1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18 № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О группах конечного ранга. II

В. С. Чарин

Настоящая статья является продолжением работы [11] под тем же названием.

Топологическая группа G называется группой конечного специального ранга (ради краткости в дальнейшем всюду будем опускать слово специальный), если существует такое натуральное число r, что любое конечное подмножество элементов этой группы топологически порождает подгруппу, имеющую не более r образующих, т. е. таких элементов, которые топологически порождают ее. Наименьшее натуральное число r, обладающее этим свойством, называется рангом этой группы. Если же такого числа не имеется, то будем говорить, что ранг группы G бесконечен.

В случае, когда группа G дискретна, ранг ее совпадает со специальным рангом А. И. Мальцева [7].

Известны и другие определения ранга группы. Но даже для некоторых простейших топологических групп эти определения не совпадают с рангом в принятом нами смысле и приводят к иным значениям его. Приведем один пример: вычислим ранг векторной группы V_n размерности n.

Оказывается, что ранг ее конечен и равен $n+1$. В самом деле, сама группа V_n имеет $n+1$ образующих элементов: она топологически порождается с помощью единичных векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0,1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ и некоторого вектора $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, компоненты которого выбраны так, что для любой ненулевой последовательности целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ сумма $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$ отлична от целого числа.

Группа V_n не может быть порождена элементами, число которых меньше $n+1$. Если H — произвольная замкнутая подгруппа из V_n, то известно, что она разлагается в прямую сумму $H = V_p + Z_q$, где Z_q — дискретная свободная абелева группа ранга q и $p+q \leqslant n$. Поэтому подгруппа H имеет $(p+1)+q$ образующих. Так как $(p+1)+q \leqslant n+1$, то группа V_n имеет конечный ранг, не превосходящий $n+1$. Но сама группа V_n имеет точно $n+1$ образующих. Значит, ранг ее равен $n+1$.

Если принять другие известные определения ранга для топологических абелевых групп, то ранг векторной группы V_n оказывается равным n.

Здесь нами приняты следующие обозначения.

Пусть A — некоторое подмножество топологической группы G. Тогда через $\{A\}$, в соответствии с принятым в [11] обозначением, будем обозначать подгруппу, совпадающую с замыканием подгруппы, алгебраически порожденной с помощью всех элементов подмножества A, и будем говорить, что она порождается с помощью A, а элементы из A — называть ее образующими.

Через I_p обозначаем аддитивную группу кольца целых p-адических чисел, через R_p — аддитивную группу поля p-адических чисел.

Напомним, что элемент g группы G называется p-элементом, если для любой окрестности V ее единицы почти все степени $g^p, g^{p^2}, \ldots, g^{p^n}, \ldots$ принадлежат V.

В отличие от [11] будем употреблять термин «компактный» вместо «бикомпактный», что не может привести к каким-либо недоразумениям.

§ 1. Вспомогательные предложения. Для абстрактных групп имеет место следующее важное предложение Н. Н. Мягковой.

Пусть группа G имеет инвариантную подгруппу H конечного ранга r. Если фактор-группа G/H имеет конечный ранг s, то ранг группы G конечен и не превосходит $r+s$.

Для произвольных топологических групп нам не удалось доказать аналогичную теорему. Неизвестен также противоречащий пример. В этом параграфе приводятся доказательства нескольких предложений, являющихся аналогами приведенной теоремы Н. Н. Мягковой, для частных классов топологических групп. Они важны для последующих приложений в настоящей работе.

Доказательство следующей теоремы почти дословно воспроизводит доказательство Н. Н. Мягковой [8] для дискретного случая.

Теорема 1. *Пусть топологическая группа G и ее замкнутая инвариантная подгруппа H обладают следующим свойством: любая замкнутая подгруппа F группы при естественном гомоморфизме G на фактор-группу G/H отображается на замкнутую подгруппу. Тогда, если H имеет конечный ранг r, а G/H — конечный ранг s, ранг группы G конечен и $\leqslant r+s$.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — произвольное конечное множество элементов из G и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — подгруппа, топологически порожденная с помощью их. Обозначим через A' образ A при гомоморфизме $G \to G/H$, а через a'_i — образ a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. По условию подгруппа A' замкнута в G/H, а поэтому существует s елементов $b'_1, b'_2, \ldots, b'_s$ из A' таких, что $A' = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_s\}$. Пусть b_j — некоторый прообраз b'_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Можно считать, что $b_1, b_2, \ldots, b_s \in A$. Пусть $L = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Образ L' подгруппы L замкнут в G/H. Поэтому $L' = A'$ и, следовательно, найдутся такие элементы $g_i \in L$, $h_i \in H$, что $a_i = g_i \cdot h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Так как $L \subset A$, то $h_i \in A$. Пусть $B = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$. По предположению о ранге группы H найдется r элементов $c_1, c_2, \ldots, c_r$ таких, что $B = \{c_1, \ldots, c_r\}$. Итак, $A \subseteq \{b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_r\}$. С другой стороны, $A \supset L$ и $A \supset B$. Поэтому $A = \{b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_r\}$. Значит, ранг группы G не больше $r+s$.

Следствие 1. *Пусть H — открытая инвариантная подгруппа топологической группы G. Тогда утверждение теоремы 1 для группы G верно.*

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Пусть H — компактная инвариантная подгруппа топологической группы G. Тогда утверждение теоремы 1 для группы G верно.*

Доказательство следует сразу из того известного факта, что если инвариантная подгруппа H компактна, то естественное гомоморфное отображение $G \to G/H$ замкнуто.

