Об инвариантных подпространствах вполне непрерывных бисимметричных операторов

В. И. Годич

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Оператор I, определенный во всем $\mathfrak{H}$, называется *инволюцией* [1], если $I^2 = E$ и $(If, Ig) = \overline{(f, g)}$ $(f, g \in \mathfrak{H})$. Из определения легко следует, что $\| If \| = \| f \|$ и $I(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha} If + \bar{\beta} Ig$, где α и β — произвольные комплексные числа.

Линейный ограниченный оператор A, действующий в $\mathfrak{H}$, называется *бисимметричным*, если в $\mathfrak{H}$ существуют такие две инволюции I_1 и I_2, что

$$AI_1 = I_1 A, \ AI_2 = -I_2 A. \tag{1}$$

Оператор A, удовлетворяющий соотношениям (1), будем называть $(I_1 I_2)$-*бисимметричным*.

В последние годы выяснилось [2—5], что теорию бисимметричных операторов можно использовать при решении некоторых физических задач. В частности, находит применения полученная М. С. Лившицем [3] теорема о том, что для (I_1, I_2)-бисимметричного оператора, действующего в конечномерном пространстве, существует, при условии $I_1 I_2 = I_2 I_1$, нетривиальное подпространство, инвариантное относительно A, I_1 и I_2. В насгоящей статье эта теорема доказывается без ограничения на размерность пространства и без требования перестановочности инволюций I_1 и I_2.

Теорема 1. *Пусть A — вполне непрерывный (I_1, I_2)-бисимметричный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если $\dim \mathfrak{H} > 4$, то в $\mathfrak{H}$ существует нетривиальное подпространство, инвариантное относительно A, I_1 и I_2.*

Доказательство. 1. В случае $A = 0$ достаточно найти подпространство, инвариантное относительно I_1 и I_2. Легко видеть, что оператор $U = I_1 I_2$ унитарен, а сопряженный к нему определяется равенством $U^* = I_2 I_1$. Обозначая через $E(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ ортогональное разложение единицы, соответствующее U, и пользуясь равенством

$$U = I_1 U^* I_1 = I_2 U^* I_2,$$

получим

$$\int_0^{2\pi} e^{ix} dE(x) = \int_0^{2\pi} e^{ix} d(I_1 E(x) I_1) = \int_0^{2\pi} e^{ix} d(I_2 E(x) I_2).$$

Поскольку функции $I_1 E(x) I_1$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ и $I_2 E(x) I_2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ также являются ортогональными разложениями единицы, то

$$E(x) = I_1 E(x) I_1 = I_2 E(x) I_2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$$

откуда следует, что все подпространства вида $E(x)\mathfrak{H}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ инвариантны относительно I_1 и I_2. Среди них может не оказаться нетривиального лишь в случае $U = e^{i\varphi_0} E$. Но тогда $I_1 = e^{i\varphi_0} I_2$ и одномерное подпространство, натянутое на вектор $h \neq 0$, для которого $I_2 h = h$, инвариантно относительно I_1 и I_2.

2. Если $A \neq 0$, но существует такой вектор $h \neq 0$, что $Ah = 0$, то подпространство $\mathfrak{H}_0$, состоящее из всех векторов, аннулируемых оператором A, инвариантно, в силу (1), относительно I_1 и I_2.

3. Пусть не существует вектора $h \neq 0$, аннулируемого оператором A. Тогда последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots$ всех собственных чисел оператора A^*A не содержит нуля, и в представлении $\mathfrak{H} = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{G}_j$, где $\mathfrak{G}_j$—собственное подпространство оператора A^*A, отвечающее числу ω_j, все слагаемые конечномерны. Так как $AU = -UA$ $(U = I_1 I_2)$ и, значит, $(A^*A)U = U(A^*A)$, то каждое из подпространств $\mathfrak{G}_j$ инвариантно относительно U. Таким образом, в $\mathfrak{H}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора U.

