Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом

Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук

Асимптотические методы нелинейной механики [1 — 3] являются простым и очень эффективным математическим аппаратом для исследования нелинейных колебательных систем как с одной, так и со многими степенями свободы. Этим и объясняется то обстоятельство, что за последние 10—15 лет появилось большое количество работ, в которых эти методы получили дальнейшее развитие и применяются для решения самых разнообразных задач физики и техники, связанных с изучением нелинейных колебательных явлений. Эти методы широко используются, например, при исследовании колебаний стержней, валов, лопаток турбин, роторов турбомашин, при расчете систем автоматического регулирования и гироскопических систем, при расчете траекторий ракет и орбит спутников, при исследовании колебательных явлений в ускорителях и т. д.

В настоящее время одной из актуальных задач теории колебаний является задача исследования колебательных процессов в системах с последействием, которые обычно описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом.

Наличие запаздывания в колебательной системе обусловливается тем, что скорость (или ускорение) протекания процесса в такой системе не всегда можно считать мгновенной и во многих случаях необходимо учитывать зависимость скорости от предистории системы. Явление последействия в системе может существенно влиять на весь ход колебательного процесса, в частности на устойчивость колебаний, а в ряде случаев может служить причиной возникновения самовозбуждающихся колебаний. Последнее обстоятельство широко используется в электро- и радиотехнике.

Примером колебательных систем с явлением последействия может служить любая автоколебательная система, в которой наряду с силами, определяемыми состоянием системы в данный момент, действуют силы запаздывающие, определяемые состоянием системы в моменты, предшествующие данному.

В последнее время для исследования колебательных процессов в системах с последействием стали широко применяться асимптотические методы нелинейной механики и, в частности, метод усреднения. Развитию этих методов применительно к системам с запаздыванием посвящены работы Л. Э. Эльсгольца [4—6], Н. Н. Красовского [7], С. Н. Шиманова [8—12], А. Халаная [13—17], В. П. Рубаника [18—23], В. И. Фодчука [23—27], Ж. К. Хейла [28] и др.

В настоящей статье, не претендуя на полноту, мы изложим основные результаты этих работ, а также некоторые новые результаты, и остановимся на перспективах дальнейшего развития асимптотических методов нелинейной механики для нелинейных колебательных систем с запаздыванием.

Подчеркнем, что мы будем рассматривать здесь только колебательные системы с запаздыванием и развитые для них асимптотические методы. Поэтому мы не будем касаться работ, посвященных другим асимптотическим методам (методу А. Б. Васильевой, методу Ю. А. Рябова и др.), обзор которых можно найти в [29].

§ 1. Методы построения асимптотических разложений для квазилинейных уравнений с запаздыванием

1. Рассмотрим сначала автономную колебательную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом вида

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(x(t), x(t-\Delta), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\Delta)), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, Δ — положительная постоянная, характеризующая запаздывание в системе. Относительно нелинейной функции f будем предполагать (здесь и в дальнейшем), что она имеет достаточное число непрерывных частных производных по всем аргументам в некоторой достаточно большой области их изменения.

Рассмотрим задачу: определить периодическое решение уравнения (1) $x = x(t, \varepsilon)$, соответствующее установившемуся режиму в колебательной системе (стационарным колебаниям), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в периодическое решение $x_0(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$ порождающего уравнения (т. е. уравнения (1) при $\varepsilon = 0$).

Для построения такого решения в работе [24] применен асимптотический метод, согласно которому решение уравнения (1) ищется в виде $x(t) = z(\overline{\omega}t + \varphi)$, где $z(\psi)$ — периодическая функция ψ с периодом 2π.

Подставляя значение $x(t)$ в уравнение (1), получаем для функции $z(\psi)$ уравнение

$$\overline{\omega}^2 z''(\psi) + \omega^2 z(\psi) = \varepsilon f(z(\psi), z(\psi - \overline{\omega}\Delta), \overline{\omega}z'(\psi), \overline{\omega}z'(\psi - \overline{\omega}\Delta)), \tag{2}$$

где (′) обозначает дифференцирование по ψ.

Решение уравнения (2) и частоту колебаний $\overline{\omega}$ ищем в виде разложений

$$z(\psi) = z_0(\psi) + \varepsilon z_1(\psi) + \varepsilon^2 z_2(\psi) + \ldots,$$
$$\overline{\omega} = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots; \tag{3}$$

при этом требуем, чтобы функции $z_n(\psi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ были периодическими функциями ψ с периодом 2π.

Подставляя (3) в (2), раскладывая правую часть в ряд по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $z_n(\psi)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и величин α_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$:

$$\alpha_0^2 z_0''(\psi) + \omega^2 z_0(\psi) = 0,$$

$$\alpha_0^2 z_1''(\psi) + \omega^2 z_1(\psi) = f(z_0(\psi), z_0(\psi - \alpha_0\Delta), \alpha_0 z_0'(\psi), \alpha_0 z_0'(\psi - \alpha_0\Delta)) - 2\alpha_0\alpha_1 z_0''(\psi)),$$

$$\alpha_0^2 z_2''(\psi) + \omega^2 z_2''(\psi) = f_z' z_1(\psi) + f_u'[z_1(\psi - \alpha_0\Delta) - \alpha_1\Delta z_0'(\psi - \alpha_0\Delta)] +$$
$$+ f_{z'}'[\alpha_0 z_1'(\psi) + \alpha_1 z_0'(\psi)] + f_v'[\alpha_0 z_1'(\psi - \alpha_0\Delta) + \alpha_1 z_0(\psi - \alpha_0\Delta) - \alpha_0\alpha_1 z_0''(\psi -$$
$$- \alpha_0\Delta)] - 2\alpha_0\alpha_1 z_1''(\psi) - 2\alpha_0\alpha_2 z_0''(\psi) - \alpha_0^2 z_0''(\psi), \tag{4}$$

. . . .

где f'_z, f'_u, $f'_{z'}$, f'_v обозначают производные от функции f соответственно по первому, второму, третьему и четвертому аргументам, вычисленные для значений $z = z_0(\psi)$, $\omega = \alpha_0$.

Из уравнений (4), принимая во внимание требование периодичности функций $z_n(\psi)$, последовательно определяем функции $z_0(\psi)$, $z_1(\psi), \ldots$ и величины $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$.

Из первого уравнения находим

$$z_0(\psi) = a\cos\psi, \qquad \alpha_0 = \omega,$$

где a — пока произвольная постоянная.

Подставим эти значения z_0 и α_0 во второе уравнение (4) и разложим затем функцию f в ряд Фурье с коэффициентами $g_n(a)$ и $h_n(a)$. Чтобы это уравнение имело относительно $z_1(\psi)$ периодическое решение с периодом 2π, необходимо приравнять нулю коэффициенты при основной гармонике, входящей в его правую часть.

Приравнивая, получаем уравнения

$$h_1(a) = 0,$$

$$g_1(a) + 2\omega\alpha_1 a = 0,$$

из которых определяем a и α_1. Тогда решение $z_1(\psi)$ имеет вид

$$z_1(\psi) = a_1\cos\psi + \frac{1}{\omega^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2},$$

где a_1 — постоянная, которая вместе с α_2 должна быть определена из условия периодичности $z_2(\psi)$, и т. д.