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная группа и каждое конечное подмножество ее элементов порождает компактную подгруппу. Если ее инвариантная подгруппа H имеет конечный ранг r и фактор-группа G/H имеет конечный ранг s, то группа G имеет конечный ранг $\leqslant r+s$.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — произвольное конечное подмножество элементов из G и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — подгруппа, топологически порожденная ими. По условию, A — компактная группа. Подгруппа $A \cap H$ инвариантна в A, а подгруппа AH замкнута в G, так как A компактна. Естественное гомоморфное отображение AH на AH/H определяет непрерывный гомоморфизм A на AH/H с ядром $A \cap H$. Ввиду компактности A

имеет место изоморфизм $A/A\cap H \cong AH/H$ (см. теорему 12 из [10]). Всякая замкнутая подгруппа группы конечного ранга r имеет конечный ранг $\leqslant r$ (см. [11]). Поэтому подгруппа $A\cap H$ из H имеет конечный ранг $\leqslant r$. Так как AH/H компактна, то она замкнута в G/H и, следовательно, имеет конечный ранг $\leqslant s$. Из следствия 2 вытекает, что ранг подгруппы A не больше $r+s$. Значит, подгруппа A имеет конечное число образующих $\leqslant r+s$.

Теорема доказана.

Аналог теоремы Н. Н. Мягковой имеет место также для локально разрешимых периодических групп. Для того, чтобы это установить, мы предварительно докажем два вспомогательных предложения. С этой целью удобно ввести обозначение для следующего свойства топологической группы.

(K) *Каждое компактное множество элементов группы топологически порождает компактную подгруппу.*

Отметим, что свойством (K) обладают многие важные классы топологических групп. Например, всякая абелева периодическая локально компактная группа G обладает этим свойством. В самом деле, ввиду известной теоремы Л. С. Понтрягина всякая такая группа G обладает компактной подгруппой H, фактор-группа G/H по которой дискретная и периодическая. Поэтому если A — некоторое компактное подмножество из G, то образ A' его при гомоморфизме $G \to G/H$ конечен, а потому порождает конечную подгруппу B'. Полный прообраз B этой подгруппы содержит A. Легко видеть, что подгруппа B компактна. Поэтому и подгруппа, порожденная с помощью A, компактна.

Докажем следующее предложение, являющееся обобщением известной теоремы О. Ю. Шмидта о расширении локально конечной группы с помощью локально конечной группы ([6], стр. 338).

Лемма 1*. *Пусть H — инвариантная замкнутая подгруппа локально компактной группы G. Если подгруппа H и фактор-группа G/H обладают свойством* (K), *то и группа G обладает свойством* (K).

Доказательство. Пусть A — произвольное компактное подмножество группы G и A' — множество образов элементов этого подмножества при естественном гомоморфизме $G \to G/H$. Множество A' как непрерывный образ компактного пространства компактно, а поэтому подгруппа $\{A'\}$, порожденная этим множеством, компактна по условию теоремы. В группе G существует компактное множество C, образ которого в G/H совпадает с $\{A'\}$ (см. [1], стр. 28). Можно считать, что $A \subset C$ и $C^{-1} = C$.

Если $x_\alpha, x_\beta \in C$, то найдутся $x_\gamma \in C$, $h_{\alpha\beta} \in H$, что $x_\alpha \cdot x_\beta = x_\gamma \cdot h_{\alpha\beta}$. Обозначим через B_1 множество всех $h_{\alpha\beta}$, определяемых таким образом всевозможными парами элементов x_α, x_β из C. Это множество принадлежит компактному множеству $C\cdot C\cdot C$ группы G, а поэтому — компактному подмножеству подгруппы H. Подгруппа $B = \{B_1\}$, порожденная множеством B_1, компактна по условию. Подгруппа, алгебраически порожденная с помощью подмножества C в G, принадлежит компактному множеству $C\cdot B$. В самом деле, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольное конечное множество элементов из C, то $x_n \ldots x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 = (x_n \ldots (x_3 (x_2 x_1)) \ldots) = (x_n \ldots (x_3 \times \times x_{12} h_{12}) \ldots) = (x_n \ldots (x_{3(12)} h_{3(12)} h_{12}) \ldots) = \ldots = x \cdot h$, где $x \in C$, $h \in B$.

Значит, подгруппа, алгебраически порожденная с помощью подмножества A, принадлежит компактному подмножеству группы G. Поэтому и подгруппа, порожденная с помощью множества A элементов, компактна.

Лемма 2. *Всякое конечное множество элементов периодической локально компактной локально разрешимой группы порождает компактную подгруппу.*

---

* Эта лемма впервые установлена в докторской диссертации автора (1953 г.). Аналогичное предложение позже иным способом доказано В. П. Платоновым [9].

Доказательство. Пусть A — некоторое конечное подмножество группы G. Оно алгебраически порождает разрешимую подгруппу B, замыкание $H = \bar{B}$ которой также является разрешимой подгруппой. Подгруппа H обладает нормальным рядом замкнутых подгрупп

$$e = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_m = H,$$

каждый фактор H_i/H_{i-1} которого — локально компактная абелева периодическая группа. Согласно сделанному выше замечанию об абелевых локально компактных периодических группах все эти факторы H_i/H_{i-1} обладают свойством (K). Ввиду леммы 1 группа H обладает свойством (K). В частности, конечное множество A в H порождает компактную подгруппу. Но она совпадает с H.

