1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18 № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Продолжение теплицевых форм с сохранением числа положительных квадратов

И. С. Иохвидов

Установлены необходимые и достаточные условия существования бесконечного продолжения теплицевой формы с сохранением числа ее положительных квадратов. Одновременно получен ряд результатов относительно изменения ранга и сигнатуры теплицевых форм одного класса при их продолжениях.

§1. Объектом нашего рассмотрения являются теплицевы формы, т. е. эрмитовы формы порядка n ($= 1, 2, \ldots$) вида

$$\sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p-q}\xi_p\overline{\xi}_q \, (c_{-p} = \overline{c}_p;\ p = 0,\ 1, \ldots, n-1). \tag{1}$$

На протяжении всей работы будет применяться обозначение

$$\Delta_j \equiv \det|c_{p-q}|_{p,q=0}^{j} = \begin{vmatrix} c_0 \overline{c}_1 & \ldots & \overline{c}_j \\ c_1 c_0 & \ldots & \overline{c}_{j-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_j c_{j-1} & \ldots & c_0 \end{vmatrix} \quad (j = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Следует при этом помнить, что Δ_j есть определитель порядка $(j+1)$. Кроме того, положим $\Delta_{-1} \equiv 1$.

Во второй части монографии [1] было установлено следующее предложение (теорема 5.8):

А. *Если теплицева форма (1) вырождена, ранг ее* ϱ ($0 \leqslant \varrho < n$) *и при этом* $\Delta_{\varrho-1} \neq 0$, *то последовательность коэффициентов* $\{c_p\}_0^{n-1}$ *допускает (и притом единственное) бесконечное продолжение*

$$c_0,\ c_1, \ldots, c_{n-1},\ c_n,\ c_{n+1}, \ldots, \tag{2}$$

обладающее тем свойством, что все формы

$$\sum_{p,q=0}^{m-1} c_{p-q}\xi_p\overline{\xi}_q \, (c_{-p} = \overline{c}_p;\ p = 0,\ 1, \ldots, m-1;\ m = n+1,\ n+2, \ldots) \tag{3}$$

сохраняют то же число $\varkappa$ ($\geqslant 0$) *положительных квадратов, что и исходная форма* (1).

При этом ранг, а значит и сигнатура всех форм (3) *остаются теми же, что и у формы* (1).

Последнее утверждение предложения А является обращением другого результата из [1] (теоремы 5.6), а именно:

Б. *Если бесконечная последовательность* (2) *обладает тем свойством, что все формы* (3) *имеют один и тот же ранг* ϱ, то $\Delta_{\varrho-1} \neq 0$.

Одной из главных целей настоящей работы является обращение первой части предложения А. Оказывается, что имеет место следующий аналог предложения Б:

Теорема 1. *Пусть форма* (1) *вырождена, ранг ее равен* ϱ $(0 \leqslant \varrho < n)$, *а число положительных квадратов равно* $\varkappa$ $(\varkappa \geqslant 0)$. *Если последовательность коэффициентов* $\{c_p\}_0^{n-1}$ *допускает бесконечное продолжение* (2), *обладающее тем свойством, что все формы* (3) *сохраняют одно и то же число* $\varkappa$ *положительных квадратов, то* $\Delta_{\varrho-1} \neq 0$.

Эту теорему мы получим как следствие более общего результата, составляющего содержание сформулированной ниже основной теоремы:

Теорема 2. *Если форма* (1) *имеет ранг* ϱ, *а* $\Delta_{\varrho-1} = 0$, *то при любом продолжении последовательности* $\{c_p\}_0^{n-1}$ *произвольным элементом* c_n *число положительных и число отрицательных квадратов соответствующей продолженной тёплицевой формы возрастут* (*каждое*) *по сравнению с этими числами у исходной формы* (1) *на единицу.*

Заметим, что хотя предложения А и Б носят чисто алгебраический характер (в частности, как указывалось в [1], предложение Б есть аналог соответствующей теоремы Кронекера для ганкелевых форм — см., напр., [2], гл. XV, следствие из теоремы 7), в [1] удалось получить для них довольно простые теоретико-операторные доказательства.

Что же касается приводимого в § 3 доказательства нашей основной теоремы 2, то оно выдержано в чисто алгебраическом духе теории матриц и форм. Было бы интересно найти и к этой теореме теоретико-операторный подход.

§2. Доказательству теоремы 2 мы предпошлем ряд вспомогательных предложений. Некоторые из них (леммы 1, 2 и 6) совершенно прозрачны и приводятся здесь лишь для облегчения чтения статьи. Что же касается других (леммы 3—5), то для их установления потребовался более детальный анализ.

Лемма 1. *Пусть* $A_{n+1} = \| a_{jk} \|_{j,k=1}^{n+1}$ — *эрмитова матрица ранга* ϱ_1. *Рассмотрим «усеченную» матрицу* $A_n = \| a_{jk} \|_{j,k=1}^{n}$, *ранг которой обозначим* ϱ.

Тогда $0 \leqslant \varrho_1 - \varrho \leqslant 2$.

