# О возбуждении колебаний в нелинейных системах со случайным запаздыванием

*В. Г. Коломиец, Д. Г. Кореневский*

Возбуждению колебаний в нелинейных системах с постоянным и переменным запаздыванием посвящено достаточно много работ [1—4]. В большинстве же систем автоматического управления и телемеханических устройств запаздывание представляет собой стационарный случайный процесс. Между тем, системы со случайным запаздыванием исследованы недостаточно. В имеющихся работах [5—7] рассматриваются преимущественно вопросы устойчивости. Колебательные процессы мало изучены.

В настоящей работе изучается влияние случайного запаздывания на колебательные процессы в слабо нелинейных системах.

Для их исследования применяется широко известный асимптотический метод Крылова — Боголюбова [8, 9] с последующим применением метода уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [10, 11, 12].

**1**. Рассмотрим квазилинейную колебательную систему, описываемую дифференциально-разностным уравнением вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_1\frac{dx(t)}{dt} + k_2\frac{dx[t-\Delta(t)]}{dt} + k_3x(t) + \\ + k_4x[t-\Delta(t)] = \varepsilon f\left[x(t), x(t-\Delta(t)), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t-\Delta(t))}{dt}\right], \quad (1)$$

где $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ — некоторые постоянные коэффициенты, $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $f(x, x_\Delta, \dot{x}, \dot{x}_\Delta)$ — аналитическая по всем переменным нелинейная функция, $\Delta(t)$ — запаздывание, представляющее собой стационарный случайный процесс.

Будем рассматривать случай малых флюктуаций запаздывания, т. е.

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \varepsilon\xi(t, \varepsilon), \quad (2)$$

где $\Delta_0 = \langle\Delta(t)\rangle > 0$, $\xi(t,\varepsilon)$ — стационарный случайный процесс, превращающийся в пределе при $\varepsilon \to 0$ в «белый шум» $\dot{\xi}(t)$ ($\langle\dot{\xi}(t)\rangle = 0$, $\langle\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$), $\langle\cdot\rangle$ означает вероятностное усреднение, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) превращается в линейное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_1\frac{dx(t)}{dt} + k_2\frac{dx(t-\Delta_0)}{dt} + k_3x(t) + k_4x(t-\Delta_0) = 0, \quad (3)$$

которое имеет периодическое решение в случае, когда среди корней характеристического уравнения

$$H(\lambda) \equiv \lambda^2 + k_1\lambda + k_2\lambda e^{-\Delta_0\lambda} + k_3 + k_4 e^{-\Delta_0\lambda} = 0 \tag{4}$$

имеются чисто мнимые $\lambda = \pm i\omega$. Очевидно, $\omega$ должно удовлетворять следующей системе уравнений

$$H_1(\omega) \equiv -\omega^2 + k_2\omega \sin\omega\Delta_0 + k_3 + k_4\cos\omega\Delta_0 = 0, \tag{5}$$
$$H_2(\omega) \equiv k_1\omega + k_2\omega\cos\omega\Delta_0 - k_4\sin\omega\Delta_0 = 0.$$

Периодическое движение в системе (3) с частотой

$$\omega = \frac{1}{\Delta_0}\arccos\frac{k_4k^2 - k_1k_2k - k_3k_4}{k_2k + k_4^2}, \tag{6}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 + \sqrt{(k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 - 4(k_3^2 - k_4^2)}},$$

возможно при выполнении одной из следующих двух групп условий:

$$1) \qquad k_3^2 - k_4^2 < 0, \qquad k = \frac{1}{\Delta_0}\arccos\frac{k_4k^2 - k_1k_2k - k_3k_4}{k_2k^2 + k_4^2};$$

$$2) \qquad k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 > 0, \qquad (k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 \geqslant 4(k_3^2 - k_4^2), \tag{7}$$
$$k = \frac{1}{\Delta_0}\arccos\frac{k_4k^2 - k_1k_2k - k_3k_4}{k_2k^2 + k_4^2}.$$

Итак, предположим, что в невозмущенной системе (3) возможны незатухающие гармонические колебания с некоторой определенной по формуле (6) частотой $\omega$

$$x(t) = a\cos(\omega t + \theta), \tag{8}$$

зависящие только от двух произвольных постоянных $a$ и $\theta$.

