\vartheta|}{\sqrt{1+\lambda^2} + a\,|\operatorname{tg}\vartheta|}. \tag{23}$$

Если предположим, что $\operatorname{tg}\vartheta \neq 0$, то из (23) получаем противоречие. Поэтому $\operatorname{tg}\vartheta = 0$ и, следовательно, $R = 0$ и $\vartheta = 0$.

Таким образом, действительно, функция $l(R;\ \vartheta)$ не имеет в полуплоскости $R > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, стационарных точек, а поэтому она достигает минимума и максимума в круге (19) на его окружности, что и нужно было доказать.

Уравнение окружности круга (19) дает возможность привести выражение (20) к виду

$$l(\vartheta) \equiv l(R;\ \vartheta) = \pm\sqrt{(a\cos\vartheta + \lambda\sin\vartheta)^2 - 1 - \lambda^2}\cos\vartheta.$$

В случае минимума нужно сохранить знак минус. Вводя углы ϑ_0 и ϑ_1 по формулам

$$a = \sqrt{a^2+\lambda^2}\cos\vartheta_0, \quad |\vartheta_0| < \frac{\pi}{2},$$

$$\varrho = \sqrt{a^2+\lambda^2}\sin\vartheta_1, \qquad \vartheta_1 \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right],$$

и полагая

$$\sin(\vartheta - \vartheta_0) = -\sin\vartheta_1\cdot\sin\theta,\ \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right],$$

получаем окончательно

$$l_1(\theta) \equiv l(\vartheta) = \pm\varrho\,[\cos\vartheta_0\sqrt{1 - b^2\sin^2\theta} + b\sin\vartheta_0\sin\theta]\cos\theta.$$

Нужно найти минимум этой функции на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Если $\sin\vartheta_0 \geqslant 0$, то этот минимум достигается во второй половине сегмента, если $\sin\vartheta_0 \leqslant 0$—то в первой.

Уравнение $\dot{l_1}(\theta) = 0$ можно преобразовать к виду (17), где $t = \sin\theta$. Так получается нижняя оценка в (16).

Для получения верхней оценки нужно действовать по такому же плану. Однако следует заметить, что функция (20) связана с аналогичной функцией $\tilde{l}(R;\ \vartheta)$ задачи о верхней оценке соотношением

$$\tilde{l}(R;\ \vartheta) = -l\left(\frac{1+\lambda^2}{R};\ \vartheta\right),$$

а уравнение окружности круга (19) не изменяется при замене R на $\frac{1+\lambda^2}{R}$.

Так получаем верхнюю оценку в (16).

Наконец, замечая, что обе оценки достигаются в точках окружности круга (19), мы получаем выражение (18) для экстремальных функций.

Лемма 6 доказана.

Примечание. До сих пор был известен только следующий результат: если $q(z) \in P_{[h]}$, где $\operatorname{Re} h = 0$, $\operatorname{Im} h = \lambda \in (-\infty, +\infty)$, то на каждой окружности $|z| = r < 1$ справедливы оценки

$$-\varrho \leqslant \operatorname{Re} \frac{zq'(z)}{q(z)} \leqslant \varrho, \quad \varrho = \frac{2r}{1-r^2}, \tag{24}$$

которые точны только при $\lambda = 0$. Если учесть, что в лемме 5

$$0 < T(r;\ \lambda) \leqslant 1,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $t = 1$ и, следовательно, $\lambda = 1$, то (24) непосредственно следует из (16). Доказать лемму, охватывающую леммы 3, 4, 5, до сих пор не удалось.

Заканчивая цикл лемм, используемых в настоящей работе, докажем еще одну лемму, относящуюся к общему классу регулярных однолистных нормированных в круге $|z| < 1$ функций, т. е. классу S.

