1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18 № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Точные идеалы целочисленных матричных колец второго порядка

С. А. Кругляк

Пусть $Z^{(p)}$ — кольцо целых p-адических чисел, $Q^{(p)}$ — поле p-адических чисел. Конечнопорожденные $Z^{(p)}$-модули без кручения будем называть $Z^{(p)}$-решетками. Кольцо с единицей, являющееся $Z^{(p)}$-решеткой, будем называть $Z^{(p)}$-кольцом.

Пусть М — алгебра над полем $Q^{(p)}$. Будем рассматривать $Z^{(p)}$-кольца, являющиеся порядками в М, $Z^{(p)}$-кольцо Λ_1 называется надкольцом $Z^{(p)}$-кольца Λ, если $\Lambda \subset \Lambda_1 \subset$ М. Известно, что в случае, если алгебра М полупростая, у данного кольца Λ лишь конечное число надколец [1].

Пусть решетка M содержится в М. Правым кольцом множителей решетки M называется совокупность всех элементов $\lambda \in$ М таких, что $M\lambda \subset M$. Если M — правый Λ-модуль, будем говорить, что M — точный Λ-модуль, если его (правое) кольцо множителей совпадает с Λ.

Для правого (левого) Λ-модуля можно естественным образом определить двойственный левый (правый) Λ-модуль M^*, $M^* = \mathrm{Hom}_{Z(p)}(M, Z^{(p)})$.

В данной заметке будет доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если Λ — порядок матричной алгебры $Q_2^{(p)}$ и M — такой точный (правый) Λ-модуль, что $M \otimes_{Z(p)} Q^{(p)} = \Lambda \otimes_{Z(p)} Q^{(p)}$, то M изоморфен либо Λ, либо Λ^*.*

Аналогичное утверждение для кольца Λ ранга 3 над кольцом $Z^{(p)}$ было доказано Д. К. Фаддеевым [2].

Доказательство теоремы для порядков полной матричной алгебры $Q_2^{(p)}$ усложняется в связи с переходом к некоммутативному случаю.

Условие $M \otimes_{Z(p)} Q^{(p)} = \Lambda \otimes_{Z(p)} Q^{(p)}$ означает, что M — некоторый идеал (ранга 4 над $Z^{(p)}$) кольца Λ. Из теоремы непосредственно получаем:

Следствие. *Любой идеал M ранга 4 порядка Λ как Λ-модуль с точностью до изоморфизма совпадает либо с Λ_1, либо с Λ_2^*, где Λ_1, Λ_2 — некоторые надкольца Λ.*

1. Для доказательства теоремы достаточно показать, что любая решетка ранга 4 в $Q_2^{(p)}$ как модуль (правый) над своим кольцом множителей изоморфна либо самому кольцу множителей, либо модулю двойственному кольцу множителей.

Назовем две решетки M и M_1 подобными, если $M_1 = qMr$, где q и r — некоторые обратимые элементы алгебры $Q_2^{(p)}$.

Если Λ — (правое) кольцо множителей решетки M, то кольцом множителей для M_1 является порядок $r^{-1}\Lambda r$.

Для решетки M двойственную ей решетку M^* можно построить внутри $Q_2^{(p)}$: $M^* = \{\lambda : \lambda \in Q_2^{(p)},\ \mathrm{Sp}(\mu\lambda) \in Z^{(p)},\ \mu \in M\}$. [1] Легко вычислить, что $(qMr)^* = r^{-1}M^*q^{-1}$, т. е. если две решетки подобны, то им двойственные решетки также подобны.

Из этих замечаний следует, что достаточно доказать справедливость теоремы для некоторой решетки, подобной решетке M.