Пусть $e^{i\varphi_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r;\ r \leqslant \infty)$ — все собственные числа оператора U, для которых $0 \leqslant \varphi_k < \pi$, а $\mathfrak{H}_k^+$ — соответствующие им собственные подпространства. В силу равенства $AU = -UA$, числа $-e^{i\varphi_k}$ также являются собственными для U, причем соответствующие собственные подпространства $\mathfrak{H}_k^-$ совместно с $\mathfrak{H}_k^+$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{r} \oplus \mathfrak{H}_k^+ \oplus \sum_{k=1}^{r} \oplus \mathfrak{H}_k^-, \quad A\mathfrak{H}_k^+ \subset \mathfrak{H}_k^-, \quad A\mathfrak{H}_k^- \subset \mathfrak{H}_k^+.$$

Кроме того, из равенств

$$UI_1 = I_1 U^*, \quad UI_2 = I_2 U^*$$

вытекает, что каждое из подпространства $\mathfrak{H}_k^+$, $\mathfrak{H}_k^-$ инвариантно относительно I_1 и I_2. Этим доказано, что подпространства $\mathfrak{H}_k^+ \oplus \mathfrak{H}_k^-$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ инвариантны относительно A, I_1 и I_2.

4. Остается рассмотреть случай, когда оператор U имеет лишь два собственных числа: $e^{i\varphi}$ и $-e^{i\varphi}$. Пусть $\mathfrak{H}^+$ и $\mathfrak{H}^-$—соответствующие этим

числам собственные подпространства, P^+ и P^- — ортопроекторы на $\mathfrak{H}^+$ и $\mathfrak{H}^-$. Поскольку $U = e^{i\varphi}(P^+ - P^-)$, то $U = e^{2i\varphi}U^*$, т. е.

$$I_1 I_2 = e^{2i\varphi} I_2 I_1. \tag{2}$$

В предыдущем пункте было показано, что каждое из подпространств $\mathfrak{H}^+$, $\mathfrak{H}^-$ инвариантно относительно I_1 и I_2. Легко видеть, что для произвольной инволюции можно построить ортонормированный базис, состоящий из ее собственных векторов. Пусть $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$ такой, что каждый вектор e_j является собственным для I_1 и принадлежит либо $\mathfrak{H}^+$, либо $\mathfrak{H}^-$. В силу равенства $I_2 = I_1 U$, вектор e_j является собственным и для инволюции I_2. Обозначим через P_n ортопроектор на линейную оболочку $\mathfrak{H}_n$ векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и зададим в $\mathfrak{H}_n$ оператор $A_n h = P_n A h \, (h \in \mathfrak{H}_n)$. Кроме того, обозначим через $I_1^{(n)}$ и $I_2^{(n)}$ инволюции, индуцированные в $\mathfrak{H}_n$ инволюциями I_1 и I_2. В силу (1) и (2),

$$A_n I_1^{(n)} = I_1^{(n)} A_n, \ \ A_n I_2^{(n)} = -I_2^{(n)} A_n, \ \ I_1^{(n)} I_2^{n} = e^{2i\varphi} I_2^{(n)} I_1^{(n)}. \tag{3}$$

В $\mathfrak{H}_n$ можно построить подпространства

$$O = \mathfrak{G}_n^{(0)} \subset \mathfrak{G}_n^{(1)} \subset \mathfrak{G}_n^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n^{(n)} = \mathfrak{H}_n \, (\dim \mathfrak{G}_n^{(k)} = k),$$

инвариантные относительно A_n. Из (3) следует, что линейная оболочка подпространств $\mathfrak{G}_n^{(k)}$, $I_1^{(n)}\mathfrak{G}_n^{(k)}$, $I_2^{(n)}\mathfrak{G}_n^{k}$, $I_1^{(n)} I_2^{(n)} \mathfrak{G}_n^{(k)}$ при каждом $k \, (k = 1, 2, \ldots, n)$ инвариантна относительно A_n, $I_1^{(n)}$ и $I_2^{(n)}$. Располагая эти оболочки в порядке возрастания размерности, получим подпространства

$$O = \mathfrak{H}_n^{(0)} \subset \mathfrak{H}_n^{(1)} \subset \mathfrak{H}_n^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{H}_n^{(k_n)} = \mathfrak{H}_n \, (\dim \{\mathfrak{H}_n^{(k)} \ominus \mathfrak{H}_n^{(k-1)}\} \leqslant 4).$$