Предположим также, что в системе (3) единственным статическим решением будет нулевое решение и что в ней невозможны незатухающие колебания с частотами кратными $\omega$.

При этих условиях будем искать решение уравнения (1) с помощью асимптотического разложения

$$x(t) = a(t)\cos\psi(t) + \varepsilon u_1[a(t), \psi(t)] + \varepsilon^2 u_2[a(t), \psi(t)] + \ldots, \tag{9}$$

в котором $u_1(a, \psi), \ldots$ являются периодическими функциями угла $\psi$ с периодом $2\pi$, а величины $a$ и $\psi$ как функции времени определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, a_\Delta) + \varepsilon^2 A_2(a, a_\Delta) + \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a, a_\Delta) + \varepsilon^2 B_2(a, a_\Delta) + \ldots \tag{10}$$

$$(\psi = \omega t + \theta(t), \qquad a_\Delta = a(t - \Delta(t)).$$

Итак, мы ставим здесь задачу определения функций $u_1(a, \psi), \ldots$, периодических, с периодом $2\pi$, по отношению к $\psi$, и функций $A_1(a, a_\Delta), \ldots$ $\ldots B_1(a, a_\Delta), \ldots$ таким образом, чтобы выражение (9) удовлетворяло уравнению (1) всякий раз, когда $a$ и $\psi$ удовлетворяют уравнениям (10).

После обычных операций подстановки (9), (10) в (1), разложения обеих частей уравнения (1) по степеням малого параметра и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$ [8], находим:

$$(-k_1\omega - k_2\omega\cos\omega\Delta_0 + k_4\sin\omega\Delta_0)\sin\psi + (-\omega^2 + k_2\omega\sin\omega\Delta_0 + \\ + k_3 + k_4\cos\omega\Delta_0)\cos\psi = 0, \qquad (11)$$

$$\{-2\omega A_1(a, a_\Delta) - k_1 aB_1(a, a_\Delta) + k_2[(\omega\Delta_0 A_1(a, a_\Delta) - aB_1(a, a_\Delta))\cos\omega\Delta_0 + \\ + (\omega\Delta_0 aB_1(a, a_\Delta) + A_1(a, a_\Delta))\sin\omega\Delta_0 + \omega^2 a\sin\omega\Delta_0\xi(t, \varepsilon)] + \\ + k_4[aB_1(a, a_\Delta)\Delta_0\cos\omega\Delta_0 - \Delta_0\sin\omega\Delta_0 A_1(a, a_\Delta) + a\omega\cos\omega\Delta_0\xi(t, \varepsilon)]\}\sin\psi + \\ + \{-2\omega aB_1(a, a_\Delta) + k_1 A_1(a, a_\Delta) + k_2[(a\omega\Delta_0 B_1(a, a_\Delta) + A_1(\alpha, a_\Delta))\cos\omega\Delta_0 - \\ - (\omega\Delta_0 A_1(a, a_\Delta) - aB_1(a, a_\Delta))\sin\omega\Delta_0 + a\omega^2\cos\omega\Delta_0\xi(t, \varepsilon)] + \\ + k_4[-A_1(a, a_\Delta)\Delta_0\cos\omega\Delta_0 - aB_1(a, a_\Delta)\Delta_0\sin\omega\Delta_0 - a\omega\sin\omega\Delta_0\xi(t, \varepsilon)]\}\cos\psi + \\ + \omega^2\frac{\partial^2 u_1(a, \psi)}{\partial\psi^2} + k_1\omega\frac{\partial u_1(a, \psi)}{\partial\psi} + k_3 u_1(a, \psi) + \\ + k_2\omega\frac{\partial u_1[a, \psi(t - \Delta_0)]}{\partial\psi} + k_4 u_1[a, \psi(t - \Delta_0)] = f_0(a, \psi) \qquad (12)$$

и т. д.,
где

$$f_0(a, \psi) = f[a\cos\psi, a\cos(\psi - \omega\Delta_0), -a\omega\sin\psi, -a\omega\sin(\psi - \omega\Delta_0)].$$