2. Рассмотрим теперь более общую автономную колебательную систему с запаздыванием, которая описывается уравнением

$$\ddot{x}(t) + p_1\dot{x}(t) + q_1\dot{x}(t-\Delta_1) + p_2 x(t) + q_2 x(t-\Delta_2) =$$

$$= \varepsilon f(x(t), x(t-\Delta_2), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\Delta_1), \varepsilon) \tag{5}$$

или, кратко, уравнением

$$L(x(t)) = \varepsilon f, \tag{5'}$$

где p_i, q_i, Δ_i $(i = 1, 2)$ — постоянные, причем $\Delta_i > 0$.

Предположим, что характеристическое уравнение, составленное для порождающего уравнения

$$L(x(t)) = 0, \tag{6}$$

имеет лишь одну пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Этим корням будет отвечать семейство периодических решений $\left(\text{с периодом } \dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ порождающего уравнения (6)

$$x_0(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{7}$$

где a и φ — произвольные постоянные.

Будем снова искать периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ уравнения (5), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающее решение (7).

Для построения такого решения Л. Э. Эльсгольц предложил следующий метод [4].

Поскольку период решения $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ будет отличаться от $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то положим его равным

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots), \tag{8}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — неизвестные величины.

Сделаем в (5) замену независимой переменной по формуле $t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha} t$, где $\alpha = 1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots$. Имеем

$$\overline{L}(x(t_1)) = \varepsilon\overline{f}(x(t_1), x(t_1 - \overline{\Delta}_2), \dot{x}(t_1), \dot{x}(t_1 - \overline{\Delta}_1), \varepsilon), \tag{9}$$

где $\overline{\Delta}_i = \frac{\omega_0}{\alpha}\Delta_i$ $(i = 1, 2)$, $\overline{L}$ отличается от оператора L коэффициентами и величинами запаздываний а функция $\overline{f}$ обладает всеми свойствами функции f.

Периодическое решение уравнения (9), имеющее уже постоянный период 2π, ищем в виде формального ряда

$$x(t_1, \varepsilon) = x_0(t_1) + \varepsilon x_1(t_1) + \varepsilon^2 x_2(t_1) + \ldots; \tag{10}$$

здесь $x_n(t_1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — периодические функции t_1 периода 2π, являющиеся решениями линейных уравнений

$$\overline{L}(x_0(t_1)) = 0,$$

$$\overline{L}(x_1(t_1)) = \Phi_1(\alpha_1, x_0(t_1), x_0(t_1 - \overline{\Delta}_2), \dot{x}_0(t_1), \dot{x}_0(t_1 - \overline{\Delta}_1), \varepsilon), \tag{11}$$

$$\overline{L}(x_2(t_1)) = \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, x_0(t_1), \ldots, \dot{x}_0(t_1 - \overline{\Delta}_1), x_1(t_1), \ldots, \dot{x}_1(t_1 - \Delta_1), \varepsilon),$$

где функции Φ_i линейны относительно α_i.

Из первого уравнения (11) находим $x_0(t_1) = a\cos(t_1 + \varphi)$, где a, φ — пока произвольные постоянные.

Второе уравнение (11) имеет периодическое решение $x_1(t_1)$ периода 2π лишь при отсутствии в его правой части резонирующих членов, т. е. при условии

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1 \cos t_1 dt_1 = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \Phi_1 \sin t_1 dt_1 = 0. \tag{12}$$

Из уравнений (12) определяем величины a и α_1 и т. д.

Заметим, что указанный способ определения периодического решения в виде асимптотического ряда (10) применим также и для неавтономных квазилинейных уравнений вида

$$L(x(t)) = f(t) + \varepsilon F(t, x(t - \Delta_2), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \Delta_1), \varepsilon), \tag{13}$$

где f и F — периодические функции t.

Как и в случае квазилинейных колебательных систем без запаздывания, здесь возможны резонансные и нерезонансные случаи.

Подставляя (10) в (13) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем линейные неоднородные уравнения для определения $x_n(t)$.

3. Вернемся к уравнению

$$L(x(t)) = \varepsilon f,$$

где сохранены прежние обозначения и ограничения. Как и прежде, допустим, что при отсутствии возмущения ($\varepsilon = 0$) система совершает гармонические колебания $x = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом

$$\frac{da}{dt} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 \qquad (\psi = \omega_0 t + \varphi). \tag{14}$$

Частота ω_0, очевидно, удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} l_{1,1}(\omega) &\equiv -\omega^2 + p_2 + q_1\omega\sin\omega\Delta_1 + q_2\cos\omega\Delta_2 = 0, \\ l_{2,1}(\omega) &\equiv -p_1\omega - q_1\omega\cos\omega\Delta_1 + q_2\sin\omega\Delta_2 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Предположим, что ω_0 — простой корень уравнения (15) и что эти уравнения не имеют корней вида $n\omega_0$, где n — целое число или нуль.

При наличии малого возмущения ($\varepsilon \neq 0$) система будет совершать колебания, близкие к гармоническим, но амплитуда колебаний будет зависеть, вообще говоря, от времени (т. е. колебания будут нестационарными), а мгновенная частота будет зависеть от амплитуды. Для нахождения решений уравнения (5), соответствующих этим колебаниям, В. П. Рубаник [18] применил асимптотический метод нелинейной механики [2].

Решение уравнения (5) ищется в виде разложення

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots, \tag{16}$$

в котором $u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \ldots$ являются периодическими функциями ψ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots . \end{aligned} \tag{17}$$

Для того чтобы выражения (16) (с учетом (17)) удовлетворяли уравнению (5) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}, необходимо подставить эти выражения в (5), разложить обе части уравнения по степеням ε и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε до m-го порядка включительно.

В результате получаем уравнения:

$$\begin{aligned} &L_\psi(a\cos\psi) = 0, \\ &L_\psi(u_1(a, \psi)) = \Phi_1(A_1, B_1, a, \psi), \\ &L_\psi(u_2(a, \psi)) = \Phi_2(A_2, B_2, a, \psi), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &L_\psi(u_m(a, \psi)) = \Phi_m(A_m, B_m, a, \psi), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$L_\psi(u_i(a, \psi)) = \omega_0^2\frac{\partial^2 u_i(a, \psi)}{\partial\psi^2} + p_1\omega_0\frac{\partial u_i(a, \psi)}{\partial\psi} + q_1\omega_0\frac{\partial u_i(\psi - \omega_0\Delta_1)}{\partial\psi} + p_2 u_i(a, \psi) + q_2 u_i(a, \psi - \omega_0\Delta_2),$$

Φ_i — линейные относительно A_i, B_i функции, выражающиеся через функцию f и ее производные, вычисленные при $x = a\cos\psi$, $\varepsilon = 0$, а также через функции A_k, B_k, u_k, где $k \leqslant i$.

Для однозначности определения искомых функций накладываем на них дополнительные условия. Именно, требуем отсутствия первой гармоники в выражениях $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ...

Представляя правые части уравнений (18) и искомые функции $u_i(a, \psi)$ в виде рядов Фурье и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых гармониках, мы однозначно определяем A_1, B_1, u_1, A_2, B_2, u_2 и т. д.

Для определения периодических решений уравнения (5), соответствующих стационарным колебаниям системы, нужно приравнять правую часть первого уравнения (17) к нулю и из полученного алгебраического уравнения найти стационарные амплитуды.