Доказательство непосредственно следует, например, из минимаксимальных свойств собственных чисел эрмитовых форм. В самом деле, соотношение $\varrho_1 \geqslant \varrho$ очевидно. Рассмотрим теперь формы

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k \text{ и } \sum_{j,k=1}^{n+1} a_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k, \tag{4}$$

ранги которых равны ϱ и ϱ_1 соответственно. Первая форма получается из второй наложением одной линейной однородной связи: $\xi_{n+1} = 0$. Отсюда следует (см., напр., [2], гл. X, теорема 14), что собственные числа этих форм перемежаются, и поэтому их ранги ϱ и ϱ_1 не могут отличаться друг от друга больше, чем на две единицы.

Лемма 2. *Если в условиях леммы* 1 *имеем* $\varrho_1 = \varrho + 2$, *то* (*соответственные*) *сигнатуры* σ *и* σ_1 *у форм* (4) *совпадают*: $\sigma = \sigma_1$.

Доказательство. Из условия видно, что

$$n + 1 \geqslant \varrho_1 = \varrho + 2, \text{ т. е. } \varrho < n$$

и, стало быть, первая из форм (4) вырождена. Ее дефект обозначим d ($\equiv n - \varrho > 0$), а дефект второй формы обозначим d_1. Тогда

$$d_1 = (n+1) - \varrho_1 = n - \varrho - 1 = d - 1,$$

т. е. при переходе от первой формы ко второй одно из нулевых собственных значений первой формы исчезает. В силу перемежаемости собственных чисел форм (4), отсюда следует, что по сравнению с первой формой у продолженной формы появляются еще одно положительное и одно отрицательное собственные значения, откуда и вытекает, что $\sigma_1 = \sigma$.

Следующие ниже три леммы тесно связаны между собой. Центральной из них является лемма 4, составляющая основу многих дальнейших рассуждений.

Лемма 3. *Пусть $A = \| a_{pq} \|_{p,q=1}^{n}$ — эрмитова матрица ранга ϱ, причем ее дефект $d = n - \varrho \geqslant 2k$, где натуральное $k > 0$. Выберем произвольно k комплексных чисел $\zeta_{n-k+1}, \zeta_{n-k+2}, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n$ и рассмотрим эрмитову матрицу порядка $\varrho + 2k$:*

$$M^{(k)}(\zeta) \equiv$$

$$\equiv \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccccc}
a_{11} & \dots & a_{1\varrho} & a_{1,\varrho+1} & \dots & a_{1,\varrho+k} & \bar\zeta_{n-k+1} & \bar\zeta_{n-k+2} & \dots & \bar\zeta_{n-1} & \bar\zeta_n \\
a_{21} & \dots & a_{2\varrho} & a_{2,\varrho+1} & \dots & a_{2,\varrho+k} & a_{2,n-k+1} & \bar\zeta_{n-k+1} & \ddots & \ddots & \bar\zeta_{n-1} \\
\cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho,\varrho+1} & \dots & a_{\varrho,\varrho+k} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \bar\zeta_{n-k+2} \\
\cline{1-3}
a_{\varrho+1,1} & \dots & a_{\varrho+1,\varrho} & a_{\varrho+1,\varrho+1} & \dots & a_{\varrho+1,\varrho+k} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{\varrho+k,1} & \dots & a_{\varrho+k,\varrho} & a_{\varrho+k,\varrho+1} & \dots & a_{\varrho+k,\varrho+k} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \bar\zeta_{n-k+1} \\
\hline
\zeta_{n-k+1} & a_{n-k+1,2} & \dots & & & & a_{n-k+1,n-k+1} & \dots & & & \\
\zeta_{n-k+2} & \zeta_{n-k+1} & \ddots & \ddots & & & \vdots & \ddots & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \\
\zeta_{n-1} & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & \vdots \\
\zeta_n & \zeta_{n-1} & \dots & \zeta_{n-k+2} & \zeta_{n-k+1} & & & & \dots & & a_{nn}
\end{array} \right\|,$$

*составленную следующим образом: главный минор $\| a_{pq} \|_{p,q=1}^{\varrho}$ исходной матрицы A окаймлен сперва ближайшими к нему k строками и k столбцами, а затем — последними k строками и k столбцами матрицы A, после чего элементы, стоящие в нижнем левом и верхнем правом углах заменены числами $\zeta_{n-k+1}, \zeta_{n-k+2}, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n$ (и сопряженными с ними), как показано на схеме *.*

Тогда функция $\det M^{(k)}(\zeta)$ векторного аргумента $\zeta = (\zeta_{n-k+1}, \zeta_{n-k+2}, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n)$ не зависит от последних $(k-1)$ его координат $\zeta_{n-k+2}, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n$.

Доказательство. При $k = 1$ заключение леммы не содержит никакого утверждения. Поэтому пусть $k \geqslant 2$. В полном разложении определителя $\det M^{(k)}(\zeta)$, в силу эрмитовой структуры матрицы $M^{(k)}(\zeta)$, каждому

* При $\rho = 0$ для составления матрицы $M^{(k)}(\zeta)$ используются любые $2k$ линий (строк и столбов) матрицы A. В этом случае утверждение леммы 3 тривиально.