Равенство (11) выполняется тождественно в силу уравнений (5). Видно что $f_0(a, \psi)$ есть периодическая функция переменной $\psi$ с периодом $2\pi$, зависящая от $a$. Для определения $A_1(a, a_\Delta)$, $B_1(a, a_\Delta)$ и $u_1(a, \psi)$ из (12) рассмотрим разложения Фурье для функций $f_0(a, \psi)$ и $u_1(a, \psi)$:

$$f_0(a, \psi) = r_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(a)\cos n\psi + q_n(a)\sin n\psi,$$

$$u_1(a, \psi) = s_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi. \qquad (13)$$

Подставляя правые части выражений (13) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, найдем:

$$r_0(a) = (k_3 + k_4)s_0(a),$$

$$N\cdot\begin{Vmatrix} h_n(a) \\ s_n(a) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} q_n(a) \\ r_n(a) \end{Vmatrix}, \qquad (14)$$

где $N$ — невырожденная матрица вида

$$N = \begin{Vmatrix} H_1(n\omega) & -H_2(n\omega) \\ H_2(n\omega) & H_1(n\omega) \end{Vmatrix},$$

$$\det N = H_1^2(n\omega) + H_2^2(n\omega) \neq 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$s_1(a) = 0, \qquad h_1(a) = 0,$$

$$A_1(a, a_\Delta) = \frac{H_2'(\omega))r_1(a) + H_1'(\omega)q_1(a)}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)} +$$

$$+\frac{H_2'(\omega)(k_4\sin\omega\Delta_0-k_2\omega\cos\omega\Delta_0)-H_1'(\omega)(k_4\cos\omega\Delta_0+k_2\omega\sin\omega)\Delta_0}{H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)}a\omega\xi(t,\varepsilon)$$

$$B_1(a,a_\Delta)=\frac{H_1'(\omega)r_1(a)-H_2'(\omega)q_1(a)}{a[H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)]}+$$

$$+\frac{H_1'(\omega)(k_4\sin\omega\Delta_0-k_2\omega\cos\omega\Delta_0)+H_2'(\omega)(k_2\omega\sin\omega\Delta_0+k_4\cos\omega)\Delta_0}{H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)}\omega\xi(t,\varepsilon). \tag{15}$$

Здесь предполагается, что $H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)\neq 0$.

Следует заметить, что хотя построение высших приближений и не представляет принципиальных трудностей, выкладки при этом быстро усложняются. В большинстве же практических задач бывает достаточно ограничиться первым приближением

$$x=a(t)\cos[\omega t+\theta(t)], \tag{16}$$

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a,a_\Delta),$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\varepsilon B_1(a,a_\Delta). \tag{17}$$

Используя терминологию, предложенную в [8], назовем найденную систему стохастических уравнений (17) «уравнениями в стандартной форме».

Поскольку для нашего случая условия теоремы существования и единственности выполнены, решение системы стохастических дифференциальных уравнений (17) в пределе сходится к двумерному процессу Маркова.

Эффективным, с нашей точки зрения, методом его исследования является аналитический метод уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для плотности совместного распределения амплитуды и фазы, которое имеет следующий вид

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}[K_aW]-\frac{\partial}{\partial\theta}[K_\theta W]+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[D_aW]+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}[D_{a\theta}W]+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[D_\theta W]\right\}, \tag{18}$$

где

$$K_a=\varepsilon\frac{H_2'(\omega)r_1(a)+H_1'(\omega)q_1(a)}{H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)},$$

$$K_\theta=\varepsilon\frac{H_1'(\omega)r_1(a)-H_2'(\omega)q_1(a)}{a[H_1'^2(\omega)+H_2'(\omega)]},$$

$$D_a=\varepsilon^2\left[\frac{\begin{array}{c}H_2'(\omega)(k_4\sin\omega\Delta_0-k_2\omega\cos\omega\Delta_0)-\\-H_1'(\omega)(k_4\cos\omega\Delta_0+k_2\omega\sin\omega\Delta_0\end{array}}{H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)}a\omega\right]^2, \tag{19}$$