Следовательно, подгруппа H компактна.

Как очевидное следствие теоремы 2 и доказанной леммы сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть локально компактная локально разрешимая периодическая группа G обладает инвариантной замкнутой подгруппой H конечного ранга r, фактор-группа G/H по которой также имеет конечный ранг s. Тогда ранг группы G конечен и не больше $r + s$.*

Сделаем в заключение следующие замечания о локально нильпотентных p-группах.

Замечание 1. Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка; M и N — две ее замкнутые подгруппы, изоморфные аддитивной группе целых p-адических чисел (т. е. группы типа I_p). Тогда их пересечение $M \cap N$ либо состоит из одного единичного элемента e группы G, либо же одна из них содержит другую: $M \supseteq N$ или $N \supseteq M$.

Доказательство. Допустим, что $L = M \cap N \neq e$. Подгруппа L также принадлежит типу I_p. Поэтому в ней найдется элемент a, из которого в L не извлекается корень p-й степени. Если $M \neq L$, то ввиду известных свойств группы I_p в M найдется такой элемент x, что $x^p = a$. Если $N \neq L$, то точно так же найдется $y \in N$ такой, что $y^p = a$. Элементы x и y не принадлежат L и ввиду однозначной извлекаемости корня в G имеет место их равенство: $x = y$. Это значит, что $x \in M \cap N$, но $x \notin L$.

Полученное противоречие показывает, что либо $M = L$, либо $N = L$.

Замечание 2. Пусть C — некоторая замкнутая подгруппа типа I_p локально компактной локально нильпотентной p-группы G без элементов конечного порядка. Тогда ее изолятор $I(C)$ ([6], стр. 427) является объединением возрастающей последовательности — конечной или бесконечной — замкнутых подгрупп

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots, \tag{1}$$

каждая из которых изоморфна I_p.

Доказательство. Изолятор $I(C)$ — группа абелева, так как C — абелева подгруппа. Будем строить последовательность подгрупп $C_0, C_1, C_2, \ldots$ индуктивно. Полагаем $C_0 = C$. Допустим, что уже построена подгруппа C_n с номером n, причем $C_n \cong I_p$, $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n$ и $C_n \subseteq I(C)$. Если $C_n = I(C)$, то на этом процесс закончим. Если же $C_n \neq I(C)$, то пусть $x \in I(C)$, $x \notin C_n$. Подгруппа $C_{n+1} = \{x\}$, порожденная с помощью x, является группой типа I_p (лемма 1.6 из [3]). Ясно, что C_{n+1} имеет нетривиальное пересечение с C_n. Вместе с тем $C_{n+1} \not\subset C_n$. Поэтому $C_n \subset C_{n+1}$ ввиду замечания 1. Очевидно, что $C_{n+1} \subseteq I(C)$.

Допустим, что этот процесс никогда не закончится. Тогда полагаем $C' = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Ясно, что $C' \subseteq I(C)$. Покажем, что $C' = I(C)$.

Пусть $y \in I(C)$, $y \neq e$. Тогда подгруппа $Y = \{y\}$ также изоморфна I_p и имеет нетривиальное пересечение с C_n при любом n. Если $Y \subseteq C_0$, то $y \in C'$. Если $C_0 \subseteq Y$, то индекс C_0 в Y конечен. Так как индекс C_0 в C_n неограниченно возрастает с ростом номера n, то не может случиться, чтобы $C_n \subseteq Y$ при любом n. Значит, найдется такой номер m, что $Y \subseteq C_m$. Но тогда также и $y \in C'$.

Итак, во всех случаях любой элемент y из $I(C)$ принадлежит C', т. е. $I(C) \subseteq C'$. Отсюда и следует равенство $C' = I(C)$.

Замечание 3. Пусть G — локально компактная локально нильпотентная нульмерная p-группа без элементов конечного порядка. Если C — компактная подгруппа типа I_p и изолятор $I(C)$ ее является объединением бесконечной возрастающей последовательности $C_0 \subset C_1 \subset \cdot C_2 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots$ подгрупп типа I_p, то $I(C)$ изоморфна аддитивной группе R_p поля p-адических чисел.

Доказательство. В качестве полной системы окрестностей единицы в G можно выбрать систему $[V_\alpha]$ открытых компактных подгрупп (теорема 16 из [10]). Тогда пересечения $I(C) \cap V_\alpha = U_\alpha$ составляют полную систему окрестностей единицы в $I(C)$. Найдется такая V_α, что $I(C) \cap V_\alpha \neq$ $\neq I(C)$. Поэтому найдется такой номер n, что $U_\alpha \subset C_n$. Поэтому U_α — группа типа I_p. Выберем в R_p некоторую открытую подгруппу U и установим топологический изоморфизм φ: $U \to U_\alpha$. Его легко можно продолжить до алгебраического изоморфизма Φ: $R_p \to I(C)$. Он вместе с тем будет и топологическим изоморфизмом.

§ 2. Локально компактные абелевы группы. В настоящем параграфе выясняется строение локально компактных абелевых групп конечного ранга.

Теорема 4. *Локально компактная абелева группа имеет конечный ранг в том и только том случае, когда группа ее характеров имеет конечный ранг.*

Доказательство. Пусть G — произвольная локально компактная абелева группа и Γ — группа ее характеров.

Допустим, что ранг группы G конечен.