4. Предположим теперь, что параметры и запаздывания колебательной системы не постоянны, а медленно изменяются со временем («медленно» по отношению к естественной единице времени — периоду собственных колебаний). В этом случае мы сталкиваемся с важной проблемой исследования нестационарных колебательных процессов в системах с последействием. Такие процессы во многих случаях можно описать уравнением вида

$$\ddot{x}(t) + p_1(\tau)\dot{x}(t) + q_1(\tau)\dot{x}(t-\Delta_1(\tau)) + p_2(\tau)x(t) + q_2(\tau)x(t-\Delta_2(\tau)) =$$
$$= \varepsilon f(\tau, x(t), x(t-\Delta_2(\tau)), \quad \dot{x}(t), \dot{x}(t-\Delta_1(\tau)), \tag{19}$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, функции p_i, q_i, Δ_i $(i=1, 2)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по τ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$, на котором мы будем рассматривать колебательный процесс, причем $\Delta_i(\tau) \geqslant 0$ для $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Заметим при этом, что рассмотрение дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и запаздываниями эквивалентно рассмотрению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в которых малый параметр стоит при старшей производной.

Для исследования нестационарных колебаний в системах с запаздыванием в работе [25] применен асимптотический метод [3].

Как и в предыдущем случае, допускаем, что невозмущенная система $L(x(t), \tau) = 0$, в которой τ будем рассматривать как постоянный параметр $\tau = \tau_0$, совершает чисто гармонические колебания

$$x = a\cos(\omega(\tau_0)t + \varphi), \tag{20}$$

где $\omega(\tau_0)$ — простой корень уравнений (15), в которых нужно положить $p_i = p_i(\tau_0)$, $q_i = q_i(\tau_0)$, $\Delta_i = \Delta_i(\tau_0)$ $(i = 1, 2)$, причем уравнения (15) не имеют корней, близких к $\omega(\tau_0)$, и корней вида $n\omega(\tau_0)$, где n — целое число или нуль, для всех $0 \leqslant \tau_0 \leqslant L$.

Решение уравнения (19), мало отличающееся от решения (20) порождающего уравнения, будем искать в виде разложений (16), (17), в которых $u_k = u_k(\tau, a, \psi)$, $A_k = A_k(\tau, a)$, $B_k = B_k(\tau, a)$, $\omega = \omega(\tau)$, причем функции u_k периодические по ψ с периодом 2π.

С помощью того же способа, что и в предыдущем случае, для определения неизвестных функций u_k, A_k, B_k получаем уравнения вида (18), которые не будем выписывать, подчеркнем лишь, что получаемые здесь уравнения линейны и решение их не представляет принципиальных трудностей. Так, например, для решения уравнения (19) в улучшенном первом приближении находим следующие явные выражения функций A_1, B_1, u_1:

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi),$$

$$u_1(\tau, a, \psi) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} \frac{(g_n l_{1,n} + h_n l_{2,n})\cos n\psi + (h_n l_{1,n} - g_n l_{2,n})\sin n\psi}{l_{1,n}^2 + l_{2,n}^2},$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\frac{\gamma_2 l'_{1,1} - \gamma_1 l'_{2,1}}{l'^2_{1,1} + l'^2_{2,1}},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon}{a}\frac{\gamma_1 l'_{1,1} + \gamma_2 l'_{2,1}}{l'^2_{1,1} + l'^2_{2,1}},$$

где (′) обозначает частную производную по ω, функции $l_{1,1} = l_{1,1}(\tau,\omega)$, $l_{2,1} = l_{2,1}(\tau,\omega)$ определяются формулами (15), записанными для уравнения (19), функции $l_{1,n} = l_{1,n}(\tau,\omega)$, $l_{2,n} = l_{2,n}(\tau,\omega)$ также имеют вид (15), где вместо ω нужно положить $n\omega(\tau)$,

$$\gamma_1 = g_1 + q_1\frac{d(\omega\Delta_1)}{d\tau}a\sin\omega\Delta_1,$$

$$\gamma_2 = h_1 - q_1\frac{d(\omega\Delta_1)}{d\tau}a\cos\omega\Delta_1 + \frac{d\omega}{d\tau}a,$$

а величины $g_n = g_n(\tau, a)$, $h_n = h_n(\tau, a)$ являются коэффициентами ряда Фурье для функции

$$f(\tau, a\cos\psi, a\cos(\psi - \omega\Delta_2), -a\omega\sin\psi, -a\omega\sin(\psi - \omega\Delta_1)).$$

Рассмотрим еще случай линейных систем с медленно меняющимися параметрами и запаздыванием. Пусть уравнение движения такой системы имеет вид

$$\ddot{z}(t) + \varepsilon p(\tau,\varepsilon)\dot{z}(t) + \omega^2(\tau,\varepsilon)z(t) + \varepsilon b(\tau,\varepsilon)z(t - \Delta(\tau)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\bar{A}_j(\tau,\varepsilon)e^{i\theta_j},$$

где $p(\tau,\varepsilon)$, $\omega^2(\tau,\varepsilon)$, $b(\tau,\varepsilon)$ — действительные функции, достаточное число раз дифференцируемые по τ, $\bar{A}_j(\tau,\varepsilon)$ — непрерывные комплексные функции, причем, p, ω^2, b, $\bar{A}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ допускают представление в виде степенных рядов по ε.

Для построения формальных решений этого уравнения в работе [30] применяется асимптотический метод, разработанный С. Ф. Фещенко.

5. Перейдем к рассмотрению методов построения асимптотических приближений для случая колебательных систем с запаздыванием со многими степенями свободы.

Рассмотрим сначала автономную квазилинейную систему вида

$$\dot{x}_s(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} b_{si}x_i(t - \Delta) +$$

$$+ \varepsilon f_s(x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t - \Delta), \ldots, x_n(t - \Delta), \varepsilon) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad (21)$$

Предположим, что характеристическое уравнение

$$|a_{si} + b_{si}e^{-\Delta\lambda} - \delta_{si}\lambda| = 0 \qquad (22)$$

имеет m простых чисто мнимых корней вида $ik_j\omega$, где k_j — целые числа или нуль. В этом случае порождающая система будет иметь семейство периодических решений периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$, зависящее от m произвольных постоянных,

$$x_s^{(0)}(t) = M_1\varphi_{s1}(t) + \ldots + M_m\varphi_{sm}(t), \qquad (23)$$

где φ_{si} — периодические решения порождающей системы, имеющие общий период T.

Будем искать решение $x_s(t, \varepsilon)$ возмущенной системы (21), близкое для достаточно малых ε к порождающему решению (23). Для построения такого решения Д. И. Мартынюк и В. И. Фодчук (см. Укр. матем. ж., т. 18, № 4) применили следующий вариант асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

Решение (21) ищется в виде формального ряда

$$x_s(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{m-1} M_k \varphi_{sk}(\bar{t}) + \varepsilon u_{s1}(\bar{t}, M_1, \ldots, M_{m-1}) + \\ + \varepsilon^2 u_{s2}(\bar{t}, M_1, \ldots, M_{m-1}) + \ldots, \tag{24}$$

где u_{sj} $(j = 1, 2, \ldots)$ — периодические функции $\bar{t}$ периода T, подлежащие определению, а $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$, $\bar{t}$ — являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{dt} &= \varepsilon E_{k1}(M_1, \ldots, M_{m-1}) + \varepsilon^2 E_{k2}(M_1, \ldots, M_{m-1}) + \ldots, \\ \frac{d\bar{t}}{dt} &= 1 - \varepsilon \alpha_1 (M_1, \ldots, M_{m-1}) - \varepsilon^2 \alpha_2 (M_1, \ldots, M_{m-1}) + \ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

где функции E_{kj}, α_j также подлежат определению.