$$D_{a\theta}=\varepsilon^2\frac{H_2'(\omega)(k_4\sin\omega\Delta_0-k_2\omega\cos\omega\Delta_0)-H_1'(\omega)(k_4\cos\omega\Delta_0+k_2\omega\sin\omega\Delta_0)}{H_1'^2(\omega)+H_2'^2(\omega)}\times$$

$$\times \frac{H_1'(\omega)(k_4 \sin \omega\Delta_0 - k_2\omega \cos \omega\Delta_0) + H_2'(\omega)(k_2\omega \sin \omega\Delta_0 + k_4 \cos \omega\Delta_0)}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)} \cdot a\omega^2$$

$$D_\theta = \varepsilon^2 \left[ \frac{H_1'(\omega)(k_4 \sin \omega\Delta_0 - k_2\omega \cos \omega\Delta_0) + H_2'(\omega)(k_2\omega \sin \omega\Delta_0 + k_4 \cos \omega\Delta_0)}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)} \omega \right]^2.$$

Нас интересуют такие решения уравнения (18), для которых плотность распределения амплитуды и фазы удовлетворяет условиям

$$W(a, \theta, t) > 0, \quad \int_0^\infty \int_0^{2\pi} W(a, \theta, t)\, da d\theta = 1. \tag{20}$$

Для нахождения решения уравнения (18) зададим начальную плотность распределения и граничные условия:

$$\begin{gathered} W(a, \theta, 0) = \delta(a)\,\delta(\theta), \\ W(-\infty, t) = W(+\infty, t) = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Плотность стационарного распределения амплитуды и фазы удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial a}[K_a W) + \frac{\partial}{\partial \theta}[K_\theta W] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[D_a W] + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}[D_{a\theta} W] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}[D_\theta W]\right\} \tag{22}$$

и не зависит от начального распределения.

Следует отметить, что аналитическое решение уравнений (18), (22) в общем случае представляет довольно трудную математическую задачу. Все же в большинстве случаев этот метод позволяет находить стационарные плотности вероятности, исходя лишь из общего вида соответствующих уравнений движения системы. Для колебательных систем особый интерес представляет нахождение стационарной плотности распределения амплитуды, так как анализ ее позволяет судить не только о распределении амплитуд, но и об их устойчивости. Устойчивым (неустойчивым) стационарным амплитудам соответствуют точки, в которых стационарная плотность амплитуды достигает максимума (минимума).

2. В качестве примера рассмотрим систему, описываемую уравнением вида

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 x(t) + k_2 x[t - \Delta_0 - \varepsilon\xi(t, \varepsilon)] =$$

$$= \varepsilon[1 - \beta x^2(t)]\frac{dx[t - \Delta_0 - \varepsilon\xi(t, \varepsilon)]}{dt}. \tag{23}$$

Рассматривая первое приближение (16), для нахождения амплитуды и фазы колебаний системы (23) получим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \frac{a\omega}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2 \sin \omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2}\left[\left(-\frac{1}{2}\omega\beta \cos \omega\Delta_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}k_2\Delta_0\beta \sin 2\omega\Delta_0\right) a^2 + 2\omega \cos \omega\Delta_0 + 2\omega k_2 \cos \omega\Delta_0 \xi(t, \varepsilon)\right], \tag{24}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon \frac{\omega}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2 \sin \omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2}\left[\left(\frac{3}{2}\omega\beta \sin \omega\Delta_0 + \frac{1}{2}k_2\Delta_0\beta + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}k_2\Delta_0\beta\sin^2\omega\Delta_0)\,a^2-2\,(\omega\sin\omega\Delta_0+k_2\Delta_0)-$$

$$\left.-(2\omega k_2\sin\omega\Delta_0-k_2^2\Delta_0^2)\,\xi(t,\varepsilon)\right]. \tag{24}$$

Стационарная плотность амплитуды $W(a)$ в силу первого уравнения системы (24) является решением следующего уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial a}\left[(\gamma_1 a^3+\gamma_2 a)\;W\right]=\frac{\varepsilon^2\gamma_3^2}{2}\,\frac{\partial^2(a^2W)}{\partial a^2}, \tag{25}$$

которое удовлетворяет условиям

$$W(a)>0,\ \int\limits_0^\infty W(a)\,da=1,\quad W(\infty)=0,\quad W'(\infty)=0, \tag{26}$$