слагаемому отвечает комплексно сопряженное слагаемое. Поэтому, для того чтобы обнаружить, что $\det M^{(k)}(\zeta)$ не зависит, скажем, от величины ζ_j, достаточно убедиться в том, что из разложения $\det M^{(k)}(\zeta)$ выпадают все слагаемые, содержащие множитель $\overline{\zeta}_j$ (слагаемые с множителем ζ_j выпадут тогда автоматически). Здесь всюду $j = n-k+2, \ldots, n-1, n$.

Начнем с элемента $\overline{\zeta}_n$. В разложении $\det M^{(k)}(\zeta)$ по первой строке дополнение этого элемента есть определитель порядка $\varrho + 2k - 1$, причем только $2k-2$ его столбцов содержат координаты «ζ» и «$\overline{\zeta}$». Остальные же $(\varrho + 2k - 1) - (2k - 2) = \varrho + 1$ столбцов принадлежат исходной матрице A, ранг которой ϱ, и потому они линейно зависимы. Отсюда следует, что рассматриваемое дополнение равно нулю. Таким образом, при $k = 2$ лемма доказана.

Пусть теперь $k > 2$. Рассмотрим снова разложение $\det M^{(k)}(\zeta)$ по первой строке. В этом разложении, как мы видели, минор элемента $\overline{\zeta}_n$ равен нулю. Минор элемента $\overline{\zeta}_{n-1}$ также равен нулю, ибо этот минор снова содержит $\varrho + 1$ столбцов матрицы A. Миноры же остальных элементов, вообще говоря, отличны от нуля, но все они содержат координату $\overline{\zeta}_{n-1}$ в правом верхнем углу, а потому не зависят от нее (подобно тому, как весь $\det M^{(k)}(\zeta)$ не зависит от $\overline{\zeta}_n$).

Ясно, что мы можем продолжить это рассуждение «индуктивно» применительно к следующим координатам $\overline{\zeta}_{n-2}, \ldots, \overline{\zeta}_{n-k+2}$ *, «спускаясь» каждый раз к минорам все более низких порядков, чем и завершим доказательство леммы.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 эрмитова матрица A имеет теплицеву структуру: $A = \| c_{p-q} \|_{p,\, q=0}^{n-1}$, то*

$$\det M^{(k)}(\zeta) = (-1)^k \Delta_{\varrho-1} \, | \zeta_{n-k+1} - c_{n-k} |^{2k}.$$

Доказательство. Воспользовавшись леммой 3, заменим сразу в матрице $M^{(k)}(\zeta)$ все числа ζ_j $(j = n-k+2, \ldots, n-1, n)$ соответствующими элементами c_{j-1} исходной матрицы A (при $k = 1$ этот шаг рассуждения опускается). Что же касается величины ζ_{n-k+1}, оставшейся еще в двух отчеркнутых на схеме матрицы $M^{(k)}(\zeta)$ диагоналях, то заменим ее всюду (т. е. $2k$ раз) суммой $(\zeta_{n-k+1} - c_{n-k}) + c_{n-k}$. Применим теперь $2k$ раз теорему сложения определителей и с ее помощью разобьем определитель $\det M^{(k)}(\zeta)$ на 2^{2k} слагаемых, расчленяя всякий раз столбец, где стоит одна из величин $(\overline{\zeta}_{n-k+1} - \overline{c}_{n-k}) + \overline{c}_{n-k}$, на два столбца:

$$\begin{pmatrix} \overline{\zeta}_{n-k+1} - \overline{c}_{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \overline{c}_{n-k} \\ \overline{c}_{n-k-1} \\ \overline{c}_{n-k-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

и аналогично для «сопряженных» столбцов.

---

* Это рассуждение уже не применимо к $\overline{\zeta}_{n-k+1}$, так как дополнение этого элемента первой строки есть определитель порядка $\rho+2k-1$, у которого $2k-1$ столбцов (и строк) содержат координаты «ζ» и «$\overline{\zeta}$».

При этом из каждого определителя-слагаемого можно будет вынести множитель вида

$$(\overline{\zeta}_{n-k+1}-\overline{c}_{n-k})^{\mu}(\zeta_{n-k+1}-c_{n-k})^{\nu}\ (\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ldots,k)$$

так, чтобы после этого вынесения остающийся определитель не содержал уже координат «ζ» и «$\overline{\zeta}$».

Поскольку все определители, при которых стоят такие множители с суммой показателей $\mu+\nu<2k$, будут содержать по $(\varrho+1)$ строк (или столбцов) исходной матрицы A, они обратятся в нуль. Единственное же слагаемое, в котором $\mu=\nu=k$, сведется, как нетрудно подсчитать, к произведению $(-1)^k\,|\zeta_{n-k+1}-c_{n-k}|^{2k}\,\Delta_{\varrho-1}$.

