Ограниченность решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, «близких» к линейным

Н. В. Барковская

В настоящей работе получено условие ограниченности решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, «близких» к линейным. Вопросы ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве рассмотрел З. И. Реклицкий [1]. Ограниченность решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «близких» к линейным, в полуупорядоченном пространстве исследовал М. А. Рутман [2].

Пусть E — вещественное полуупорядоченное пространство, $\widetilde{E}$ — его комплексное расширение*. Совокупность P всех элементов x из E, для которых $x > \theta$, называется конусом пространства E [3].

Пусть ξ_0 — некоторый фиксированный элемент из P.

Элемент $x \in E$ назовем ограниченным (по отношению к «масштабному» элементу ξ_0), если существует скаляр $v = v(x)$ такой, что $-v\xi_0 < x < v\xi_0$. Нижняя грань чисел v, при которых выполняется это соотношение, называется нормой x [4]. Множество $\widetilde{E}_0$ всех ограниченных элементов из E можно рассматривать как банахово пространство, полное относительно сходимости с регулятором ξ_0 [5].

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{du}{dt} - Au(t-a) - \Phi u(t) = f(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty),$$
$$u(t) = 0 \qquad (t \leqslant 0), \qquad (a \geqslant 0); \tag{1}$$

здесь $f(t) \in \widetilde{E}_0$, A — линейный ограниченный оператор, его спектр удовлетворяет условию:

(α) для любого λ из спектра оператора A все корни уравнения $1 - ze^{\lambda a z} = 0$ должны лежать вне единичного круга;

Φ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям:

|β| если $x \in \widetilde{E}_0$, то $\Phi x \in \widetilde{E}_0$;

|γ| если $u_k, u_{k-1} \in \widetilde{E}_0$, то $\|\Phi u_k - \Phi u_{k-1}\| \leqslant q_k \|u_k - u_{k-1}\|$, где $q_k = q \times (\|u_k\|, \|u_{k-1}\|)$; u_k, u_{k-1} являются k, $k-1$ приближениями Пикара решения задачи (1);

(δ) $\Phi\theta = \theta$.

---

* Определение и свойства пространств E и $\widetilde{E}$ см., например, в [4].

Если ввести теперь неубывающую, неотрицательную функцию

$$\psi(r) = \sup q(\| u_k \|, \| u_{k-1} \|), \qquad \| u_k \|, \quad \| u_{k-1} \| \leqslant r,$$

то условие $|\gamma|$ запишется следующим образом:

$|\eta|$ если $u_k, u_{k-1} \in \widetilde{E}_0$, то $\| \Phi u_k - \Phi u_{k-1} \| \leqslant \psi(r) \| u_k - u_{k-1} \|$.

Запишем операторное уравнение, эквивалентное задаче (1):

$$u - SKAu - S\Phi u = Sf, \tag{2}$$

где $Su = \int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau, \qquad SKu = \int\limits_0^t u(\tau - a)\,d\tau.$

Для задачи (1) верна следующая

Теорема. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условиям* (α), (β), (δ) *и* (η). *Тогда при всяком* Q *из интервала*

$$\| (I - SKA)^{-1} S \| \, \psi(0) \leqslant Q < 1$$

и при любой ограниченной и непрерывной правой части $f(t)$, *удовлетворяющей условию*

$$\| f \| \leqslant \frac{1 - Q}{\| (I - SKA)^{-1} S \|} \cdot \psi^{-1}\left(\frac{Q}{\| (I - SKA)^{-1} S \|} \right),$$

где ψ^{-1} — *функция, обратная* ψ, *краевая задача* (1) *имеет ограниченное решение, которое удовлетворяет неравенству*

$$\| u \| \leqslant \frac{\| (I - SKA)^{-1} S \|}{1 - Q} \| f \|.$$

Доказательство. Так как линейное операторное уравнение

$$u - SKAu = Sf \tag{3}$$

имеет ограниченное решение при ограниченной непрерывной правой части и выполнении условия (α), то оператор $(I - SKA)^{-1} S$ ограничен в пространстве $\widetilde{E}_0$ (доказано в [1])

$$\| B \| = \| (I - SKA)^{-1} S \| < \infty.$$

Применяя оператор $(I - SKA)^{-1}$ к обеим частям уравнения (2), получим:

$$u = (I - SKA)^{-1} S\Phi u + (I - SKA)^{-1} Sf,$$

или

$$u = B\Phi u + Bf.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений:

$$u_0 = 0,$$
$$u_1 = B\Phi u_0 + Bf,$$
$$u_2 = B\Phi u_1 + Bf,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = B\Phi u_{n-1} + Bf,$$
$$u_{n+1} = B\Phi u_n + Bf.$$