где

$$\gamma_1=\frac{-\frac{1}{2}\omega^2\beta\cos\omega\Delta_0+\frac{1}{4}k_2\Delta_0\beta\sin 2\omega\Delta_0}{4\omega^2+4\omega\Delta_0k_2\sin\omega\Delta_0+k_2^2\Delta_0^2},$$

$$\gamma_2=\frac{2\omega^2\cos\omega\Delta_0}{4\omega^2+4\omega\Delta_0k_2\sin\omega\Delta_0+k_2^2\Delta_0^2},$$

$$\gamma_3=\frac{2\omega^2k_2\cos\omega\Delta_0}{4\omega^2+4\omega\Delta_0k_2\sin\omega\Delta_0+k_2^2\Delta_0^2},$$

и имеет вид

$$W(a)=Ca^{\frac{2\gamma_2}{\varepsilon\gamma_3^2}-2}\,e^{\frac{\gamma_1}{\varepsilon\gamma_3^2}a^2}, \tag{27}$$

где

$$C=\left[\int\limits_0^\infty a^{\frac{2\gamma_2}{\varepsilon\gamma_3^2}-2}\,e^{\frac{\gamma_1}{\varepsilon\gamma_3^2}a^2}\,da\right]^{-1}.$$

Чтобы обеспечить стремление плотности распределения амплитуды к нулю, очевидно, $\gamma_1$ должно быть отрицательным, чего можно достичь при выполнении условий

$$\beta>0,\quad \cos\omega\Delta_0>0,\quad k_2\Delta_0\sin\omega\Delta_0-\omega^2<0. \tag{28}$$

Из анализа функции (27) видно, что она имеет единственный максимум в точке

$$a=\sqrt{\frac{\varepsilon\gamma_3^2-\gamma_2}{\gamma_1}}. \tag{29}$$

Поэтому в системе (23) возможны устойчивые стационарные колебания с амплитудой $a$, определяемой формулой (29). В случае уравнения типа Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=\varepsilon\,[1-x^2(t)]\,\frac{dx\,[t-\Delta_0-\varepsilon\xi(t,\varepsilon)]}{dt} \tag{30}$$

формула (29) принимает вид

$$a=2, \tag{31}$$

т. е. случайное запаздывание в этом случае не влияет на режим работы системы и в первом приближении его можно не принимать во внимание.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин, Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. I, УМН, т. 17, вып. 2 (104), 1962, 77—164.
2. А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин, Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. II, Тр. сем. по теор. диф. ур. с отклон. аргум., т. 2, 1963.
3. В. П. Рубаник, Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям, УМЖ, т. XI, № 4, 1959.
4. А. Д. Мышкис, С. Н. Шиманов, Л. Э. Эльсгольц, Устойчивость и колебания систем с запаздыванием, Тр. Междунар. симпоз. по нелин. колеб., т. II, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. Э. Л. Лидский, Об устойчивости движений системы со случайным запаздыванием, «Дифференциальные уравнения», № 1, 1965.
6. Г. А. Агасандян, Аналитическое конструирование регуляторов для стабилизации линейных систем со случайным запаздыванием, Изв. АН СССР, техн. киберн., № 1, 1965.
7. В. Е. Гермаидзе, И. Я. Кац, Об устойчивости систем со случайным запаздыванием, Всес. межвуз. конф. по теор. и прилож. диф. ур. с отклон. аргум., Тезисы докл., изд-во Черновицк. ун-та, 1965.
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд-во «Наука», М., 1963.
9. В. И. Фодчук, О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с малым параметром, УМЖ, т. XIV, № 4, 1962.
10. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт, О статистическом рассмотрении динамических систем, Сб. «Собрание трудов А. А. Андронова», Изд-во АН СССР, М., 1956, 142—160.
11. В. Г. Коломиец, О параметрическом случайном воздействии на линейные и нелинейные колебательные системы, УМЖ, т. XV, № 2, 1963.
12. В. Г. Коломиец, О воздействии случайных сил на нелинейные колебательные системы, Сб. «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, изд-во «Наукова думка», К., 1963.



Поступила 27.X 1965
Киев