Заметим, что мы приняли в (24) и (25) $M_m = 0$. Чтобы построенное таким способом решение $x_s(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ обращалось в порождающее решение (23), нужно предположить (см. [8]), что последние два решения $\varphi_{s,m-1}$ и φ_{sm} в (23) соответствуют паре чисто мнимых корней, а не нулевому корню.

Подставляя (24), (25) в (21) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем уравнения для определения функций u_{sj}:

$$\frac{\partial u_{s1}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} u_{i1} + \sum_{i=1}^{n} b_{si} u'_{i1} + \alpha_1 \frac{\partial u_{s0}}{\partial \bar{t}} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u_{s0}}{\partial M_k} E_{k1} + \\ + f_s(u_{10}, \ldots, u_{n0}, u'_{10}, \ldots, u'_{n0}, 0), \tag{26}$$

. . . .

$$\frac{\partial u_{sj}}{\partial \bar{t}} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{si} u'_{ij} + \alpha_j \frac{\partial u_{s0}}{\partial \bar{t}} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u_{s0}}{\partial M_k} E_{kj} + R_{sj},$$

. . . .

где $u_{s0} = \sum_{k=1}^{m-1} M_k \varphi_{sk}(\bar{t})$, $u'_{s0} = \sum_{k=1}^{m-1} M_k \varphi_{sk}(\bar{t} - \Delta)$, а функции R_{sj} зависят только от $u_{s0}, \ldots, u_{s,j-1}$, $u'_{s0}, \ldots, u'_{s,j-1}$ и их производных, а также от величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}$, $E_{k1}, \ldots, E_{k,j-1}$.

Величины α_j и E_{kj} определяются из условий периодичности функций u_{sj} по $\bar{t}$ (с периодом T).

Для того чтобы функции u_{s1} были периодическими с периодом T, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^T \sum_{s=1}^n f_s(u_{10}, \ldots, u_{n0}, u'_{10}, \ldots, u'_{n0}, 0)\, \psi_{sj} d\bar{t} +$$

$$+ \alpha_1 \int_0^T d\bar{t} \sum_{k=1}^{m-1} M_k \sum_{s=1}^n \frac{d\varphi_{sk}}{d\bar{t}}\, \psi_{sj} - \int_0^T d\bar{t} \sum_{k=1}^{m-1} E_{k1} \sum_{s=1}^n \varphi_{sk}\psi_{sj} \equiv$$

$$\equiv Q_j(M_1, \ldots, M_{m-1}, \alpha_1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{27}$$

где ψ_{sj} — периодические решения (периода T) сопряженной к порождающей системы.

Из уравнений (27) определяем $\alpha_1 = \alpha_1(M_1, \ldots, M_{m-1})$ и $E_{j1} = E_{j1}(M_1, \ldots, M_{m-1})$ $(j = 1, \ldots, m-1)$, после чего из первого уравнения (26) находим

$$u_{s1} = c_{11}\varphi_{s1}(\bar{t}) + \ldots + c_{m-1,1}\varphi_{s,m-1}(\bar{t}) + u^*_{s1}(\bar{t}),$$

где c_{j1} — произвольные функции от $M_1, \ldots, M_{m-1}$, не зависящие от $\bar{t}$, а $u^*_{s1}(\bar{t})$ — частное периодическое решение.

Для нахождения периодических решений уравнений (21) необходимо, очевидно, найти квазистатическое решение уравнений (25). Однако для этой цели проще пользоваться методом С. Н. Шиманова [8].

6. Рассмотрим несколько более общую, чем (21), систему уравнений

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r a_i x(t - \Delta_i) + \varepsilon f(x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_r), \varepsilon), \tag{28}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $a_i = \| a_{isj} \|$ $(s, j = 1, \ldots, n)$ — постоянные матрицы, $\Delta_1 = 0 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_r$ — постоянные.

Как и в предыдущем случае, допустим, что порождающая система имеет семейство периодических решений (23) периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Будем искать периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ системы (28) с периодом

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots),$$

обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее решение (23).

Сделаем в (28) замену независимой переменной по формуле $t_1 = \frac{t}{1 + \varepsilon\alpha}$, где $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon\alpha_2 + \ldots$ Имеем

$$\frac{dx}{dt_1} = (1 + \varepsilon\alpha)\left[\sum_{i=1}^r a_i x(t_1 - \Delta'_i) + \varepsilon f(x(t_1 - \Delta'_1), \ldots, x(t_1 - \Delta'_r), \varepsilon)\right], \tag{29}$$

где $\Delta'_i = \frac{\Delta_i}{1 + \varepsilon\alpha}$.

Тогда, следуя С. Н. Шиманову [8], периодическое решение $x(t_1, \varepsilon)$ периода T системы (29), соответствующее периодическому решению $x(t, \varepsilon)$

периода $T(\varepsilon)$ системы (28), будем искать в виде ряда

$$x(t_1, \varepsilon) = x^{(0)}(t_1) + \varepsilon x^{(1)}(t_1) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t_1) + \ldots, \tag{30}$$

где

$$x_s^{(0)}(t_1) = M_1 \varphi_{s1}(t_1) + \ldots + M_{m-1} \varphi_{s,m-1}(t_1).$$

Для определения функций $x^{(k)}(t_1)$ имеем уравнения

$$\frac{dx^{(1)}}{dt_1} = \sum_{i=1}^{r} a_i x^{(1)}(t_1 - \Delta_i) + f(x^{(0)}(t_1 - \Delta_1), \ldots, x^{(0)}(t_1 - \Delta_r), 0) +$$

$$+ \alpha_1 \sum_{i=1}^{r} a_i x^{(0)}(t_1 - \Delta_i) + \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{dx^{(0)}(t_1 - \Delta_i)}{dt_1} \alpha_1 \Delta_i, \tag{31}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx^{(k)}}{dt_1} = \sum_{i=1}^{r} a_i x^{(k)}(t_1 - \Delta_i) + \alpha_k \sum_{i=1}^{r} a_i x^{(0)}(t_1 - \Delta_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1 - \Delta_i')} \right)_{x = x^{(0)}} x^{(k-1)}(t_1 - \Delta_i) + R_k, \tag{32}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где R_k — целые рациональные функции с постоянными коэффициентами от $x^{(0)}, \ldots, x^{(k-1)}$ и их производных, а также от $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$. Скобки показывают, что производные вычислены для значений $x = x^{(0)}$, $\varepsilon = 0$.