Ввиду известной теоремы Л. С. Понтрягина группа G разлагается в прямое произведение векторной группы V_n конечной размерности n и подгруппы U с компактной подгруппой W, фактор-группа U/W по которой дискретна. Группа характеров A векторной группы V_n изоморфна V_n. Если $Б$ — группа характеров группы U и Δ — аннулятор W, то Δ является группой характеров группы U/W и, следовательно, компактна. Вместе с тем, фактор-группа $Б/\Delta$ дискретна и является группой характеров подгруппы W. Кроме того, $\Gamma = A \times Б$. Так как утверждение теоремы справедливо для случая компактной или же дискретной абелевой группы (лемма 3 из [11]), то группы Δ и $Б/\Delta$ имеют конечные ранги. Ввиду следствия 2 теоремы 1 группа $Б$ имеет конечный ранг, который обозначим через ϱ. Ранг группы A равен $n+1$. Для доказательства нужного утверждения остается показать, что прямое произведение $A \times Б$ также имеет конечный ранг.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — произвольное конечное множество элементов из группы $\Gamma = A \times Б$. Тогда $\varphi_i = \alpha_i \cdot \beta_i$, где $\alpha_i \in A$, $\beta_i \in Б$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Порождаем подгруппы $A' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ и $Б' = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$. Ранг подгруппы A' из A не больше $n+1$. Подгруппа $Б'$ из $Б$ компактна и имеет ранг $\leqslant \varrho$. Из следствия 2 теоремы 1 вытекает, что ранг группы $\Gamma' = A' \times Б'$ не больше $n + \varrho + 1$. Если $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$, то Φ содержится в Γ'. Поэтому Φ имеет не более $n + \varrho + 1$ образующих. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — произвольно выбранные элементы из Γ, а число $n + \varrho + 1$ не зависит от их выбора, то это значит, что ранг группы Γ конечен.

Точно так же из конечности ранга группы Γ в силу теоремы двойственности вытекает конечность ранга группы G.

Теорема 5. *Пусть G — локально компактная абелева p-группа конечного ранга r. Тогда она разлагается в прямое произведение*

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_r, \tag{2}$$

состоящее из r множителей, и каждый множитель G_i изоморфен либо конечной циклической группе, либо дискретной группе типа p^∞, либо группе типа I_p, либо же группе типа R_p. Обратно, всякая абелева топологическая группа, разложимая в прямое произведение вида (2), является локально компактной p-группой ранга r.

Доказательство. Пусть G — локально компактная абелева p-группа ранга r. Она разлагается в прямое произведение векторной группы и подгруппы с открытой компактной подгруппой. В нашем случае векторный множитель тривиален. Таким образом, в группе G имеется открытая компактная подгруппа H. Эта подгруппа ввиду леммы 2 из [11] разлагается в прямое произведение не более чем r множителей, каждый из которых является либо конечной циклической подгруппой, либо группой типа I_p. Отсюда прежде всего следует, что H нульмерна, а потому и вся группа G нульмерна.

Далее, в группе H можно выбрать открытую подгруппу V, не содержащую элементов конечного порядка, отличных от единицы e. Поэтому если A — совокупность всех элементов конечного порядка из G, то пересечение $A \cap V = e$. Таким образом, A — дискретная и, следовательно, замкнутая подгруппа в G.

Легко показать, что A — максимальная дискретная замкнутая подгруппа группы G. Мы ее будем называть дискретной частью G.

Так как ранг подгруппы A не больше r, то она удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Значит, строение ее таково: она разлагается в прямое произведение конечного числа подгрупп, каждая из которых либо конечная циклическая группа, либо же группа типа p^∞. Ее можно представить в виде прямого произведения $A = A^0 \times A^\infty$, где A^0 — конечная подгруппа, A^∞ — полная подгруппа.

Далее доказательство теоремы разобьем на ряд отдельных шагов.

1. Допустим сначала, что дискретная часть группы состоит из одного единичного элемента: $A = e$.

Как и ранее, через H обозначим открытую компактную подгруппу из G. Она разлагается в прямое произведение конечного числа подгрупп типа I_p и, следовательно, удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп.

Пусть C — некоторая замкнутая подгруппа типа I_p из G и $I(C)$—ее изолятор в G. Покажем, что $I(C)$ замкнут в G.

Из замечания 2 § 1 следует, что $I(C)$ — объединение возрастающей последовательности $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ замкнутых подгрупп типа I_p. Пусть $D_n = H \cap C_n$. Последовательность замкнутых подгрупп $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots$ обрывается на некотором конечном номере m: $D_m = D_{m+1} = \ldots$

Пусть элемент x принадлежит замыканию $\overline{I(C)}$. Тогда $y = x^{p^n} \in H$ при некотором n. Если U — произвольная окрестность y, целиком лежащая в H, то найдется такая окрестность V элемента x, что $V^{p^n} \subseteq U$. Пересечение $V \cap I(C)$ непусто. Возьмем некоторый элемент a из него. Тогда $a^{p^n} \in U$, $a^{p^n} \in I(C)$. Но $U \subseteq H$. Значит, $a^{p^n} \in I(C) \cap H = D_m$. Итак, U имеет непустое пересечение с D_m. Так как D_m — замкнутая подгруппа, то это значит, что $y \in D_m$ и, следовательно, $y \in C_m$. Но тогда некоторая степень y принадлежит C. Значит, некоторая степень элемента x также принадлежит C, т. е. $x \in I(C)$. Так как элемент x был выбран произвольно из $\overline{I(C)}$, то $\overline{I(C)} = I(C)$.