2. Пусть a-произвольный элемент из $Z^{(p)}$, $a = \varepsilon p^n$. Через $\nu(a)$ обозначим аддитивную оценку кольца $Z^{(p)}$, $\nu(a) = n$. M — произвольная решетка ранга 4 в $Q_2^{(p)}$. Детерминанты элементов решетки ограничены снизу по оценке ν. Возьмем в M обратимый в $Q_2^{(p)}$ элемент q с минимальным по оценке ν детерминантом ($\nu(\det q) = \min\limits_{\mu\in M} \nu(\det \mu)$). Обозначим через M_1 решетку $q^{-1}M$, $1 \in M_1$. Ясно, что детерминанты всех элементов решетки M_1 целые.

В M_1 можно выбрать «треугольный» базис

$$M_1: \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & d_3 \\ d_4 & d_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя детерминант левой и правой части, получаем $1 = z_2(z_1a_1b_2 + b_1b_2)$. Пользуясь тем, что детерминанты всех элементов решетки целые, приходим к выводу, что $z_2 = \varepsilon$. Таким образом, матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ можно включить в треугольный базис в качестве второго элемента:

$$M_1: \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & d_3 \\ d_4 & d_2 \end{pmatrix};$$

a_1 целое, так как иначе не был бы целым детерминант элемента $\begin{pmatrix} a_1+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. По крайней мере одно из чисел c_1, c_2 целое, так как детерминант элемента $\begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ целый. Для определенности пусть $c_2 \in Z^{(p)}$, тогда, вычитая из 3-го базисного элемента соответствующее кратное единицы, получим базис M_1 в виде:

$$M_1: \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & d_3 \\ d_4 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что среди всех таких базисов всех подобных решеток (детерминанты элементов которых целые) выбран базис, для которого $\nu(a) = \min$. Тогда можно считать $c_1 = 0$. Действительно, не может быть $\nu(c_1) < \nu(a)$, так как в этом случае решетка rM_1r^{-1}, где $r = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, имела бы базис

$$rM_1r^{-1}: \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

что противоречит минимальности $\nu(a)$.

Если же $\nu(c_1) \geqslant \nu(a)$, то желаемого результата можно достигнуть, вычитая из третьего базисного элемента соответствующее кратное первого. Дополнительно трансформируя нашу решетку элементом $\begin{pmatrix} c_3^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, приходим к решетке с базисом

$$M_2:\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}d_1&d_3\\d_4&d_2\end{pmatrix};$$

a, d_1, d_2, d_3, d_4 такие, что все элементы решетки M_2 имеют целые детерминанты.

3. Найдем, когда решетка M_2 является кольцом. Так как $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d_1&d_3\\d_4&d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_4&d_2\\0&0\end{pmatrix}\in M_2$, то необходимо a/d_4 и $d_2\in Z^{(p)}$. Вычитая из последнего базисного элемента $d_2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, получим базис решетки M_2 в виде

$$M_2:\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}d_1&d_3\\d_4&0\end{pmatrix};$$

$$a/d_4;\qquad d_1,\ d_4,\ d_4\cdot d_3\in Z^{(p)}.$$

Непосредственным счетом можно получить, что этих условий достаточно для замкнутости M_2 относительно умножения.

Выпишем через базис 3 различных серии колец (каждый $Z^{(p)}$-конечнопорожденный порядок алгебры $Q_2^{(p)}$ попадает в одну из серий):

$$\text{I}\quad \begin{pmatrix}p^k&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\p^m&0\end{pmatrix},\quad 0\leqslant k\leqslant m;$$

$$\text{II}\quad \begin{pmatrix}p^k&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&\varepsilon p^{-l}\\p^m&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\varepsilon - p\text{-адическая единица},\\ 0<l\leqslant k\leqslant m;\end{matrix}$$

$$\text{III}\quad \begin{pmatrix}p^k&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}p^r&\varepsilon p^{-l}\\p^m&0\end{pmatrix},\ 0<l\leqslant k\leqslant m,\ 0\leqslant r<k.$$

В каждом классе изоморфных порядков найдется порядок с базисом вида I — III; такое описание порядков алгебры $Q_2^{(p)}$ при помощи базиса не является, вообще говоря, однозначным (два порядка с различными такими базисами могут оказаться еще изоморфными), однако является достаточным для наших целей.