Уравнение (31) имеет периодическое решение $x^{(1)}(t_1)$ периода T, если выполняются условия

$$\int_0^T f(x^{(0)}(t_1 - \Delta_1), \ldots, x^{(0)}(t_1 - \Delta_r), 0)\, \psi_j(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \alpha_1 \int_0^T \sum_{i=1}^{r} a_i \Delta_i \frac{dx^{(0)}(t_1 - \Delta_i)}{dt_1} \psi_j(t_1)\, dt_1 + \alpha_1 \sum_{k=1}^{m-1} A_{kj} M_k \equiv Q_j(M, \alpha_1) = 0 \tag{33}$$

$$(j = 1, \ldots, m),$$

где

$$\sum_{k=1}^{m} A_{kj} M_k = \int_0^T \sum_{i=1}^{r} a_i x^{(0)}(t_1 - \Delta_i)\, \psi_j(t_1)\, dt_1.$$

Допустим, что $M_1, \ldots, M_{m-1}$, α_1 удовлетворяют уравнениям (33). Тогда из (31) находим

$$x_s^{(1)} = M_1^{(1)} \varphi_{s1}(t_1) + \ldots + M_{m-1}^{(1)} \varphi_{s,m-1}(t_1) + x_s^{(1)*}(t_1),$$

где $M_k^{(1)}$ — постоянные, которые вместе с α_2 следует определять из условий периодичности $x_s^{(2)}(t_1)$, а $x_s^{(1)*}(t_1)$ — какое-нибудь частное периодическое решение уравнения (31).

7. Рассмотрим теперь квазилинейную колебательную систему с запаздыванием, находящуюся под воздействием многочастотных возмущаю-

щих сил при наличии в системе различных комбинационных и внутренних резонансов. Пусть движение такой системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t)=\sum_{l=1}^{r}A_l x(t-\Delta_l)+\varepsilon f(\tau,\theta(t),x(t-\Delta_1),\ldots,x(t-\Delta_r),\varepsilon), \qquad (34)$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $f=(f_1,\ldots,f_n)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$, $A_l=\|A_{lsj}\|$ $(s,\ j=1,\ldots,n)$ — постоянные матрицы, $\dfrac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$, $\tau=\varepsilon t$. Предположим, что функция f периодическая по θ_s $(s=1,\ldots,m)$ с периодом 2π, а функция $\nu(\tau)$ положительна и достаточное число раз дифференцируема для $0\leqslant\tau\leqslant L$.

Допустим, что характеристическое уравнение порождающей системы имеет один простой нулевой корень $\lambda_0=0$ и q пар чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1,\ldots,\lambda_{2q-1,2q}=\pm i\omega_q$. Этим корням будет отвечать семейство частных периодических решений порождающей системы вида

$$x(t)=a_0\varphi^{(0)}+\sum_{k=1}^{q}a_k[\varphi^{(k)}e^{i(\omega_k t+\alpha_k)}+\bar{\varphi}^{(k)}e^{-i(\omega_k t+\alpha_k)}], \qquad (35)$$

где $\varphi^{(k)}$ — нетривиальные решения системы

$$\left[\sum_{l=1}^{r}A_l e^{-i\omega_k\Delta_l}-i\omega_k E\right]\varphi^{(k)}=0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ q,\ \omega_0=0),$$

$\bar{\varphi}^{(k)}$ — комплексно-сопряженные с $\varphi^{(k)}$ величины, a_k и α_k — произвольные постоянные.

Предположим, далее, что в рассматриваемом промежутке изменения τ выполняются условия резонансов

$$\sum_{s=1}^{m}p_s^{(\mu,j)}\nu_s(\tau_{\mu,j})+\sum_{k=1}^{q}g_k^{(\mu,j)}\omega_k\simeq\omega_j \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ q,\ \omega_0=0;\ \mu=1,\ \ldots,\ b_j), \qquad (36)$$

где $p_s^{(\mu,j)}$, $g_s^{(\mu,j)}$ — целые числа (некоторые из них могут быть нулями), и в этом промежутке нет других резонансов указанного вида.

Для построения решения системы (34), мало отличающегося при достаточно малых ε от решения (35) порождающей системы, В. П. Рубаник [19] применил метод асимптотических разложений [3] в следующем виде.

Решение уравнения (34) ищется в виде асимптотического ряда

$$x(t)=u_0(a,\ \psi)+\varepsilon u_1(\tau,\ a,\ \psi,\ \theta)+\varepsilon^2u_2(\tau,\ a,\ \psi,\ \theta)+\ldots, \qquad (37)$$

где $a=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_q)$, $\psi=(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_q)$, $\theta=(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_m)$, $u_0(a,\ \psi)$ имеет вид (35), функции $u_j(\tau,\ a,\ \psi,\ \theta)$ ограничены и периодические по ψ_k, θ_s с периодом 2π, а $a_k(t)$ и $\psi_k(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_{k1}(\tau,\ a,\ \eta)+\varepsilon^2A_{k2}(\tau,\ a,\ \eta)+\ldots \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ q),$$

$$(38)$$

$$\frac{d\psi_k}{dt}=\omega_k+\varepsilon B_{k1}(\tau,\ a,\ \eta)+\varepsilon^2B_{k2}(\tau,\ a,\ \eta)+\ldots \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q),$$

где обозначено:

$$\eta\equiv\eta_{\mu,j}(t)=\sum_{s=1}^{m}p_s^{(\mu,j)}\theta_s(t)+\sum_{k=1}^{q}g_k^{(\mu,j)}\psi_k(t)-\psi_j(t)\ \ (j=0,1,\ldots,q,\ \mu=1,\ \ldots,\ b_j). \qquad (39)$$

Подставляя (37) с учетом (38), (39) в уравнение (34) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем уравнения для определения неизвестных функций u_i. Коэффициенты разложений (38) определяются из условий ограниченности и периодичности функций u_i по ψ_k и θ_s.

В заключение отметим, что изложенный выше метод применим также для исследования резонансных колебаний в системах с запаздыванием с одной степенью свободы [20].

8. Рассмотрим теперь нелинейную колебательную систему с распределенными параметрами и с запаздыванием по времени. Пусть колебания в такой системе описываются квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных с запаздывающим аргументом, близким к уравнению гиперболического типа,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon F(t,\ x,\ u(t,\ x),\ u(t-\Delta,\ x),\ u'_t(t,\ x),$$

$$u'_t(t-\Delta,\ x),\ u'_x(t,\ x),\ u'_x(t-\Delta,\ x),\ \varepsilon), \tag{40}$$

где F — нелинейная функция, периодическая по t с периодом 2π и имеющая достаточное число непрерывных частных производных по всем своим аргументам, начиная со второго.

Пусть начальные и граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u(t,\ x) &= \varphi(t,\ x) \\ u'_t(t,\ x) &= \Phi(t,\ x) \end{aligned}\right\} \text{ для } t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_0, \tag{41}$$

$$u(t,\ x)\big|_{x=0} = u(t,\ x)\big|_{x=l} = 0, \tag{42}$$

где функции $\varphi(t,\ x)$ и $\Phi(t,\ x)$ непрерывны по t и достаточное число раз дифференцируемы по x.

Рассмотрим сначала невозмущенное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{43}$$

при тех же начальных и граничных условиях. Решая задачу (43), (41), (42) методом Фурье, находим

$$u(t,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{44}$$

где $\omega_n = \frac{n\pi}{l} a$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — частоты нормальных колебаний, A_n, B_n — постоянные, определяемые начальными условиями, а $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — ортонормированная система собственных функций задачи

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda^2 X_n = 0,$$

$$X_n(0) = X_n(l) = 0 \qquad (n = 1,\ 2, \ldots).$$

Исходя из вида решения (44) невозмущенного уравнения (43) и предполагая, что в связи с малостью возмущения форма колебаний возмущенной системы определяется с достаточной точностью теми же собственными функциями, что и форма колебаний невозмущенной системы, будем искать решение уравнения (40) в виде ряда

$$u(t,\ x,\ \varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t,\ \varepsilon)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{45}$$

где функции $T_n(t,\ \varepsilon)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ подлежат определению.