Лемма 6. *Если $f(z) \in S$, то на любой окружности $|z| = r < 1$ справедлива оценка*

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geqslant \lambda(r),$$

где

$$\lambda(r) = \frac{1-r}{1+r} \tag{25}$$

при $0 \leqslant r \leqslant \operatorname{th} \frac{1}{2}$ *и*

$$\lambda(r) = \exp(-\psi \operatorname{ctg} \psi) \cos \psi \tag{26}$$

при $\operatorname{th} \frac{1}{2} \leqslant r < 1$; *здесь* $r = \operatorname{th}\left(\frac{\psi}{2\sin\psi}\right)$, $\psi \in [0;\ \pi)$. *Оценки точные. Нормированная экстремальная функция в случае* (25) *имеет вид*

$$f_0(z) = z(1+z)^{-2}, \tag{27}$$

а в случае (26)—

$$f_0(z) = \frac{r}{(1-re^{i\alpha})^2} \left(\frac{u-v}{u+v}\right)^2, \tag{28}$$

где

$$u = (\sqrt{r} + \sqrt{z})(1 - \sqrt{rz})^{\varepsilon_r},$$

$$v = (\sqrt{r} - \sqrt{z})(1 - \sqrt{rz})^{\varepsilon_r},$$

$\varepsilon_r = -e^{i\alpha}$, α—*отличный от* π *корень уравнения*

$$\alpha + \sin\alpha \ln \frac{1+r}{1-r} = \pi$$

на интервале $(0;\ \pi]$. *Степенные функции* $(1 \pm \zeta)^{\varepsilon_r}$ *определены так, что при* $\zeta = 0$ *они равны* 1.

Оценка (25) известна [3]. Однако мы докажем обе оценки, поскольку наш метод доказательства охватывает оба случая.

Доказательство. Если $f(z) \in S$, то областью значений величины

$$\zeta = \ln \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

при фиксированном значении z, $|z| = r < 1$, является круг [7]:

$$|\zeta| \leqslant \ln \frac{1+r}{1-r}. \tag{29}$$

Обозначая $\varrho = \ln \frac{1+r}{1-r}$, откуда $r = \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\varrho\right)$, введем в рассмотрение функцию $w = e^{\zeta}$ и будем искать $\min \operatorname{Re} w$ в круге (29). Достаточно рассмотреть $\operatorname{Re} w$ на окружности $|\zeta| = \varrho$. Тогда легко доказать, что при $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ минимум $\operatorname{Re} w$ на окружности $|\zeta| = \varrho$ равен $e^{-\varrho} = \frac{1-r}{1+r}$. Если же $\varrho > 1$, то

$$\lambda(r) = \min_{|\zeta|=\varrho} \operatorname{Re} w = \exp(\varrho\cos\varphi)\cos(\varrho\sin\varphi),$$

где φ—единственный на $(0;\ \pi)$ корень уравнения

$$\varphi + \varrho\sin\varphi = \pi.$$

Полагая $\psi = \pi - \varphi$, получаем $\varrho = \frac{\psi}{\sin\psi}$. Итак, в этом случае

$$\lambda(r) = \exp(-\psi \operatorname{ctg}\psi), \quad r = \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\frac{\psi}{\sin\psi}\right), \quad \psi \in [0;\ \pi],$$

что и требовалось доказать.

Что касается экстремальных функций (27) и (28), то первая из них получается из (28) при $\alpha = \pi$, так что, собственно, следует говорить только об одной экстремальной функции (28), вид которой и единственность при принятой в работе нормировке вытекают из результатов исследования [8].

Примечание. Интересно заметить, что на интервале $\left(\operatorname{th}\frac{1}{2};\ 1\right)$ имеем

$$\lambda(r) = C(r)\frac{1+r}{1-r},$$

где $C(r) = \exp\left(-\psi\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}\right)\cos\psi$ и $|C(r)| < 1$, $C(r) \to -1$ при $r \to 1$, причем изменение $C(r)$ монотонное, поскольку $C'(r) < 0$ при $r \in \left[\operatorname{th}\frac{1}{2};\ 1\right)$.

§3. Рассмотрим некоторые теоремы, являющиеся следствиями теоремы 1 и лемм предыдущего параграфа.