В самом деле, если начать с алгебраических дополнений элементов $(\overline{\zeta}_{n-k+1}-\overline{c}_{n-k})$, то они при каждом очередном шаге будут накапливать множители $(-1)^{\varrho+k}$, т. е. после k шагов появится множитель $(-1)^{(\varrho+k)k}$. Беря затем дополнения элементов $(\zeta_{n-k+1}-c_{n-k})$, обнаружим накопление множителей $(-1)^{\varrho+2}$, т. е. после k шагов получим $(-1)^{(\varrho+2)}\,k$. В итоге имеем $(-1)^{(\varrho+k)k}\cdot(-1)^{(\varrho+2)k}=(-1)^{k(2\varrho+2+k)}=(-1)^{k^2}=(-1)^k$. Что же касается минора $\Delta_{\varrho-1}$, то его появление в окончательном результате следует из тёплицевой структуры матрицы A.

Замечание. Из доказательств лемм 3 и 4 видно, что обе они допускают различные обобщения. В частности, в лемме 3 левый верхний угол матрицы $M^{(k)}(\zeta)$ может занимать любой главный минор порядка $\varrho+k$ матрицы A, правый нижний — любой главный минор порядка k, сформированный из оставшихся $n-\varrho-k\,(\geqslant k)$ строк и столбцов матрицы A.

Лемму 4 можно было бы сформулировать для любой эрмитовой матрицы A (а не только для тёплицевой) и доказать, что

$$\det M^{(k)}(\zeta)=(-1)^k C\,|\zeta_{n-k+1}-a_{1,n-k+1}|^2\ldots|\zeta_{n-k+1}-a_{kn}|^2,$$

где C — некоторый минор порядка ϱ матрицы A.

Мы не останавливаемся более подробно на этих и других возможных обобщениях лемм 3 и 4, поскольку эти обобщения нам в дальнейшем не понадобятся.

Лемма 5. *Пусть (эрмитова) теплицева матрица $\|c_{p-q}\|_{p,\,q=0}^{m}$ порядка $m+1$ вырождена, т. е. имеет ранг $\varrho_1<m+1$, а «укороченная» матрица $\|c_{p-q}\|_{p,q=0}^{m-1}$ имеет ранг $\varrho<\varrho_1$, причем определитель $\Delta_{\varrho-1}\neq 0$. Тогда $\varrho_1=\varrho+2$.*

Доказательство. Согласно лемме 1, $\varrho_1\leqslant\varrho+2$. Далее, поскольку $\varrho<\varrho_1$, то $\varrho+2\leqslant\varrho_1+1\leqslant m+1$, т. е. $\varrho\leqslant m-1$ и, в частности, $\Delta_{m-1}=0$. Так как при этом $\Delta_{\varrho-1}\neq 0$, то, применяя предложение A (см. § 1), можно продолжить последовательность $c_p\}_0^{m-1}$ коэффициентом c'_m так, чтобы последовательности $c_0,\ c_1,\ldots,c_{m-1},\ c'_m$ отвечала тёплицева форма ранга $\varrho\,(<\varrho_1)$. Отсюда, между прочим, следует, что $c'_m\neq c_m$.

Рассмотрим теперь у матрицы $\|c_{p-q}\|_{p,q=0}^{m}$ минор порядка $\varrho+2$:

$$\det M^{(1)}(c_m)=\left|\begin{array}{cccc|c|c}
c_0 & \overline{c}_1 & \ldots & \overline{c}_{\varrho-1} & \overline{c}_\varrho & \overline{c}_m\\
c_1 & c_0 & \ldots & \overline{c}_{\varrho-2} & \overline{c}_{\varrho-1} & \overline{c}_{m-1}\\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot\\
c_{\varrho-1} & c_{\varrho-2} & \ldots & c_0 & \overline{c}_1 & \overline{c}_{m-\varrho+1}\\
\hline
c_\varrho & c_{\varrho-1} & \ldots & c_1 & c_0 & \overline{c}_{m-\varrho}\\
\hline
c_m & c_{m-1} & \ldots & c_{m-\varrho+1} & c_{m-\varrho} & c_0
\end{array}\right|$$

Применяя лемму 4 при $n = m+1$, $k = 1$, $\zeta_n = c_m$ и $c_{n-1} = c'_m$, имеем

$$\det M^{(1)}(c_m) = -\Delta_{\varrho-1} |c_m - c'_m|^2 \neq 0,$$

откуда и следует, что $\varrho_1 = \varrho + 2$*.

Замечание. Как выяснится в дальнейшем (см. § 3, следствие), заключение леммы 5 остается в силе и при $\Delta_{\varrho-1} = 0$, если только $\Delta_{\varrho_1-1} = 0$. Более этого, в этом случае (т. е. при $\Delta_{\varrho_1-1} = 0$) условие $\varrho < \varrho_1$ становится лишним.