Подставляя (45) в (40), умножая обе части полученного равенства на $\sin\frac{m\pi}{l}x$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ и интегрируя результат в пределах от 0 до l, получим для определения функций $T_m(t,\ \varepsilon)$ следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d^2T_m(t,\ \varepsilon)}{dt^2}+\omega_m^2T_m(t,\ \varepsilon)=$$

$$=\varepsilon F_m\left(t,\ T_k(t,\ \varepsilon),\ T_k(t-\Delta,\ \varepsilon),\ \frac{dT_k(t,\ \varepsilon)}{dt},\ \frac{dT_k(t-\Delta,\varepsilon)}{dt},\ \varepsilon\right)$$

$$(m,\ k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{46}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} &T_m(t,\ \varepsilon)=\varphi_m(t)\\ &\frac{dT_m(t,\ \varepsilon)}{dt}=\Phi_m(t)\end{aligned}\right\}\ \text{для}\ t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0, \tag{47}$$

где $\varphi_m(t)$, $\Phi_m(t)$ — коэффициенты при $\sin\frac{m\pi}{l}x$ в разложении начальных функций $\varphi(t,\ x)$ и $\Phi(t,\ x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\sin\frac{m\pi}{l}x$.

Для построения приближенного решения системы (46) можно воспользоваться или изложенными выше асимптотическими методами, или привести систему (46) к стандартному виду и применить метод усреднения. Мы рассмотрим здесь второй способ.

Введем новые комплексно-сопряженные переменные z_m и z_{-m} $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ по формулам

$$T_m=z_me^{i\omega_mt}+z_{-m}e^{-i\omega_mt},$$

$$\frac{dT_m}{dt}=i\omega_mz_me^{i\omega_mt}-i\omega_mz_{-m}e^{-i\omega_mt}.$$

Тогда система (46) примет вид

$$\frac{dz_n}{dt}=\varepsilon\frac{e^{-i\omega_nt}}{2i\omega_n}\overline{F}_n(t,\ z_k(t),\ z_k(t-\Delta),\ \varepsilon)\qquad(n,\ k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

где $\omega_{-n}=-\omega_n$, $\overline{F}_{-n}=\overline{F}_n$.

Вводя обозначение $\frac{e^{-i\omega_nt}}{2i\omega_n}\overline{F}_n=Z_n$, получаем систему

$$\frac{dz_n}{dt}=\varepsilon Z_n(t,\ z_k(t),\ z_k(t-\Delta),\ \varepsilon)\qquad(n,\ k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots) \tag{48}$$

с начальными условиями

$$z_n(t)=\frac{1}{2}\varphi_n(t)e^{-i\omega_nt}+\frac{1}{2i\omega_n}\Phi_n(t)e^{-i\omega_nt}\equiv\psi_n(t)\quad(n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots) \tag{49}$$

для $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$.

Итак, задача свелась к отысканию решения бесконечной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с запаздывающим аргументом (48) и с начальными условиями (49), причем правые части системы (48) имеют множителем малый параметр ε, т. е. система имеет стандартный вид.

Суть метода усреднения применительно к системе (48) состоит в том, что решение системы (48) с начальными условиями (49) может быть с достаточной точностью аппроксимировано решением более простой системы

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \varepsilon Z_{n0}(\xi_k(t),\ \xi_k(t-\Delta),\ \varepsilon) \qquad (n,\ k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

где

$$Z_{n0}(x,\ y,\ \varepsilon) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Z_n(t,\ x,\ y,\ \varepsilon)\,dt,$$

с теми же начальными условиями.

Задача существенно упрощается, если запаздывание в системе мало, т. е. если $\Delta = \varepsilon\Delta_1$. Тогда, как будет показано в § 2, вместо системы (48) мы можем рассматривать бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \varepsilon Z_{n0}(\xi_k(t),\ \xi_k(t),\ \varepsilon) \qquad (n,\ k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

§ 2. Обоснование асимптотических методов для квазилинейных уравнений с запаздыванием

В предыдущем параграфе мы изложили методы построения приближенных решений для квазилинейных колебательных систем с запаздыванием в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε, т. е. в виде ряда

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots. \tag{50}$$

Хотя этот ряд является, вообще говоря, формальным, однако, взяв в нем конечное число членов

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^n x_n, \tag{51}$$

мы можем пользоваться им для приближенного вычисления частных решений рассматриваемой системы, так как конечная сумма (51) будет удовлетворять системе уравнений с точностью до членов порядка малости ε^{n+1}.

Если речь идет о построении периодических или почти периодических решений в виде ряда (50), то при определенных предположениях относительно рассматриваемой системы удается доказать сходимость этого ряда к решению системы.

Исследованию этих вопросов посвящены работы Н. Н. Красовского [7], Л. Э. Эльсгольца [4—6], С. Н. Шиманова [8—12], А. Халаная [13—17], В. П. Рубаника [21—23], В. И. Фодчука [26—27], Ж. К. Хейла [28], В. М. Волосова, Г. Н. Медведева, Б. И. Моргунова [31] и др.

Приведем некоторые из результатов, посвященных обоснованию изложенных в § 1 асимптотических методов и метода усреднения.

Рассмотрим сначала автономную квазилинейную систему вида (28). С. Н. Шиманов в работе [8] с помощью разработанного им метода вспомогательных систем обосновал асимптотический метод, содержание которого нами изложено выше (см. п. 6 § 1). Это обоснование сводится к установлению следующей теоремы.

Теорема (С. Н. Шиманов). *Если постоянные* $M_1^{(0)}, \ldots, M_{m-1}^{(0)}, \alpha^{(0)}$ *удовлетворяют уравнению*

$$Q_j^{(0)}(M^{(0)}, \alpha^{(0)}) \equiv \sum_{k=1}^{m-1} A_{kj} M_k^{(0)} \alpha^{(0)} + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x^{(0)}(t-\Delta_1), \ldots, x^{(0)}(t-\Delta_r), 0)\, \psi_j(t)\, dt = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

и имеет место условие

$$\left.\frac{\partial(Q_1^{(0)}, \ldots, Q_m^{(0)})}{\partial(M_1, \ldots, M_{m-1}, \alpha)}\right|_{M_i = M_i^{(0)},\ \alpha = \alpha^{(0)}} \neq 0,$$

то система (28) *допускает единственное решение* $x = x(t, \varepsilon)$ *периода* $\frac{2\pi}{\omega}(1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon))$, *которое при* $\varepsilon = 0$ *обращается в порождающее решение* (23) *периода* $\frac{2\pi}{\omega}$.

Отметим, что в приведенной теореме даны достаточные условия, однако в указанной статье С. Н. Шиманова [8] получены необходимые и достаточные условия существования периодического решения квазилинейной автономной системы с запаздыванием, обращающегося в порождающее решение при $\varepsilon = 0$.

Предположим теперь, что функция f в уравнении (28) аналитическая относительно всех своих аргументов; тогда периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ и его период $T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon))$ будут тоже аналитическими функциями параметра ε и, следовательно, ряд (30) будет сходиться к единственному периодическому решению $x(t, \varepsilon)$ уравнения (28), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающее решение (23).