Теорема 2. *Пусть даны классы $R[\lambda(r);\ (r_0]$ и $R_1 = P_{[h]}$, где $h \geqslant 0$. Введем функцию*

$$\Phi(r) = \frac{2r}{(1-r)^2\lambda(r)} - \frac{1+r}{1-r},$$

где $r \in [0;\ r_0]$. При $r_0 = 1$ полагаем $\Phi(1) = \infty$. Если $\Phi(r_0) \geqslant 0$ и $r_0 < 1$, то при $0 \leqslant h \leqslant \Phi(r_0)$, а если $r_0 = 1$, то при всех $h \geqslant 0$, радиус $\tilde{r}$ звездности класса $Q(R,\ R_1)$ равен единственному на $(0;\ r_0]$ корню уравнения

$$\Phi(r) = h.$$

Если число $\tilde{r}$ обладает I-свойством, то оно равно также радиусу однолистности этого класса. Нормированная экстремальная функция (вообще, не единственная) определяется формулой

$$f(z;\tilde{r}) = F(z;\tilde{r})\frac{1-z}{1+(1-2\alpha)z},$$

где $h = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Эта теорема легко доказывается на основании теоремы 1 и леммы 3. Приведем некоторые следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть* $R = S^*_\beta$, $\beta \in [0; 1)$, $R_1 = P_{(h)}$, $h \geqslant 0$. *Тогда радиус звездности и одновременно однолистности класса* $Q(R, R_1)$ *равен единственному на* $(0; 1)$ *корню уравнения*

$$h(1-r)^2[1+(2\beta-1)r] = (1+r)[(4-2\beta)r - 1 + (2\beta-1)r^2]. \tag{30}$$

Это вытекает из лемм 2, 3 и теоремы 2. Число $\tilde{r}$ в данном случае обладает I-свойством, ибо нормированная экстремальная функция класса $Q(S^*_\beta, P_{(h)})$, как легко убедиться, является типично-вещественной.

Три простых частных случая уравнения (30) соответствуют предположениям: 1) $h = 0$, 2) $h = 1$, 3) $\beta = \frac{1}{2}$.

В этих случаях получаются следующие формулы для радиуса $\tilde{r}$ однолистности (и звездности):

$$\tilde{r} = (2 - \beta + \sqrt{3 - 2\beta + \beta^2})^{-1}, \tag{31}$$

$$\tilde{r} = 2(3 - 2\beta + \sqrt{9 - 4\beta + 4\beta^2})^{-1}, \tag{32}$$

$$\tilde{r} = (1 + 2\sqrt{1-\alpha})^{-1}, \tag{33}$$

где $h = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Частные случаи формул (31) и (32) при $\beta = 0$ получены Макгрегором [1, 2]. Им же рассмотрены также две задачи, которые, по существу, эквивалентны двум частным случаям задачи, рассмотренной нами, а именно при $\beta = \frac{1}{2}$, $h = 0$ и при $\beta = \frac{1}{2}$, $h = 1$ (см. замечание к лемме 1). Соответствующие значения $\tilde{r}$ получаются из формулы (33) [1, 2].

Следствие 2. *Пусть* $R = S^*_\beta$ и $R_1 = P_{(h)}$, $h \geqslant 0$. *Тогда радиус* $\tilde{r}$ *однолистности (и одновременно звездности) класса* $Q(R, R_1)$ *равен единственному на интервале* $(0; 1)$ *корню уравнения*

$$h(1-r)^3 = 2r[1 + (1-2\beta)r] - (1-r)^2(1+r). \tag{34}$$

Это сразу получается из теоремы 2 и лемм 2, 3.