Из замечаний § 1 следует, что любой такой изолятор $I(C)$ является либо группой типа I_p, либо типа R_p. Это — подгруппы ранга 1.

Пусть теперь D — любая замкнутая изолированная подгруппа ранга 1. Если $y \in D$, $y \neq e$, то $Y = \{y\}$ — подгруппа типа I_p. Ее изолятор $I(Y)$ содержится в D. Оказывается, что $I(Y) = D$. В самом деле, допустим, что $I(Y) \neq D$. Если $x \in D$, $x \notin I(Y)$, то для $X = \{x\}$ имеются две возможности: а) $X \cap Y = e$, б) $Y \subset X$. При первой из этих возможностей в D существовала бы подгруппа $X \times Y$ ранга 2, что противоречит выбору D. Итак, $Y \subset X$. Но тогда X входит в $I(Y)$, что противоречит выбору элемента x.

Итак, любая замкнутая изолированная подгруппа ранга 1 в группе G либо типа I_p, либо типа R_p.

1А) Предложим теперь, что в группе G любая замкнутая изолированная подгруппа ранга 1 имеет тип R_p.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_m$ — некоторое конечное множество таких подгрупп. Если D алгебраически порождена с помощью $D_1, D_2, \ldots, D_{m-1}$, то, используя их полноту, легко заключить, что для подгруппы D_m имеются лишь две возможности: либо $D_m \cap D = e$, либо $D_m \subseteq D$. Поэтому можно выбрать последовательность $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ изолированных замкнутых подгрупп ранга 1 так, чтобы каждая следующая из них не содержалась в группе, алгебраически порожденной с помощью предыдущих $D_1, D_2, \ldots, D_{m-1}$. Поэтому $D_1, D_2, \ldots, D_m$ образуют алгебраическое прямое произведение $D_1 \times \times D_2 \times \ldots \times D_m$. Так как в этом произведении имеется компактная подгруппа ранга m (такой подгруппой будет произведение подгрупп типа I_p, взятых по одной в каждом множителе), то $m \leqslant r$. Отсюда следует, что найдутся подгруппы $D_1, D_2, \ldots, D_r$ этого вида, алгебраическое прямое произведение которых совпадает с нашей группой G. Можно проверить, что все условия теоремы 13 из книги Л. С. Понтрягина [10] выполнены. Поэтому $G = D_1 \times \times D_2 \times \ldots \times D_r$ — топологическое прямое произведение подгрупп типа R_p.

1Б) Теперь возвратимся к первоначальному случаю, когда в G могут быть изолированные подгруппы типа I_p.

Пусть B_1 — одна из изолированных подгрупп типа I_p. Фактор-группа $G_1 = G/B_1$ снова удовлетворяют тем условиям, которым удовлетворяет сама группа G. Если G_1 имеет изолированную подгруппу типа I_p, то в G найдется подгруппа B_2, фактор-группа B_2/B_1 которой изоморфна I_p и $G_2 = G/B_2$ того же вида, что и G, и т. д. Так выделяется последовательность $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_i \subset \ldots$ компактных подгрупп G таких, что

$$B_i/B_{i-1} \cong I_p$$

и $G_i = G/B_i$ не имеет элементов конечного порядка ($i = 1, 2, \ldots$). Если выбрать один представитель d_i из образующего элемента группы B_i/B_{i-1}, то $D_i = \{d_i\} \cong I_p$ и D_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ порождают прямое произведение $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_m$. Ранг группы B_m не больше r, поэтому $m \leqslant r$. Значит, на некотором номере m процесс выделения подгрупп B_i закончится и, следовательно, фактор-группа $G_m = G/B_m$ будет удовлетворять условиям рассмотренного выше случая 1А). Поэтому G_m разложится в топологическое прямое произведение конечного числа подгрупп типа R_p.

Пусть Γ — группа характеров группы G. Тогда аннулятор Δ подгруппы B_m изоморфен группе G_m, а фактор-группа Γ/Δ изоморфна группе характеров B_m. Поэтому Γ/Δ — дискретная p-группа, разложимая в прямое произведение конечного числа подгрупп типа p^∞. Подгруппа Δ, будучи полной, выделяется прямым множителем в алгебраическом смысле:

$$\Gamma = \Delta \times \Delta'.$$

Так как подгруппа Δ открыта, то это разложение будет топологическим прямым произведением, причем множитель Δ' — дискретная подгруппа, разложимая в прямое произведение конечного числа подгрупп типа p^∞.

Возвращаясь снова к группе G, получаем, что она разлагается в прямое произведение

$$G = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_s,$$

где каждый множитель D_i изоморфен либо I_p, либо R_p.

2. Пусть теперь дискретная часть $A = A^0 \times A^\infty$ содержит нетривиальную подгруппу A^∞. На этом шаге мы докажем, что A^∞ может быть выделена прямым множителем в G (аналогично стр. 190 из [5]).