С. Н. Шиманов [9—11] рассмотрел также неавтономную систему вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} a_i x(t - \Delta_i) + f(t) + \varepsilon F(t, x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_r), \varepsilon),$$

где функции f и F периодические (почти периодические) по t, и для нее установил необходимые и достаточные условия существования периодического (почти периодического) решения $x = x(t, \varepsilon)$, которое при $\varepsilon = 0$ обращается в периодическое (почти периодическое) решение порождающей системы.

Представляют большой интерес результаты С. Н. Шиманова [12], посвященные исследованию почти периодических колебаний квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения.

Рассматривается система, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} x(t + \vartheta)\, d\eta(\vartheta) + \varepsilon F(t, x(t + \vartheta), \varepsilon), \tag{52}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор, $d\eta(\vartheta)$ — n-мерная матрица; $\| d\eta(\vartheta) \|$ — мера Стильтьеса, позволяющая получить из системы (52) различные системы с запаздыванием времени при частных предположениях о функциях $\eta_{ij}(\vartheta)$ с ограниченной вариацией. Для уравнения (52) С. Н. Шимановым установлены условия существования почти периодических решений в случае вырождения, когда среди корней характеристического уравнения имеются критические корни — чисто мнимые или нулевые.

В связи с этим следует упомянуть о результатах, полученных К. М. Цой [32], который, развивая идеи С. Н. Шиманова, установил условия существования периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы и постоянным запаздыванием по времени в случае кратных корней разрешающего уравнения и указал практический прием вычисления периодических решений.

Ряд важных теорем был доказан А. Халанаем [15—17] для квазилинейных систем с распределенным запаздыванием, а также для нелинейных систем, содержащих малый параметр. Приведем одну из них [16].

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-\Delta),\ \varepsilon), \tag{53}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$; функция f периодическая по t с периодом $T > \Delta$.

Предположим, что порождающая система ($\varepsilon = 0$) имеет семейство $x_0(t, h)$ периодических решений периода T. Тогда система в вариациях

$$\dot{y}(t) = f'_u(t,\ x_0(t,\ h_0),\ x_0(t-\Delta,\ h_0),\ 0)\,y(t) +$$

$$+ f'_v(t,\ x_0(t,\ h_0),\ x_0(t-\Delta,\ h_0),\ 0)\,y(t-\Delta)$$

имеет периодическое решение $\left.\dfrac{\partial x_0(t,\ h)}{\partial h}\right|_{h=h_0}$. Пусть она не имеет других линейно независимых периодических решений периода T. Обозначим через $q_1(t,\ h_0), \ldots, q_k(t,\ h_0)$ периодические решения соответствующей сопряженной системы. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема (А. Халанай). *Пусть*

$$P_j(h) = \int_0^T q_j(t,\ h)\,f'_\varepsilon(t, x_0(t,\ h),\ x_0(t-\Delta,\ h),\ 0)\,dt.$$

Если h_0 удовлетворяет условию $P_j(h_0) = 0$ и

$$\det \frac{\partial}{\partial h_e} \int_0^T q_j(t,\ h)\,f'_\varepsilon(t,\ x_0(t,\ h),\ x_0(t-\Delta, h),\ 0)\,dt \neq 0$$

при $h = h_0$, а f — аналитическая функция от u, v, ε, то система (53) *имеет периодическое решение $x(t,\ \varepsilon)$ такое, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\ \varepsilon) = x_0(t, h_0)$.*

Кроме того, это периодическое решение можно искать в виде ряда

$$x(t,\ \varepsilon) = x_0(t,\ h_0) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots, \tag{54}$$

в котором функции $x_k(t)$ определяются единственным образом и ряд (54) сходится.

Рассмотрим теперь квазилинейную систему вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n [q_{ij}(t) + \varepsilon p_{ij}(t)]\,x_j(t - [g_{ij}(t) + \varepsilon h_{ij}(t)]) +$$

$$+ f_i(t) + \varepsilon F_i\{t,\ x_1(t - [g_{i1}(t) + \varepsilon h_{i1}(t)]), \ldots, x_n(t - [g_{in}(t) + \varepsilon h_{in}(t)])\}, \tag{55}$$

где $F_i(t,\ 0, \ldots, 0) = 0$ q_{ij}, p_{ij}, g_{ij}, h_{ij}, f_i, F_i — непрерывные ограниченные функции, периодические по t с периодом T, $g_{ij}(t) + \varepsilon h_{ij}(t) \geqslant 0$, и соответствующую невозмущенную систему, получающуюся при $\varepsilon = 0$ и $f_i(t) \equiv 0$:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t)\, y_j(t - g_{ij}(t)) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{56}$$

Для системы (55) важным является результат, полученный Н. Н. Красовским [7]. Мы приведем здесь основную теорему.

Теорема (Н. Н. Красовский). *Если решение* $y_1 = \ldots = y_n = 0$ *системы уравнений* (56) *асимптотически устойчиво, то система* (55) *при достаточно малом* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (ε_0 — *некоторая положительная постоянная*) *имеет единственное периодическое решение* $x = x(t, \varepsilon)$, *причем это решение устойчиво по параметру* ε.

Н. Н. Красовский показал также, что если функции q_{ij}, p_{ij}, g_{ij}, h_{ij}, f_i, F_i имеют непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ системы (55) может быть представлено в виде суммы

$$x(t, \varepsilon) = x_{(0)}(t) + \varepsilon x_{(1)}(t) + \ldots + \varepsilon^n x_{(n)}(t) + R_n(t, \varepsilon), \tag{57}$$

где $R_n(t, \varepsilon) = 0(\varepsilon^n)$, а $x_{(i)}(t)$ — периодические решения линейных систем с запаздыванием, получаемых подстановкой (57) в (55) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε.

Если функция F аналитическая по всем аргументам, начиная со второго, в окрестности порождающего решения $x(t, 0)$ и при достаточно малом $|\varepsilon|$, то периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ системы (55) может быть представлено в виде ряда по степеням ε.

Перейдем теперь к вопросу обоснования метода усреднения для систем с запаздыванием, изложенного в п. 8 § 1.

Вместо бесконечной системы уравнений (48) (при $\Delta = \varepsilon\Delta_1$) мы можем рассматривать следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x(t), x(t - \varepsilon\Delta_1)) \tag{58}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, элементами которого являются последовательности функций $\{x_i(t)\}$, удовлетворяющие в любой мемент времени $\bar{t}$ условию $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(\bar{t})|^2 < \infty$. Норма элемента x пространства $\mathcal{H}$ вычисляется по формуле

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Допустим, что в некоторой области $D \subset \mathcal{H}$ функция $X(t, x, y)$ равномерно ограничена, удовлетворяет условию Липшица и, кроме того, существует такое $X_0(x, y)$, что равномерно по x, y в области D

$$\lim_{T\to\infty} \left\| \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y)\, dt - X_0(x, y) \right\| = 0.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если* $\xi = \xi(t)$ *есть решение уравнения*

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon X_0(\xi(t), \xi(t)), \tag{59}$$

определенное для всех значений t и принадлежащее вместе со своей ϱ-окрестностью области D, а $x = x(t)$ есть решение уравнения (58), совпадающее на начальном отрезке $[-\Delta, 0]$ с $\xi(t)$, то для любых сколь угодно малых $\eta > 0$ и $\varrho > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ будет иметь место неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Для случая, когда в (58) x и X — векторы конечномерного евклидова пространства $\mathscr{E}^n$, эта теорема была доказана (при различных предположениях) А. Халанаем [13], В. П. Рубаником [21], В. И. Фодчуком [26].