Примечание. Если $h = 1$, то из (34) получаем

$$\tilde{r} = 2(3 + \sqrt{9 - 8\beta})^{-1}.$$

Второй простой случай соответствует предположению $\alpha = \beta$, где $\alpha = \frac{h}{1+h}$. Здесь мы получаем

$$\tilde{r} = (2 - \alpha + \sqrt{3 - 4\alpha + \alpha^2})^{-1}.$$

Следствие 3. *Пусть* $R = S$, $R_1 = P_{[h]}$, $h \geqslant 0$. *Если* $0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}e(e^2 - 3)$, *то радиус однолистности (и одновременно звездности) класса* $Q(R, R_1)$ *равен единственному на* $\left(2 - \sqrt{3};\ \operatorname{th}\frac{1}{2}\right]$ *корню уравнения*

$$h(1-r)^3 = (1+r)(4r - 1 - r^2).$$

Если же $h > \frac{1}{2} e(e^2 - 3)$, *то радиус звездности (но, вообще говоря, не однолистности) рассматриваемого класса определяется формулой*

$$\tilde{r} = \operatorname{th}\left(\frac{\psi}{2\sin\psi}\right), \tag{35}$$

где ψ*—единственный на* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *корень уравнения*

$$h = \frac{1}{\cos\psi}\exp(\psi\csc\psi)\,[\operatorname{sh}(\psi\csc\psi)\ \exp(\psi\operatorname{ctg}\psi) - \cos\psi]. \tag{36}$$

Для доказательства нужно применить теорему 2 и лемму 6, учитывая что при $h \in \left[0; \frac{1}{2} e(e^2 - 3)\right]$ число $\tilde{r}$ обладает I-свойством, а при $h > \frac{1}{2} e(e^2 - 3)$, вообще говоря, не обладает.

Примечание. Формулы (35) и (36) можно рассматривать как параметрическое решение задачи о радиусе звездности класса $Q(S, P_{(h)})$ при $h > \frac{1}{2} e(e^2 - 3)$. Классы $Q(S, P)$ и $Q(S, P_{(1)})$ (в наших обозначениях; см. замечание к лемме 1) рассматривал Макгрегор [1, 2]. Его результаты в этих случаях уточнили Я. Кржиж и М. О. Рид [3]. На возможность этого уточнения указала также Г. Кузьмина (РЖ, 3Б 173, 1964). Перейдем к установлению некоторых теорем этого типа, связанных с леммой 4.

Теорема 3. *Пусть заданы классы* $R[\lambda(r); r_0]$ *и* $R_1 = P_{[h]}$, $h \geqslant 0$. *Введем в рассмотрение функции*

$$T(r) = \frac{(1-r)^3}{(1+r)(4r - 1 - r^2)}, \quad U(r) = \frac{2r}{(1+r)^2\lambda(r)} - \frac{1-r}{1+r},$$

$$V(r) = \frac{1}{4\lambda(r)}\left[\frac{1+r^2}{1-r^2} - \lambda(r)\right]^2$$

и обозначим через r_h *единственный на* $(2 - \sqrt{3}; 1)$ *корень уравнения* $T(r) = h$. *Если* $r_0 \leqslant r_h$ *и* $U(r_0) \geqslant h$, *либо если* $r_0 \geqslant r_h$ *и* $U(r_h) \geqslant h$, *то радиус* $\tilde{r}$ *звездности класса* $Q(R, P_{[h]})$ *равен единственному на* $(0; r_0]$ *корню уравнения*

$$U(r) = h. \tag{37}$$

Если же $r_0 \geqslant r_h$ *и* $V(r_0) \geqslant h$, *но* $V(r_h) \leqslant h$, *то этот радиус равен единственному на* $(r_h; r_0)$ *корню уравнения*

$$V(r) = h. \tag{38}$$

Если число $\tilde{r}$ *в любом из этих случаев обладает* I*-свойством, то оно также равно радиусу однолистности класса* $Q(R, P_{[h]})$. *Экстремальная функция (вообще, не единственная) определяется формулой*

$$f(z; \tilde{r}) = F(z; \tilde{r})\, q(z; \tilde{r})$$

(см. примечания к определениям классов R и R_1).