В группе G имеется открытая подгруппа H без элементов конечного порядка, $H \cap A^\infty = e$. Выберем максимальную подгруппу Q, содержащую H и такую, что $Q \cap A^\infty = e$. Существование такой подгруппы легко установить с помощью трансфинитной индукции. Ясно, что Q открыта в G. Покажем, что имеет место разложение в прямое произведение

$$G = Q \times A^\infty. \tag{3}$$

Допустим, что $G \neq Q \times A^\infty$. Значит, найдется элемент $x_1 \in G$, который не входит в $Q \times A^\infty$. Можно считать, что $x_1^p \in Q \times A^\infty$. Если $x_1^p = y \cdot a$, где $y \in Q$, $a \in A$, то найдется в A^∞ такой элемент b, что $b^p = a$. Пусть $x = x_1 \cdot b^{-1}$. Тогда $x^p = x_1^p \cdot b^{-p} = y$, $x \notin Q \times A^\infty$.

Подгруппа, алгебраически порожденная с помощью Q и x, открыта в G и, следовательно, совпадает с подгруппой $\{Q, x\}$, порожденной этими элементами в топологическом смысле. Ввиду максимальности пересечение $\{Q, x\} \cap A^\infty \neq e$. Если $z \neq e$ и $z \in \{Q, x\} \cap A^\infty$, то $z = w \cdot x^p$, где $w \in Q$, $(k, p) = 1$. Подберем такие целые числа α, β, чтобы $\alpha p + \beta k = 1$. Тогда

$$z^\beta = w^\beta \cdot x^{k\beta} = w^\beta \cdot x \cdot x^{-p\alpha} = x \cdot w^\beta \cdot y^{-\alpha},$$

$$x = w^{-\beta} \cdot y^\alpha \cdot z^\beta \in Q \times A^\infty,$$

что противоречит выбору элемента x.

Итак, разложение (3) доказано.

3. В группе Q имеется конечная дискретная часть A^0, фактор-группа по которой Q/A^0 по доказанному ранее разлагается в прямое произведение групп типа I_p и R_p. Если Γ — группа характеров Q, то в ней имеется замкнутая инвариантная подгруппа Γ_0 конечного индекса, разложимая в прямое произведение конечного числа подгрупп типа R_p и дискретных подгрупп типа p^∞. Так как она полная, то имеет место разложение в алгебраическое прямое произведение $\Gamma = \Gamma_0 \times \Delta$, где Δ — конечная группа. Но Γ_0 открыта в Γ. Поэтому это разложение будет топологическим. Но тогда

$$Q = S \times A^0, \tag{4}$$

где S — двойственная для Γ_0 группа. Она изоморфна фактор-группе Q/A^0.

Объединяя (3) и (4), получим, что $G = A^0 \times A^\infty \times S$. Разлагая каждый множитель в произведение подгрупп ранга 1, получим

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s, \tag{5}$$

где каждый множитель G_i изоморфен одной из 4 типов групп, указанных в формулировке данной теоремы.

Легко подсчитать, что ранг прямого произведения (5) точно равен s. Из условия теоремы следует, что $s = r$.

Теорема полностью доказана.

Следствие. *Единственными локально компактными абелевыми p-группами ранга 1 являются следующие типы групп: 1) конечная цикличгская группа, 2) дискретная группа типа p^∞, 3) группа типа I_p, 4) группа типа R_p.* Мы их просто будем называть p-группами ранга 1.

Т е о р е м а 6. *Пусть G — локально компактная вполне несвязная периодическая абелева группа. Для того, чтобы ее ранг был конечен, необходимо и достаточно, чтобы ее силовские p-подгруппы по всем простым числам p разлагались в прямые произведения подгрупп ранга 1 с конечным числом множителей, ограниченным в совокупности для всех p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В группе G силовские p-подгруппы замкнуты. Если ранг группы G конечен и равен r, то силовская p-подгруппа ее имеет конечный ранг $\leqslant r$. По предыдущей теореме она разлагается в прямое произведение не более чем r подгрупп ранга 1.

Допустим теперь, наоборот, что силовская p-подгруппа группы G для любого простого числа p разлагается в прямое произведение не более r подгрупп ранга 1. Тогда ранг каждой из них не более r. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_m$ — любое конечное множество элементов из G и $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ — компактная подгруппа в G и разлагается в прямое произведение

$$H = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_i \times \ldots,$$

где P_i — силовская p_i-подгруппа ($p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ — попарно различные простые числа). Так как каждая подгруппа P_i входит в силовскую p_i-подгруппу из G, ранг P_i конечен и $\leqslant r$. Так как каждая подгруппа P_i ($i = 1, 2, \ldots$) удовлетворяет второй аксиоме счетности (это вытекает из теоремы 6), то и H удовлетворяет этой аксиоме. Ввиду теоремы 1 из [11] ранг подгруппы H не больше r. Но тогда она имеет r образующих элемента.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Периодическая абелева локально компактная группа G имеет следующее строение: связная компонента ее единицы G_0 компактна и имеет конечную размерность, а силовская p-подгруппа фактор-группы G/G_0 по любому простому числу p разлагается в прямое произведение p-групп ранга 1, число множителей которого ограничено в совокупности для всех p. Обратно, всякая локально компактная периодическая абелева группа такого строения имеет конечный ранг.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа G — локально компактна, абелева и периодическая, то связная компонента G_0 ее единицы компактна, что следует из теоремы Л. С. Понтрягина о строении локально компактных абелевых групп. Первая половина следствия поэтому сразу вытекает из теоремы 2 работы [11] и теоремы 6. Вторая половина получается из теоремы 6 и следствия 2 теоремы 1.