4. Рассмотрим сначала все решетки M, в которых можно выбрать базис вида

$$M:\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}d_1&d_2\\d_3&0\end{pmatrix}.$$

Так как детерминант всех элементов решетки целый, легко получить, что d_1, d_3, a, $d_2\cdot d_3\in Z^{(p)}$.

4.1) $M:\begin{pmatrix}p^k&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\p^m&0\end{pmatrix},\quad k,m\geqslant 0.$

Это — кольцо тогда и только тогда, если $k\leqslant m$.

Пусть $m<k$. Подсчитаем базис для M^*.

$$M^*:\begin{pmatrix}p^{-k}&0\\0&-p^{-k}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&p^{-m}\\0&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, функция $\nu(\det\mu)$ достигает своего минимума на элементе $q=\begin{pmatrix}p^{-k}&0\\0&-p^{-k}\end{pmatrix}\in M^*$;

$q^{-1}M^*$ — решетка, подобная решетке M^*:

$$q^{-1}M^*: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p^{k-m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если трансформировать данную решетку элементом $\begin{pmatrix} p^{m-k} & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и перевыбрать в полученной решетке базис, придем к решетке $\widehat{M}$, подобной решетке M^*, с базисом

$$\widehat{M}: \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p^{2k-m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $k > m$, то $2k - m > k$, т. е. данная решетка уже является кольцом. Следовательно в случае 4.1) решетка M или M^* подобна кольцу.

4.2) $M: \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, a, c, c \cdot b \in Z^{(p)}, b \notin Z^{(p)}$;

$$M: \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon p^{-l} \\ p^m & 0 \end{pmatrix}, \ 0 \leqslant k;\ m \geqslant l > 0.$$

Это — кольцо тогда и только тогда, если

$$m \geqslant k \geqslant l \geqslant 0:$$

$$M^*: \begin{pmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & -p^{-k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon p^{-l-m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p^{-m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Если M — не кольцо, то не выполняются условия (1).

4.2 а) $k > m \geqslant l > 0$. Из этого условия следует $2k > l + m$. Легко вычислить, что в этом случае минимум функции $\nu(\det \mu)$ достигается на элементе

$$q = \begin{pmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & -p^{-k} \end{pmatrix} \in M^*,$$

$$q^{-1}M^*: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon p^{k-l-m} \\ -p^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p^{k-m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Трансформируя эту решетку элементом $\begin{pmatrix} p^{m-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, приходим к подобной решетке:

$$\widehat{M}: \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon p^{-l} \\ p^{2k-m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как по предложению $2k > l + m$, то $2k - m > l$, $2k - m \geqslant k \geqslant l > 0$, т. е. решетка уже является кольцом.

4.2 б) $m \geqslant l > k \geqslant 0$. Отсюда следует $2k < l + m$, минимум функции $\nu(\det \mu)$ достигается на элементе

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon p^{-l-m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M^*,$$

$$q^{-1}M^*: \begin{pmatrix} 0 & -p^{-k} \\ -\varepsilon^{-1} p^{l+m-k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} p^l \end{pmatrix}.$$

Следовательно, M^* подобна решетке $\widehat{M}$ с базисом

$$\widehat{M}:\begin{pmatrix}p^l & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & \varepsilon p^{-k}\\ p^{l+m-k} & 0\end{pmatrix},$$

$m+l-k \geqslant l \geqslant k \geqslant 0$, а решетка с таким базисом — кольцо.