Лемму 5 можно было бы вывести и непосредственно из предложения А (минуя лемму 4), если воспользоваться следующим элементарным фактом:

Лемма 6. *Пусть задана (эрмитова) теплицева матрица* $\|c_{p-q}\|_{p,q=0}^{n-1}$ *порядка* n. *Если* $\Delta_{n-2} \neq 0$, *а* $\Delta_{n-1} = 0$, *то каковы бы ни были числа* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, *уравнение*

$$\Delta_n(\zeta) \equiv \begin{vmatrix} c_0 & \bar{c}_1 & \ldots & \bar{c}_{n-1} & \bar{\zeta} \\ c_1 & c_0 & \ldots & \bar{c}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 & \bar{a}_1 \\ \zeta & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = 0$$

имеет единственное решение ζ.

Доказательство (ср. [1], ч. II, § 23) немедленно следует из детерминантного тождества Сильвестра [2], в силу которого рассматриваемое уравнение можно (поскольку $\Delta_{n-2} \neq 0$) переписать в виде

$$(\Delta_n(\zeta)\, \Delta_{n-2} \equiv)\ \Delta_{n-1} \cdot \alpha - \left\| \begin{matrix} c_1 & c_0 & \ldots & \bar{c}_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \\ \zeta & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{matrix} \right\|^2 = 0$$

или (так как $\Delta_{n-1} = 0$) в виде

$$|\zeta \cdot \Delta_{n-2} - \beta|^2 = 0,$$

где α, β — некоторые комплексные числа. А поскольку $\Delta_{n-2} \neq 0$, то лемма 6 доказана.

§ 3. В этом параграфе мы докажем основную теорему — теорему 2, сформулированную выше в § 1.

---

* Заметим, что при $\varrho = 0$ имеем

$$\Delta_{\varrho-1} = \Delta_{-1} = 1,\ c'_m = 0,\ \det M^{(1)}(c_m) = \begin{vmatrix} 0 & \bar{c}_m \\ c_m & 0 \end{vmatrix} = -|c_m|^2 \neq 0,\ \varrho_1 = 2$$

в полном соответствии с утверждением леммы 5. В дальнейшем случай, когда ранг укороченной формы равен нулю, мы не будем выделять особо, поскольку он укладывается в общую схему (ср. подстрочное примечание к формулировке леммы 3).

Условие теоремы предусматривает, что $\Delta_{\varrho-1}=0$, где ϱ — ранг формы (1). Отсюда сразу следует, что $\varrho \geqslant 2$. В самом деле, при $\varrho=0$ мы имели бы $\Delta_{\varrho-1}=\Delta_{-1}=1\neq 0$. При $\varrho=1: c_0=\Delta_0=\Delta_{\varrho-1}=0$ и, каков бы ни был первый отличный от нуля коэффициент c_h в последовательности $(c_0=)\ 0$, $0,\ldots, 0,\ c_h(\neq 0)\ (0<h\leqslant n-1)$, имеем

$$\begin{vmatrix} c_0 & \overline{c}_h \\ c_h & c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \overline{c}_h \\ c_h & 0 \end{vmatrix} = -|c_h|^2 \neq 0,$$

т. е. ранг матрицы $\| c_{p-q} \|_{p,q=0}^{n-1}$ не меньше двух $(\varrho \geqslant 2)$ вопреки предположению.

Дальнейшее доказательство проведем по индукции, для чего установим сперва справедливость теоремы при $\varrho=2$.

Итак, пусть форма (1) имеет ранг $\varrho=2$ и $\Delta_1=\Delta_{\varrho-1}=0$.

Для сокращения речи в дальнейшем (ср. [1]) под *рангом последовательности* $\{c_p\}_0^h$ $(h=0,\ 1,\ 2,\ldots, n-1)$ будем понимать ранг соответствующей формы $\sum\limits_{p,q=0}^{h} c_{p-q}\xi_p\overline{\xi}_q$.

Рассмотрим теперь два представляющихся возможными случая:

1) $c_0=\Delta_0\neq 0$, т. е. ранг ϱ' «последовательности» $\{c_0\}$ равен единице: $\varrho'=1$. Так как для $\{c_p\}_0^{n-1}$ по условию ранг $\varrho=2$, то при продолжении «последовательности» $\{c_0\}$ числами $c_1, c_2,\ldots, c_{n-1}$ на каком-то из шагов ранг должен увеличиться. Но поскольку $\Delta_0\neq 0$, а $\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_{n-1}=0$, то при осуществлении этого увеличения будут выполнены все условия леммы 5, и потому ранг может измениться только скачком вверх сразу на две единицы: $\varrho=\varrho'+2=3$, а это противоречит равенству $\varrho=2$. Итак, случай 1) невозможен. Остается рассмотреть случай

2) $c_0=0\ \ \Delta_0=\Delta_1=\ldots=\Delta_{n-1}=0$. Докажем, что $c_0=c_1=\ldots=c_{n-2}=0$ $(c_{n-1}\neq 0)$. В самом деле, если бы оказалось, что $c_0=c_1=\ldots=c_{h-1}=0$, $c_h\neq 0$ и $h<n-1$, то уже ранг последовательности $\{c_p\}_0^h$ равнялся бы двум, так как

$$\begin{vmatrix} c_0 & \overline{c}_h \\ c_h & c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \overline{c}_h \\ c_h & 0 \end{vmatrix} = -|c_h|^2 \neq 0.$$