Под $q(z; \tilde{r})$ следует понимать (13) в случае (37) и (14) в случае (38).

Доказательство этой теоремы основано на применении теоремы 2 и леммы 4, а также на монотонности функций $T(r)$, $U(r)$, $V(r)$ и их непрерывности на $(0, r_0)$. Соответствующие рассуждения, как не представляющие никаких принципиальных затруднений, мы опускаем.

С л е д с т в и е 1. *Если предположить в теореме 3, что* $r_0 = 1$, то, *обозначая через* r_β *единственный на* $[2 - \sqrt{3};\ 1)$ *корень уравнения*

$$\lambda(r) = \frac{4r - 1 - r^2}{1 - r^2} \equiv W(r)$$

и полагая $h_\beta = T(r_\beta)$, *получаем при* $h \in [0;\ h_\beta]$ *для* $\tilde{r}$ *уравнение* (37), *а при* $h > h_\beta$ *—уравнение* (38). *Замечания об* I*-свойстве и виде экстремальной функции остаются в силе.*

Чтобы убедиться в справедливости сказанного, достаточно заметить, что при $r_0 = 1$ всегда $T(r_0) \leqslant h$ и неравенства $U(r_h) \geqslant h$ и $U(r_h) \leqslant h$ равносильны неравенствам $\lambda(r_h) \leqslant W(r_h)$ и $\lambda(r_h) \geqslant W(r_h)$.

С л е д с т в и е 2. *Если положить в теореме* 3 $R = S^*_\beta$, *то нужно воспользоваться предыдущим следствием, причем*

$$r_\beta = 2\left(3 - \beta + \sqrt{5 - 2\beta + \beta^2}\right)^{-1},$$

а уравнения (37) *и* (38) *приобретают соответственно вид*

$$1 + h + 2(\beta + \beta h - 2) r + (h - 1)(2\beta - 1) r^2 = 0$$

и

$$h = \frac{r^2 (\beta r + 1 - \beta)^2}{(1 + r)(1 - r)^2 [1 + (2\beta - 1) r]}.$$

С л е д с т в и е 3. *Если в теореме* 3 *положить* $R = S^*_{(\beta)}$, *то снова нужно воспользоваться следствием* 1, *при этом получаем для* r_β *уравнение*

$$1 - (2 + \beta) r - 2(1 - 2\beta) r^2 + (1 - \beta) r^3 = 0,$$

а уравнения (37) и (38) принимают соответственно вид

$$h = \frac{-1 + 3r + (3 - 4\beta) r^2 - r^3}{(1 + r)^2 (1 - r)}$$

и

$$h = \frac{r^2 (1 - \beta + r - \beta r^2)^2}{(1 - r)^2 (1 + r)[1 + (1 - 2\beta) r]}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. T. H. MacGregor, The radius of univalence of cartain analytic functions. I, Proc. Amer. Math. Soc, 14, 1963, 514—520.
2. T. H. MacGregor, The radius of univalence of certain analytic functions, II, Proc. Amer. Math. Soc., 14, 1963, 521—524.
3. J. Krzyz and M. O. Reade, The radius of univalence of certain analytic functions, Michigan Math., vol. 11, 1964, 157—159.
4. В. А. Зморович, Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій, Доп. АН УРСР, № 8, 1965.
5. В. А. Зморович, Об одном классе экстремальных задач, связанных с регулярными функциями с положительной вещественной частью в круге $|z| < 1$, УМЖ, № 4, 1965, 12—21.
6. M. S. Robertson, Extremal problems for analytic functions with positive real part and applications, Trans. Amer. Math. Soc., 106, N 2, 1963, 236—253.
7. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М.— Л., 1952.
8. Н. А. Лебедев, Мажорантная область для выражения $I = \ln \frac{z^\lambda\, [f'(z)]^{1-\lambda}}{[f(z)]^\lambda}$ в классе S, Вестник ЛГУ, № 8, 1955, 29—41.

Поступила 17.IX 1965 г.
Киев