Кроме того, в этом случае на системы с запаздыванием перенесены некоторые теоремы Н. Н. Боголюбова, дающие обоснование применимости метода усреднения на бесконечном интервале времени [13, 14, 22, 27]. Сформулируем одну из них.

Теорема (А. Халанай [13]). *Рассматривается система* (58), *где* $X(t, u, v)$ *имеет непрерывные частные производные первого порядка и* $X(t + T, u, v) \equiv X(t, u, v)$.

Пусть $X_0(u, v) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t, u, v)\,dt$ *и* ξ_0*—решение уравнения* $X_0(u, u) = 0$.

Тогда, если характеристические числа матрицы $\frac{\partial X_0(\xi_0, \xi_0)}{\partial u} + \frac{\partial X_0(\xi_0, \xi_0)}{\partial v}$ *имеют отрицательные действительные части, существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (58) *имеет периодическое решение* $x(t, \varepsilon)$ *периода* T, *которое при* $\varepsilon \to 0$ *стремится к* ξ_0.

Эта теорема справедлива также и для случая, когда функция $X(t, x, y)$ (и, следовательно, решение $x(t, \varepsilon)$) почти периодическая по t равномерна относительно x и y [14].

В работе В. М. Волосова, Г. Н. Медведева, Б. И. Моргунова [31] рассмотрена система с запаздыванием, содержащая быстрые движения, вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(x(t), x(t-\Delta), \psi(t), \psi(t-\Delta)),$$

$$\dot{\psi}(t) = \omega[x(t), x(t-\Delta)] + \varepsilon Y(x(t), x(t-\Delta), \psi(t), \psi(t-\Delta)),$$

где $x(t)$ — n-мерная вектор-функция, $\psi(t)$ — скалярная функция (вращающаяся фаза), и для нее разработан метод усреднения, который позволяет рассматривать вместо исходной системы более простую усредненную систему, не содержащую уже быстрых движений, решение которой оказывается близким к решению исходной системы на всем рассматриваемом промежутке времени.

Приведенные выше теоремы о методе усреднения могут служить обоснованием асимптотических методов, изложенных в § 1, лишь в тех случаях, когда рассматриваемые системы уравнений могут быть приведены к стандартной форме.

В заключение укажем на некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, которые с успехом решаются с помощью асимптотических методов нелинейной механики.

1. Исследование интегральных многообразий для систем с запаздыванием. Изучение поведения решений на многообразии и в окрестности устойчивого многообразия.

2. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений нейтрального типа.

3. Дальнейшее исследование периодических, почти периодических, а также квазипериодических решений для систем с запаздыванием.

4. Дальнейшее изучение нелинейных колебательных систем с медленно меняющимися параметрами и запаздыванием.

5. Исследование нелинейных систем с запаздыванием, близких к точно интегрирующимся.

6. Изучение колебательных систем с распределенными параметрами и запаздыванием.

7. Изучение систем с запаздыванием и со случайными силами.

8. Изучение бесконечных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

8. Применение метода ускоренной сходимости для исследования систем с запаздыванием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
2. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, К., 1937.
3. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд-во «Наука», М., 1964.
4. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М., 1955.
5. Л. Э. Эльсгольц, Некоторые свойства периодических решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Вестн. МГУ, сер. матем., № 5, 1959.
6. Л. Э. Эльсгольц, Периодические решения квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Тр. III Всесоюзн. матем. съезда 1956 года, т. 4, Изд-во АН СССР, 1959.
7. Н. Н. Красовский, О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, ДАН СССР, т. 114, № 2, 1957.
8. С. Н. Шиманов, Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием, Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, т. 3, № 3, 1960.
9. С. Н. Шиманов, К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием, ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
10. С. Н. Шиманов, О почти периодических колебаниях в нелинейных системах с запаздыванием, ДАН СССР, т. 125, № 6, 1959.
11. С. Н. Шиманов, К теории колебаний квазилинейных систем с постоянным запаздыванием, Автом. и телемех., т. 21, № 6, 1960.
12. С. Н. Шиманов, О почти периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения, ДАН СССР, т. 133, № 6, 1960.
13. А. Халанай, Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Rev. math. pures et appl. Acad. RPR, **4**, № 3, 1959.
14. А. Халанай, Почти периодические решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с малым параметром, там же, **5**, № 1, 1960.
15. А. Халанай, Некоторые вопросы качественной теории систем с запаздыванием, Тр. междунар. симпоз. по нелин. колеб., т. 2, Изд-во АН УССР, К., 1963.
16. А. Халанай, Периодические решения систем с запаздыванием с малым параметром в критическом случае, Rev. math. pures et appl. Acad. RPR, **6**, № 3, 1961.
17. А. Халанай, Автономные системы с запаздывающим аргументом с малым параметром, там же, **7**, № 1, 1962.
18. В. П. Рубаник, Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям, Укр. матем. ж., т. XI, № 4, 1959.
19. В. П. Рубаник, Многочастотные резонансные колебания в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами, Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, т. 4, № 4, 1961.
20. В. П. Рубаник, Одночастотные резонансные колебания в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами, Проблемы прочности в машиностроении, вып. 7, Изд-во АН СССР, М., 1962.
21. В. П. Рубаник, О зависимости решений дифференциально-разностных уравнений от параметра, Сиб. матем. ж., т. 2, № 6, 1961.
22. В. П. Рубаник, Обоснование применимости принципа усреднения к системам дифференциально-разностных уравнений, Научн. ежегодн. Черновицк. гос. ун-та за 1959 год, Изд-во Черновицк. гос. ун-та, 1960.
23. В. П. Рубаник, В. И. Фодчук, О существовании и свойствах ограниченного решения системы квазилинейных дифференциально-разностных уравнений, Укр. матем. ж., т. XIV, № 1, 1962.
24. В. І. Фодчук, До питання про побудову стаціонарних розв'язків для квазілінійних рівнянь з запізнюючим аргументом, Доп. АН УРСР, № 10, 1962.

25. В. И. Фодчук, О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с малым параметром, Укр. матем. ж., т. XIV, № 4, 1962.
26. В. И. Фодчук, О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра, Укр. матем. ж., т. XVI, № 2, 1964.
27. В. И. Фодчук, К вопросу обоснования принципа усреднения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, III Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Akademie — Verlag, Berlin, 1965.
28. J. K. Hale, Averaging Methods for Differential Equations with Retarded Arguments and a small Parameter, Brown University, Technical Report, 64 — 1, 1964.
29. А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин, Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, Тр. сем. по теор. диф. ур. с отклон. арг., Ун-т дружбы народов, т. 2, 1963.
30. Я. П. Менько, С. Ф. Фещенко, О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами с запаздывающим аргументом, Первая респ. матем. конф. молод. иссл., вып. 1, К., 1965.
31. В. М. Волосов, Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов, Применение метода усреднения к расчету некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Вестн. МГУ, сер. физ., астрон., № 6, 1965.
32. К. М. Цой, Периодические колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием, Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, т. 7, № 6, 1964.

Поступила 27. I 1966 г.
Киев