При этом, очевидно, $h>1$, поскольку $\begin{vmatrix} c_0 & \overline{c}_1 \\ c_1 & c_0 \end{vmatrix} = \Delta_1 = 0$. Но тогда

$$\begin{vmatrix} c_0 & \overline{c}_1 & \overline{c}_h & \overline{c}_{h+1} \\ c_1 & c_0 & \overline{c}_{h-1} & \overline{c}_h \\ c_h & c_{h-1} & c_0 & \overline{c}_1 \\ c_{h+1} & c_h & c_1 & c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \overline{c}_h & \overline{c}_{h+1} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{c}_h \\ c_h & 0 & 0 & 0 \\ c_{h+1} & c_h & 0 & 0 \end{vmatrix} = |c_h|^4 \neq 0,$$

что противоречит условию $\varrho=2$.

Итак, последовательность $\{c_p\}_0^{n-1}$ имеет вид $0, 0, \ldots, 0, c_{n-1} (\neq 0)$ и при ее продолжении любым элементом c_n имеем

$$\begin{vmatrix} c_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_n \\ c_1 & c_0 & \bar{c}_{n-2} & \bar{c}_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_0 & \bar{c}_1 \\ c_n & c_{n-1} & c_1 & c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_n \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{n-1} \\ c_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ c_n & c_{n-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = |c_{n-1}|^4 \neq 0,$$

т. е. ранг ϱ_1 продолженной последовательности $\{c_p\}_0^n$ равен $4 (= \varrho + 2)$. В силу леммы 2 отсюда следует утверждение нашей теоремы (для случая, когда $\varrho = 2$).

Предположим теперь, что теорема 2 установлена для форм любого ранга, меньшего ϱ (> 2), и докажем ее для формы (1) ранга ϱ.

Итак, пусть $\{c_p\}_0^{n-1}$ $(c_0 = \bar{c}_0)$ — последовательность ранга ϱ, и $\Delta_{\varrho-1} = 0$ $(\varrho > 2)$. Определим целое неотрицательное число r условием

$$\Delta_{r-1} \neq 0, \qquad \Delta_r = \Delta_{r+1} = \ldots = \Delta_{\varrho-2} = \Delta_{\varrho-1} = 0.$$

Тогда ранг последовательности $\{c_p\}_0^r$ равен r $(< \varrho)$. Покажем, что $\varrho - r = 2k$, где целое $k > 0$.

В самом деле, если ранг последовательности $\{c_p\}_0^h$ $(r \leqslant h \leqslant n-2)$ равен ϱ', то при переходе к $\{c_p\}_0^{h+1}$ этот ранг либо остается без изменения, либо возрастает. Но увеличиться он может лишь скачком сразу на две единицы. Это при $\Delta_{\varrho'-1} \neq 0$ следует из леммы 5, а при $\Delta_{\varrho'-1} = 0$ — из предположения индукции, которое здесь применимо, поскольку увеличение ранга возможно лишь до тех пор, пока $\varrho' < \varrho$. Стало быть, разность $\varrho - r$ есть положительное четное число, которое мы обозначим $2k$.

Итак, при продолжении последовательности $\{c_p\}_0^r$ элементами c_{r+1}, $c_{r+2}, \ldots, c_{n-1}$ ранг в конечном итоге возрастает на $2k$ единиц. Заметим, что увеличение это может произойти лишь на последних k шагах продолжения, т. е. при «присоединении» к последовательности $\{c_p\}_0^{n-k-1}$ элементов $c_{n-k}, c_{n-k+1}, \ldots, c_{n-1}$ (напомним, что $n - 1 - r \geqslant \varrho - r = 2k$). В самом деле, если бы ранг превзошел r на каком-то из предшествующих (элементу c_{n-k}) шагов продолжения, то, в силу условия $\Delta_h = 0$ $(h \geqslant r)$ и предположения индукции, суммарный рост ранга превзошел бы $2k$.

Таким образом, доказано, что ранг последовательности $\{c_p\}_0^{n-k-1}$ еще равен r, а при дальнейшем ее продолжении элементами $c_{n-k}, c_{n-k+1}, \ldots, c_{n-1}$ ранг возрастает на каждом из k шагов ровно на две единицы.