§ 3. Л о к а л ь н о н и л ь п о т е н т н ы е г р у п п ы. В. М. Глушков [3] изучал локально нильпотентные локально компактные группы с условием максимальности для замкнутых подгрупп. Каждая такая группа G обладает конечным центральным рядом

$$e = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_m = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = G,$$

где факторы A_i/A_{i-1} ($i = 1, 2, \ldots, k$) — конечные циклические группы, фактор-группы B_j/B_{j-1} ($j = 1, 2, \ldots, m$) изоморфны I_p, а фактор-группы C_s/C_{s-1} ($s = 1, 2, \ldots, n$) — дискретные бесконечные циклические группы. Подгруппа C_0 компактна и открыта в G.

С помощью следствий 1 и 2 теоремы 1 можно заключить, что ранг группы G конечен.

В настоящем параграфе изучаются новые классы локально нильпотентных групп конечного ранга.

Строение произвольных локально нильпотентных локально компактных групп в значительной мере определяется их периодической частью. Поэтому прежде всего необходимо изучить периодические локально нильпотентные локально компактные группы конечного ранга. Ниже выясняется строение таких групп.

Теорема 7. *Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка. Если ее ранг конечен и равен r, то она нульмерна, нильпотентна и обладает центральным рядом длины:*

$$e = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_r = G, \qquad (6)$$

каждый фактор G_i/G_{i-1} которого изоморфен либо I_p, либо R_p. Каждая локально компактная нильпотентная группа, обладающая рядом вида (6), *имеет конечный ранг r.*

Доказательство. Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа ранга r и K — связная компонента ее единицы. Хорошо известно, что K является проективно-лицевой группой [4]. Значит, найдется сколь угодно малая инвариантная подгруппа N, фактор-группа K/N по которой — связная группа Ли. Но всякая связная локально нильпотентная группа Ли нильпотентна. А связная нетривиальная нильпотентная группа Ли обладает нетривиальной фактор-группой, не являющейся p-группой. Но K/N является p-группой. Поэтому группа K/N непременно состоит из одного единичного элемента, т. е. $K=N$. Ввиду произвольной малости подгруппы N отсюда следует, что $K = e$.

Итак, группа G вполне несвязна.

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_m$ — любое конечное подмножество элементов из группы. Замкнутая подгруппа $H=\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, порожденная ими, ввиду леммы 2 компактна. Из теоремы 3 статьи [11] и ее следствия вытекает, что H нильпотентна и обладает p-адическим рядом.

$$e = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n = H$$

длины n, где n — ранг группы H ($H_i/H_{i-1} \cong I_p$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$); $n \leqslant r$. Поэтому длина верхнего центрального ряда подгруппы H не превосходит числа r. Так как H — произвольная подгруппа с конечным числом образующих, то отсюда легко заключить, что длина нижнего центрального ряда группы G также не превосходит r, т. е. группа G нильпотентна. Пусть

$$e = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_k = G \qquad (7)$$

— ее верхний центральный ряд. Все гиперцентры Z_j замкнуты и изолированы в G. Поэтому Z_j/Z_{j-1} — локально компактная алебева p-группа без элементов конечного порядка и конечного ранга ($j = 1, 2, \ldots k$). Из теоремы 5 следует, что Z_j/Z_{j-1} разлагается в прямое произведение групп типа I_p или R_p. Соответствующим уплотнением ряда (7) получим центральный ряд

$$e = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_s = G, \qquad (8)$$

каждый фактор G_i/G_{i-1} которого изоморфен либо I_p, либо R_p.

Обозначим через U некоторую открытую компактную подгруппу из группы G. Если $U_i = U \bigcap G_i$, то ряд

$$e = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_s = U$$

является центральным в U и состоит из замкнутых инвариантных подгрупп, причем каждый фактор U_i/U_{i-1} алгебраически изоморфен некоторой подгруппе фактора G_i/G_{i-1}. Поэтому U_i/U_{i-1} не имеет элементов конечного порядка.

Покажем, что $U_i \neq U_{i-1}$ при любом $i = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле, пусть $x \in G_i$, $x \notin G_{i-1}$. Тогда некоторая степень $y = x^{p^n}$ его принадлежит U и, вместе с тем, не принадлежит G_{i-1}. Значит, $y \in U_i$, но $y \notin U_{i-1}$, т. е. $U_i \neq U_{i-1}$. Таким образом, ряд

$$e = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_s = U \qquad (9)$$

имеет нетривиальные факторы U_i/U_{i-1}, а поэтому компактная подгруппа U имеет конечный p-адический ряд длины $\geqslant s$ (даже более точно: имеет p-адический ряд длины s). Из леммы 4 работы [11] сразу вытекает, что ранг подгруппы U не меньше s. Значит, и ранг группы G не меньше s. С другой стороны из теоремы 3 следует, что ранг группы G не больше s. Следовательно, ранг группы G равен s. Однако по условию теоремы группа G имеет ранг r. Поэтому $s = r$, что и доказывает первую половину теоремы.

В этом доказательстве вместе с тем дано доказательство и второй половины теоремы.

Теорема 8. *Локально компактная локально нильпотентная p-группа G тогда и только тогда имеет конечный ранг, когда она обладает нормальным рядом замкнутых подгрупп*

$$e = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots$$
$$\ldots \subset B_m = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n = G, \tag{10}$$

в котором фактор-группа A_i/A_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — дискретная группа типа p^∞, фактор-группа B_j/B_{j-1} $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — конечная циклическая, а фактор-группа C_s/C_{s-1} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ изоморфна либо I_p, либо R_p, причем подгруппа B_0 абелева и инвариантна в G, а фактор-группа G/B_0 нильпотентна.