4.3) $M:\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b & c\\ d & 0\end{pmatrix},$

$$M:\begin{pmatrix}p^k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}p^r & \varepsilon p^{-l}\\ p^m & 0\end{pmatrix},\ m-l, m, k \geqslant 0, 0 \leqslant r < k.$$

Это — кольцо тогда и только тогда, если $m \geqslant k \geqslant l \geqslant 0$:

$$M^*:\begin{pmatrix}p^{-k} & p^{r-m-k}\\ 0 & -p^{-k}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & -\varepsilon p^{-l-m}\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & p^{-m}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть M — не кольцо.

4.3 а) $k > m \geqslant l \geqslant 0$. Отсюда следует $2k > m+l$, $2k > m+k-r$. На M^* минимум функции $\nu(\det\mu)$ достигается на элементе

$$q=\begin{pmatrix}p^{-k} & p^{r-m-k}\\ 0 & -p^{-k}\end{pmatrix},$$

$$q^{-1}M^*:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & p^{k+r-m}\\ 0 & -p^k\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}p^{k+r-m} & -\varepsilon p^{k+l-m}\\ -p^k & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & p^{k-m}\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$q^{-1}M^*$ подобна решетке

$$\widehat{M}:\begin{pmatrix}p^k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}p^{k+r-m} & \varepsilon p^{-l}\\ p^{2k-m} & 0\end{pmatrix},\quad 2k-m > k > l \geqslant 0,$$

$$k+l-m \geqslant 0.$$

А решетка с таким базисом — кольцо.

Таким образом M^* подобна кольцу.

4. 3 б) $m \geqslant l > k \geqslant 0$. Отсюда следует $2k \leqslant m+l$. Не может быть $m+l < m+k-r$, так как тогда мы имели бы противоречивые условия: $l > k$ и одновременно $l < k-r$.

Следовательно, $m+l \geqslant m+k-r$, функция ν $(\det\mu)$ достигает своего минимума на элементе

$$q=\begin{pmatrix}0 & -\varepsilon p^{-m-l}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in M^*,$$

$$q^{-1}M^*:\begin{pmatrix}0 & p^{-k}\\ \varepsilon^{-1}p^{l+m-k} & \varepsilon^{-1}p^{l-k-r}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\varepsilon^{-1}p^l\end{pmatrix},$$

$$q^{-1}M^*:\begin{pmatrix}p^l & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}p^{l+r-k} & \varepsilon p^{-k}\\ p^{l+m-k} & 0\end{pmatrix},$$

$$l+m-k \geqslant l \geqslant k \geqslant 0,\quad l+r-k \geqslant 0;$$

следовательно, q^{-1}, M^* — кольцо.

5. $M:\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}d_1 & d_3\\ d_4 & d_2\end{pmatrix},\quad a, ad_2, d_4, d_1+d_2 \in Z^{(p)},$

$a = p^k,\quad d_4 = p^m.$

Если d_1 или d_2 принадлежит $Z^{(p)}$, то можем легко свести этот случай к уже рассмотренным случаям.

Итак, $\nu(d_1) < 0$ и $\nu(d_2) < 0$. Не может быть $\nu(d_3) \geqslant 0$, так как тогда бы в решетке M лежал элемент $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_4 & d_2 \end{pmatrix}$ с нецелым детерминантом, $d_3 = \frac{\varepsilon_1}{p^l}$. Так как $d_1 + d_2 \in Z^{(p)}$, то $\nu(d_1) = \nu(d_2)$ и можно считать $d_1 = \frac{1}{p^r}$, $d_2 = -\frac{1}{p^r} + \varepsilon_2 p^n$:

$$M: \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^{-r} & \varepsilon_1 p^{-l} \\ p^m & -p^{-r} + \varepsilon_2 p^n \end{pmatrix},$$

$k \geqslant r > 0$, $l = 2r + m$ (так как детерминант последнего базисного элемента целый).