Применим теперь к последовательности $\{c_p\}_0^r$ ранга r с $\Delta_{r-1} \neq 0$ предложение A из § 1 и продолжим ее до последовательности $c_0, c_1, \ldots, c_r$; $c'_{r+1}, c'_{r+2}, \ldots, c'_{n-k-1}, c'_{n-k}, \ldots, c'_{n-1}, c'_n$ того же ранга r. В силу единственности такого продолжения и сказанного выше о ранге последовательности $\{c_p\}_0^{n-k-1}$, имеем

$$c'_{r+1} = c_{r+1}, \qquad c'_{r+2} = c_{r+2}, \ldots, c'_{n-k-1} = c_{n-k-1}; \qquad c'_{n-k} \neq c_{n-k}.$$

Теперь, продолжив последовательность $\{c_p\}_0^{n-1}$ произвольным числом c_n, рассмотрим у матрицы $\| c_{p-q} \|_{p,q=0}^n$ главный минор $\widetilde{\Delta}_{\varrho+1}$ порядка $\varrho + 2 = r + 2(k+1)$:

$$\widetilde{\Delta}_{\varrho+1} = \left|\begin{array}{cc|cccc}
\Delta_{r-1} & \bar c_r \dots \bar c_{r+k} & \bar c_{n-k} & \bar c_{n-k+1} \dots & \bar c_{n-1} & \bar c_n \\
 & \dots\dots & & & & \\
c_r \;\dots & c_0 \dots & \bar c_{n-k-1} & \bar c_{n-k} \;\dots & \bar c_{n-2} & \bar c_{n-1} \\
\dots & \dots\dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
c_{r+k} \dots & \dots c_0 & c_0 & \ddots & \ddots & \bar c_{n-k+1} \\
\hline
c_{n-k} & c_{n-k-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
c_{n-k+1} & c_{n-k} & \ddots & \ddots & \ddots & \bar c_{n-k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
c_{n-1} & c_{n-2} \dots & & \ddots & \ddots & \\
c_n & c_{n-1} \dots c_{n-k+1} & c_{n-k} & \dots & \dots & c_0
\end{array}\right|.$$

На основании леммы 4 имеем

$$\widetilde{\Delta}_{\varrho+1} = (-1)^{k+1} \Delta_{r-1} \, | \, c'_{n-k} - c_{n-k} \, |^{2(k+1)} \neq 0,$$

т. е. ранг матрицы $\| c_{p-q} \|_{p,q=0}^{n}$ равен $\varrho_1 = \varrho + 2$, а сигнатура ее совпадает (в силу леммы 2) с сигнатурой матрицы $\| c_{p-q} \|_{p,q=0}^{n-1}$.

Теорема доказана полностью!

Из доказанной нами теоремы 2 немедленно вытекает упоминавшееся уже выше в замечании к лемме 5

Следствие. *Пусть* $\{c_p\}_0^{n-1}$ $(c_0 = \bar c_0)$ — *последовательность ранга* ϱ *и* $\Delta_{\varrho-1} = 0$. *Тогда укороченная последовательность* $\{c_p\}_0^{n-2}$ *имеет ранг* $\varrho' = \varrho - 2$.

В самом деле, из условия следует, что $\varrho \geqslant 2$ (ср. стр. 46 1) Если ϱ' — ранг последовательности $\{c_p\}_0^{n-2}$, то имеются две возможности: $\Delta_{\varrho'-1} \neq 0$ и $\Delta_{\varrho'-1} = 0$. При $\Delta_{\varrho'-1} \neq 0$ имеем $\varrho' < \varrho$ и, применяя лемму 5, получаем $\varrho = \varrho' + 2$. Если же $\Delta_{\varrho'-1} = 0$, то такой же результат вытекает прямо из теоремы 2.

§4. Важные следствия из основной теоремы, относящиеся к правилу подсчета сигнатуры формы (1), будут приведены во второй части настоящей работы. Сейчас же мы вернемся к основной теме первой части — вопросам продолжения теплицевых форм.

Используя символику из [1], отнесем последовательность $\{c_p\}_0^{n-1}$ $(c_0 = \bar c_0)$ к классу $\mathfrak{P}_{\varkappa;n}$, если соответствующая ей форма (1) имеет точно $\varkappa$ положительных квадратов.

Если последовательность $\{c_p\}_0^{n-1}$ $(\in \mathfrak{P}_{\varkappa;n})$ *невырождена* $(\Delta_{n-1} \neq 0)$, то она всегда может быть продолжена сколь угодно далеко (бесконечным множеством способов) с сохранением у всех форм (3) точно $\varkappa$ положительных квадратов (см. [1], теорема 5.10)*. Из этого факта в сочетании с предложением А и теоремой 1 настоящей работы вытекает такая общая

* При этом возможны бесконечные продолжения любого «заказанного наперед» конечного ранга $\rho = n$, $n+1$, $n+2$, ..., а также продолжения, при которых ранг неограниченно возрастает ([1], ч. II, стр. 472—473).

Теорема 3. *Пусть задана конечная последовательность* $(\bar{c}_0 =) c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ *класса* $\mathfrak{P}_{\varkappa;n}$ *и ранга* ϱ. *Для того чтобы эта последовательность допускала бесконечное продолжение с сохранением у всех форм* (3) *точно* $\varkappa$ *положительных квадратов, необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta_{\varrho-1} \neq 0$.