Рассмотрим неравенства *

$$O = (P_n^{(0)} e_1, e_1) \leqslant (P_n^{(1)} e_1, e_1) \leqslant \ldots \leqslant (P_n^{(k_n)} e_1, e_1) = 1,$$

где $P_n^{(k)}$ — действующий в $\mathfrak{H}$ ортопроектор на $\mathfrak{H}_n^{(k)}$. Очевидно, найдутся ортопроекторы $Q_n' = P_n^{(r_n)}$ и $Q_n'' = P_n^{(r_n+1)}$, удовлетворяющие условиям

$$(Q_n' e_1, e_1) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant (Q_n'' e_1, e_1). \tag{4}$$

Выделим из последовательностей Q_n' и Q_n'' слабо сходящиеся подпоследовательности Q_{n_j}' и Q_{n_j}''. Обозначив их пределы соответственно через F' и F'', получим

$$(F' e_1, e_1) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant (F'' e_1, e_1). \tag{5}$$

Инвариантность подпространства $\mathfrak{H}_n^{(k)}$ относительно A_n означает, что $A_n P_n^{(k)} = P_n^{(k)} A_n P_n^{(k)}$. Последнее равенство можно переписать в виде $P_n A P_n^{(k)} = P_n^{(k)} A P_n^{(k)}$. В частности,

$$P_{n_j} A Q_{n_j}' = Q_{n_j}', \ A Q_{n_j}', \ \ P_{n_j} A Q_{n_j}'' = Q_{n_j}'' A Q_{n_j}''.$$

Замечая, что последовательности AQ_{n_j}', AQ_{n_j}'' и P_{n_j} сильно сходятся соответственно к AF', AF'' и E, получим:

$$AF' = F'AF', \ \ AF'' = F''AF''. \tag{6}$$

* В дальнейших рассуждениях обобщается метод Аронпайна и Смита [6], примененный ими для доказательства теоремы о существовании инвариантного подпространства у вполне непрерывного оператора.

Кроме того, $P_n^{(k)} I_\alpha = I_\alpha P_n^{(k)}$ $(\alpha = 1, 2)$ и, следовательно,

$$F' I_\alpha = I_\alpha F', \ F'' I_\alpha = I_\alpha F'' \ (\alpha = 1, 2).$$

Предположим, что одновременно $F' = 0$ и $F'' = E$. Тогда последовательность $Q''_{n_j} - Q'_{n_j}$ ортопроекторов на подпространства, размерности которых не превосходят четырех, сходятся слабо (следовательно, и сильно) к единичному оператору пространства $\mathfrak{H}$, размерность которого больше четырех, что невозможно. С другой стороны, в силу (5), $F' \neq E$ и $F'' \neq 0$. Следовательно, по крайней мере один из операторов F', F'' отличен как от 0, так и от E. Обозначая его через F, получим равенства

$$AF = FAF, \ FI_1 = I_1 F, \ FI_2 = I_2 F. \tag{7}$$

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — подпространство, состоящее из всех векторов $f \in \mathfrak{H}$, для которых $Ff = f$. Существует такой вектор $h_0 \neq 0$, что $Fh_0 \neq 0$. Так как рассматривается случай, когда оператор A не аннулирует отличных от нуля векторов, то $AFh_0 \neq 0$. Это означает, ввиду первого из равенств (7), что $\mathfrak{H}_0 \neq 0$. Вместе с тем $\mathfrak{H}_0 \neq \mathfrak{H}$, ибо в противном случае выполнялось бы равенство $F = E$. Остается заметить, что $\mathfrak{H}_0$ инвариантно относительно A, I_1 и I_2. Действительно, если $f \in \mathfrak{H}_0$, то

$$FAf = FAFf = AFf = Af$$

и, следовательно, $Af \in \mathfrak{H}_0$. Инвариантность $\mathfrak{H}_0$ относительно I_1 и I_2 вытекает из последних двух соотношений (7).