Доказательство. Пусть группа G имеет конечный ранг r. Точно так же, как и в теореме 7, доказывается, что группа G вполне несвязна.

1. Сначала допустим, что группа G компактна. Обозначим через C совокупность всех элементов конечного порядка из G. Они составляют алгебраическую подгруппу. Любое конечное подмножество $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ее элементов порождает в алгебраическом смысле конечную подгруппу D. Будучи дискретной, она замкнута в G. Поэтому по условию теоремы в D найдется r порождающих ее элементов, которые, понятно, порождают ее в алгебраическом смысле. Значит, подгруппа C, рассматриваемая абстрактно, имеет конечный специальный ранг. По теореме Н. Н. Мягковой [8] группа С удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, т. е. является группой С. Н. Черникова. Она обладает полной абелевой подгруппой A конечного индекса.

Покажем, что $A = e$.

Допустим, наоборот, что $A \neq e$. Тогда в ней имеется подгруппа типа p^∞, и поэтому она бесконечна.

Замыкание $\overline{A}$ ее является компактной абелевой p-группой конечного ранга. Но такая группа может иметь лишь конечное число элементов конечного порядка (теорема 5; см. также лемму 2 из [11]).

Полученное противоречие показывает, что $A = e$.

Итак, в этом случае группа G имеет лишь конечное число элементов конечного порядка.

2. Пусть теперь группа G локально компактна. Через C снова обозначим совокупность всех элементов конечного порядка из G. Они составляют алгебраическую инвариантную подгруппу.

В группе G, ввиду ее нульмерности, существует открытая компактная подгруппа H (теорема 16 из [8]). Согласно предыдущему пункту доказательства, в H имеется лишь конечное число элементов конечного порядка. Поэтому найдется окрестность V единицы, целиком лежащая в H и не содержащая элементов конечного порядка, отличных от единицы: $V \cap C = e$. Это значит, что подгруппа C дискретна и, следовательно, замкнута в G.

Так как ранг C конечен, то по теореме Н. Н. Мягковой [8] эта подгруппа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, а поэтому она имеет полную характеристическую подгруппу A конечного индекса. Подгруппа A разлагается в прямое произведение конечного числа групп типа p^∞. Конечная фактор-группа C/A нильпотентна и обладает центральным рядом относительно всей группы G/A (теорема Дицмана, полностью справедливая в нашем случае топологической p-группы; см. [6], стр. 350). Фактор-группа G/C ввиду теоремы 7 нильпотентна и обладает центральным рядом с факторами типа I_p или R_p. Поэтому фактор-группа G/A нильпотентна.

Инвариантный ряд

$$e \subset A \subset C \subset G \tag{11}$$

после соответствующего уплотнения дает ряд (10) требуемого теоремой вида.

Обратное утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 3.

Теорема 9. *Для того чтобы локально компактная локально нильпотентная периодическая группа G имела конечный ранг, необходимо и достаточно, чтобы связная компонента ее единицы G_0 имела конечную размерность, а ранги силовских p-подгрупп фактор-группы G/G_0 были ограничены в совокупности для всех простых чисел.*

Доказательство. Пусть G — локально компактная локально нильпотентная периодическая группа. Связная компонента G_0 компактна и содержится в центре группы G. Силовская p-подгруппа группы G/G_0 замкнута для любого простого числа p [2].

Если ранг группы G конечен и равен r, то ранг любой силовской p-подгруппы из G/G_0 не больше r. Размерность G_0 конечна (теорема 2 из [11]).

Пусть, обратно, размерность G_0 конечна и ранг любой силовской p-подгруппы из G/G_0 не больше некоторого натурального числа r, не зависящего от p.

Если $h_1, h_2, \ldots, h_m$ — произвольное конечное подмножество элементов группы G/G_0, то пусть $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$. Подгруппа H компактна (лемма 2). Поэтому она может быть разложена в прямое произведение

$$H = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_i \times \ldots$$

своих силовских p_i-подгрупп P_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Каждая подгруппа P_i входит в силовскую p_i-подгруппу группы G/G_0 и, будучи компактной, замкнута в ней. Поэтому ранг P_i не больше r. Ввиду теоремы 1 из [11] ранг H, а поэтому G/G_0, также не больше этого числа r. Ранг группы G_0 конечен (теорема 2 из [11]). Из теоремы 3 следует, что ранг группы G конечен.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применение, ИЛ, М., 1950.
2. В. М. Глушков, Локально нильпотентные локально бикомпактные группы, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 4, 291—332.
3. В. М. Глушков, К теории нильпотентных локально бикомпактных групп, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, 1956, 513—546.
4. В. М. Глушков, Строение локально бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта, УМН, т. 12, вып. 2 (74), 1957, 3—41.
5. А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, М.—Л., 1944.
6. А. Г. Курош, Теория групп, изд. 2, Физматгиз, М., 1953.
7. А. И. Мальцев, О группах конечного ранга, Матем. сб., т. 22 (64), 1948, 351—352.
8. Н. Н. Мягкова, О группах конечного ранга, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 13, 1949, 495—512.
9. В. П. Платонов, Локально проективно нильпотентный радикал в топологических группах, ДАН БССР, № 9, 1965.
10. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Физматгиз, М., 1954.
11. В. С. Чарин, О группах конечного ранга. I, УМЖ, т. 16, 1964, 212—219.

Поступила 9.XII 1965 г.
Киев