Отсюда:

$$u_{n+1} - u_n = B(\Phi u_n - \Phi u_{n-1}).$$

Вводим обозначения:

$$\| B \| = p, \qquad \| u_1 - u_0 \| = M \leqslant \| B \| \cdot \| f \|.$$

Тогда, учитывая условие (η), можем записать:

$$\| \Phi u_1 - \Phi u_0 \| \leqslant \psi \| u_1 - u_0 \| = M\psi,$$
$$\| u_2 - u_1 \| = \| B (\Phi u_1 - \Phi u_0) \| \leqslant Mp\psi,$$
$$\| \Phi u_2 - \Phi u_1 \| \leqslant \psi \| u_2 - u_1 \| \leqslant Mp\psi^2,$$
$$\| u_3 - u_2 \| = \| B (\Phi u_2 - \Phi u_1) \| \leqslant Mp^2\psi^2$$
$$\| \Phi u_3 - \Phi u_2 \| \leqslant \psi \| u_3 - u_2 \| \leqslant Mp^2\psi^3,$$
$$\| u_4 - u_3 \| = \| B (\Phi u_3 - \Phi u_2) \| \leqslant Mp^3\psi^3$$

и, вообще,

$$\| u_{n+1} - u_n \| \leqslant Mp^n\psi^n.$$

Эти неравенства позволяют оценить нормы последовательных приближений

$$\| u_{n+1} \| \leqslant \| u_n \| + Mp^n\psi^n.$$

Откуда рекуррентно следует:

$$\| u_{n+1} \| \leqslant M \sum_{k=0}^{n} p^k\psi^k. \tag{4}$$

Рассмотрим вопрос о сходимости последовательных приближений. Для сходимости ряда

$$u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + \ldots \tag{5}$$

по норме пространства $\widetilde{E}_0$ достаточно сходимости ряда

$$\|u_1 - u_0\| + \| u_2 - u_1 \| + \ldots + \| u_{n+1} - u_n \| + \ldots \tag{6}$$

Мажорантный ряд

$$M + Mp\psi + Mp^2\psi^2 + \ldots + Mp^n\psi^n \tag{7}$$

сходится, если

$$p\psi \leqslant Q < 1.$$

При выполнении последнего условия сумма ряда (7) не превысит $\dfrac{M}{1-Q}$; из определения функции ψ следует, что сходимость ряда (7) обеспечена, если

$$\psi\left(\frac{M}{1-Q}\right) \leqslant \frac{Q}{p} \tag{8}$$

или

$$\psi\left(\frac{\| B \| \| f \|}{1-Q}\right) \leqslant \frac{Q}{p}. \tag{9}$$

Рассмотрим, при каких условиях выполняется неравенство (9).

Для уравнения $\psi(r) = \tau$, где $\psi(r)$ — неубывающая неотрицательная функция, $r = \psi^{-1}(\tau)$ является также неубывающей функцией от τ и неравенство (9) может быть записано следующим образом:

$$\frac{\| B \| \| f \|}{1-Q} \leqslant \psi^{-1}\left(\frac{Q}{p}\right)$$

или

$$\|f\| \leqslant \frac{1-Q}{\|B\|} \cdot \psi^{-1}\left(\frac{Q}{p}\right).$$

Итак, сходимость наших рядов обеспечена при выполнении следующих условий:

1) уравнение $\psi(r) = \frac{Q}{p}$ при некотором $Q < 1$ имеет положительное решение;

2) правая часть уравнения (1) удовлетворяет неравенству (9).

Условие (1) будет выполнено, если, например, $\psi(0) < \frac{1}{p}$.

Переходя к пределу в неравенстве (4), получим, что решение уравнения 1) будет удовлетворять неравенству

$$\|u\| \leqslant \frac{M}{1-Q} \leqslant \frac{\|B\| \cdot \|f\|}{1-Q} \leqslant \psi^{-1}\left(\frac{Q}{p}\right).$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. А. Митропольскому за постановку задачи, ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. И. Рехлицкий, ДАН СССР, т. 111, № 1, 1956.
2. М. А. Рутман, Автореф. докт. дис., Изд-во ЛГУ, Л., 1962.
3. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, т. 3, вып. 1 (23), 1948.
4. М. А. Рутман, ДАН СССР, т. 101, № 2, 1955.
5. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов ГОНТИ, 1938.
6. М. Г. Крейн, Лекция по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, К., 1964.

Поступила 21.X 1965 г.
Киев