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и π — некоторое множество подпространств в $\mathfrak{H}$. Совокупность π называется *цепочкой*, если для любых $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \in \pi$ выполняется одно из соотношений $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_1$. Если $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \in \pi \, (\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2)$ и любое подпространство из π либо содержится в $\mathfrak{H}_1$, либо содержит $\mathfrak{H}_2$, то пара $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ называется *скачком* цепочки π, а размерность подпространства $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{H}_1$ — размерностью этого скачка. Будем говорить, что цепочка π принадлежит тройке (A, I_1, I_2), где A — вполне непрерывный (I_1, I_2)-бисимметричный оператор, если все подпространства, входящие в состав π, инвариантны относительно A, I_1 и I_2. Принадлежащая (A, I_1, I_2) цепочка π называется *максимальной*, если не существует другой цепочки, также принадлежащей (A, I_1, I_2), для которой π является правильной частью. Из леммы Цорна легко следует, что каждая тройка (A, I_1, I_2) обладает по крайней мере одной максимальной цепочкой.

Теорема 2. *Скачки максимальной цепочки π, принадлежащие тройке (A, I_1, I_2), не более чем четырехмерны.*

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ — скачок цепочки π и $\dim (\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{H}_1) > 4$. Обозначим через P_{12} ортопроектор на $\mathfrak{H}_{12} = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{H}_1$. Так как $\mathfrak{H}_{12}$ инвариантно относительно операторов $A_{12} h = P_{12} A h \ (h \in \mathfrak{H}_{12})$, I_1 и I_2, причем $I_1 A_{12} = A_{12} I_1$, $I_2 A_{12} = - A_{12} I_2$, то в силу теоремы 1 в $\mathfrak{H}_{12}$ существует нетривиальное подпространство $\mathfrak{H}_0$, инвариантное относительно A_{12}, I_1, I_2. Но тогда подпространство $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_0$ инвариантно относительно A, I_1, I_2, что противоречит максимальности цепочки π.

Отметим, что скачки максимальной цепочки, принадлежащей тройке (A, I_1, I_2), не могут быть трехмерными.

Вполне непрерывный оператор называется *вольтерровым*, если его спектр не содержит отличных от нуля точек.

Теорема 3*. *Если A — вольтерров (I_1, I_2)-бисимметричный оператор, то скачки максимальной цепочки, принадлежащей тройке* (A, I_1, I_2), *не более чем одномерны.*

---

* Теорема 3 представляет собой обобщение известных теорем [7, 8] об инвариантных подпространствах вполне непрерывных операторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторый скачок $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ цепочки π и воспользуемся введенными в предыдущей теореме обозначениями. Поскольку подпространство $\mathfrak{H}_{12}$ конечномерно, а оператор A_{12} вольтерров, то существует вектор $h \neq 0$, аннулируемый оператором A_{12}. Если $\dim \mathfrak{H}_{12} > 1$, то, как было показано в первых двух пунктах доказательства теоремы 1, существует нетривиальное подпространство в $\mathfrak{H}_{12}$, инвариантное относительно A_{12}, I_1 и I_2. Дальнейшие рассуждения не отличаются от приведенных в теореме 2.

Автор выражает глубокую благодарность М. С. Бродскому за помощь при написании настоящей заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. А х и е з е р и И. М. Г л а з м а н, Теория линейных операторов, Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Е. В и г н е р, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, гл. 26, ИЛ, М., 1961.
3. М. С. Л и в ш и ц, О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, № 5, 1963, 993 — 1030.
4. М. С. Л и в ш и ц и М. Ш. Ф л е к с е р, Разложение реактивного четырехполюсника в цепочку простейших четырехполюсников, ДАН СССР, т. 135, № 3, 1960, 542—544.
5. М. С. Л и в ш и ц и М. Ш. Ф л е к с е р, Синтез передающей линии по заданным частотным характеристикам, Зап. Харьковск. матем. об-ва, т. XXVII, сер. 4, 1961, 149—162.
6. Н. А р о н ш а й н и К. Т. С м и т, Инвариантные подпространства вполне непрерывных операторов, «Математика» (сб. перев.), 2 : 1, 1958, 97 — 102.
7. М. С. Б р о д с к и й, О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра, УМН, т. XVI, вып. 1 (97), 1961, 135—141.
8. Л. А. С а х н о в и ч, О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду, Изв. высш. уч. зав., сер. матем., № 1 (8), 1959, 180—186.

Поступила 4. X 1965 г.
Одесса