M не может быть кольцом, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^{-r} & \varepsilon_1 p^{-l} \\ p^m & -p^{-r} + \varepsilon_2 p^n \end{pmatrix} \in M$.

$$M^*: \begin{pmatrix} p^{-k} & \varepsilon_2 p^{n-k-m} - 2p^{-k-m-z} \\ 0 & -p^{-k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p^{-r-m} - \varepsilon_2 p^{n-m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 p^{-l-m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p^{-m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

det общего элемента решетки M^* имеет вид

$$\det = -z_1^2 \cdot \frac{1}{p^{2k}} + z_1 z_2 \cdot \frac{1}{p^k} - z_1 z_3 \left(\frac{\varepsilon_2 p^n}{p^{k+m}} - \frac{2}{p^{k+r+m}} \right) -$$

$$- z_2 z_3 \left(\frac{1}{p^{r+m}} - \frac{\varepsilon_2 p^n}{p^m} \right) + z_3^2 \cdot \frac{\varepsilon_1}{p^{l+m}} - z_3 z_4 \cdot \frac{1}{p^m}.$$

5. 1) Если $k \geqslant r + m$, то легко видеть, что $\min \nu(\det) = -2k$ и достигается на элементе

$$q = \begin{pmatrix} p^{-k} & \varepsilon_2 p^{n-k-m} - 2p^{-k-r-m} \\ 0 & -p^{-k} \end{pmatrix} \in M^*,$$

$$q^{-1}M^*: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -p^{k-r-m} \\ 0 & -p^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_2 p^{n+k-m} - 2p^{k-r-m} & -\varepsilon_1 p^{k-l-m} \\ -p^k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p^{k-m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$q^{-1}M^*$ подобна решетке $\widehat{M}$ с базисом:

$$\widehat{M}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^k & -p^{-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_2 p^{n+k-m} - 2p^{k-r-m} & -\varepsilon_1 p^{-l} \\ -p^{2k-m} & 0 \end{pmatrix}$$

Перейдем к подобной решетке $s\widehat{M}s^{-1}$, где

$$s = \begin{pmatrix} p^k & -p^{-r} \\ 0 & p^k \end{pmatrix}.$$

$$s\widehat{M}s^{-1}: \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ * & -p^{k-m-r} \end{pmatrix}.$$

И так как $k \geqslant r+m$, то M^* подобна решетке с базисом

$$\begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

а для таких решеток у нас уже получен результат в предыдущих пунктах.

5.2) $k < r+m$, $\min \nu(\det) = -(2r+2m)$ $(2r+2m = l+m)$. Минимум достигается на элементе

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 p^{-2r-2m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M^*;$$

$$q^{-1}M^*: \begin{pmatrix} 0 & -p^{-k} \\ -\varepsilon_1^{-1} p^{2r+2m-k} & -\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 p^{n+2r+m-k} + 2\varepsilon_1^{-1} p^{r+m-k} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1} p^{r+m} + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 p^{n+2r+m} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} p^{2r+m} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим базис в решетке $sq^{-1}M^* s^{-1}$, где

$$s = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1^{-1} p^{r+m} & 1 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1} p^{r+m} \end{pmatrix},$$

$$sq^{-1}M^* s^{-1}: \begin{pmatrix} p^{r+m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^{2r+m} & \varepsilon_1 p^r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ * & -p^{r+m-k} \end{pmatrix},$$

$$sq^{-1}M^* s^{-1}: \begin{pmatrix} p^{r+m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * \\ * & p^{r+m-k} \end{pmatrix}$$

и так как $r+m-k > 0$, по предположению, то

$$sq^{-1}M^* s^{-1}: \begin{pmatrix} p^{r+m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

а для таких решеток у нас уже получен результат в предыдущих пунктах.

Доказательство теоремы закончено.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю Д. К. Фаддееву, а также А. В. Ройтеру и Л. А. Назаровой за постоянное внимание в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Фаддеев, Введение в мультпликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXX, 1965, 145—183.
2. Д. К. Фаддеев, К теории кубических Z-колец, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXX, 1965, 183—186.

Поступила 1.VI 1965 г.
Киев