Теорема 2 доставляет информацию о продолжениях последовательности $\{c_p\}_0^{n-1}$ и тогда, когда условие теоремы 3 не выполнено, т. е. $\Delta_{\varrho-1} = 0$. В этом случае, как установлено в теореме 2, при любом продолжении последовательности $\{c_p\}_0^{n-1}$ $(\in \mathfrak{P}_{\varkappa;n})$ произвольным элементом c_n ранг повышается на 2 единицы и продолженная последовательность $\{c_p\}_0^n \in \mathfrak{P}_{\varkappa+1;n+1}$. При этом, если у исходной последовательности ранг $\varrho = n-1$, то у продолженной последовательности $\{c_p\}_0^n$ ранг $\varrho_1 = \varrho + 2 = n+1$, т. е. она невырождена и потому допускает уже дальнейшие (бесконечные) продолжения с сохранением у всех форм (3) $\varkappa + 1$ положительных квадратов.

В том же случае, когда $\varrho \leqslant n-2$ (при $\Delta_{\varrho-1} = 0$), любая продолженная последовательность $\{c_p\}_0^n$, принадлежа классу $\mathfrak{P}_{\varkappa+1;n+1}$, имеет ранг $\varrho_1 = \varrho + 2 \leqslant n$, т. е. она вырождена $(\Delta_n = 0)$, и $\Delta_{\varrho_1-1} = 0$, так как $\varrho < \varrho + 1 = \varrho_1 - 1 \leqslant n-1$. Отсюда, применяя снова теорему 2, получаем, что $\{c_p\}_0^{n+1} \in \mathfrak{P}_{\varkappa+2;n+2}$ при любом c_{n+1}, и это продолжение имеет ранг $\varrho_2 = \varrho_1 + 2 = \varrho + 4$, причем либо $\varrho_2 = n+2$, либо снова $\Delta_{\varrho_2-1} = 0$, и т. д.

Из этих рассуждений следует, что имеет место такая

Теорема 4. *Пусть задана конечная последовательность* $(\bar{c}_0 =) c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ *класса* $\mathfrak{P}_{\varkappa;n}$ *и ранга* ϱ. *Обозначим через* $d \equiv n - \varrho$ *(«дефект последовательности»). Если* $\Delta_{\varrho-1} = 0$ *(и значит,* $d > 0$*), то при любом продолжении последовательности* $\{c_p\}_0^{n-1}$ *на* d *«шагов» произвольными комплексными числами* $c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+d-1}$ *продолженная последовательность* $\{c_p\}_0^{n+d-1}$ *будет невырожденной (т. е. ее ранг* $r = n + d = \varrho + 2d$*) и класса* $\mathfrak{P}_{\varkappa+d;n+d}$.

Замечание*. Тот факт, что для любой **вырожденной** последовательности $\{c_p\}_0^{n-1}$ $(\in \mathfrak{P}_{\varkappa;n})$ ранга $\varrho\,(0 < \varrho < n)$ и дефекта $d = n - \varrho$ всякому ее **невырожденному** продолжению $\{c_p\}_0^{m-1}$ $(m > n;\ \Delta_{m-1} \neq 0)$ отвечает форма (3), имеющая не менее чем $\varkappa + d$ положительных квадратов и порядок (ранг), не меньший чем $\varrho + 2d$, следует из простых геометрических соображений.

В самом деле, рассмотрим линейное m-мерное координатное пространство $E_m =$ л.о $\{e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}\}$, где $e_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$; $e_1 = (0, 1, 0, \ldots 0)$;...; $e_{m-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1)$, и определим в нем (индефинитное, вообще говоря) скалярное произведение

$$\left(\sum_{p=0}^{m-1} \xi_p e_p, \sum_{q=0}^{m-1} \eta_q e_q\right) = \sum_{p,q=0}^{m-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\eta}_q \qquad (c_{-p} = \bar{c}_p;\ p = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Тогда по отношению к этому скалярному произведению все пространство E_m будет невырожденным [1], а его подпространство $E_n =$ л.о. $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ — вырожденным, содержащим неотрицательные (в рассматриваемой метрике) $(\varkappa + d)$-мерные подпространства [1]. Отсюда следует (см., напр., [1], ч. I, лемма 1.2), что невырожденная форма $\sum\limits_{p,q=0}^{m-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q$ имеет не менее чем $\varkappa + d$ положительных квадратов и (аналогично) не менее чем

* Этим замечанием автор обязан М. Г. Крейну.

$\varrho - \varkappa + d$ отрицательных квадратов. А потому ее ранг (порядок) $m \geqslant (\varkappa + d) + (\varrho - \varkappa + d) = \varrho + 2d$.

Таким образом, нетривиальным в теореме 4 является то (вытекающее из основной теоремы 2) утверждение, что у исходной последовательности $\{c_p\}_0^{n-1}$ при $\Delta_{\varrho-1} = 0$ всякое продолжение $\{c_p\}_0^{m-1}$ «длины» $m = \varrho + 2d = n + d$ будет невырожденным

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, ч. I, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 5, 1956, 367—432; ч. II, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 8, 1959, 413—496.
2. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

Поступила 20.XII 1965 г.
Одесса